Intégrales Singulières et Application à la Mécanique des Fluides

Dimitri A. COBB
sous la direction de
Dragoş IFTIMIE

29 août 2016

Résumé

Ce texte est le rapport d'un stage de première année d'environ un mois qu'effectuent les élèves de l'*École Normale Supérieure de Rennes*. Sont ici présentés le théorème de Calderòn-Zygmund sur les opérateurs à intégrales singulières et une de ses applications à l'unicité des solutions de Yudovich des équations d'Euler Incompressibles.

Le stage dont est issu ce rapport s'est déroulé à l'*Institut Camille Jordan* (attaché à l'Université de Lyon 1) sous la direction de Dragoş IFTIMIE.

Table des matières

1 Notations, Définitions, Rappels **6**
1.1 Notations 6
1.2 Conventions 7
1.3 Définitions 7
1.4 Résultats Préliminaires 8
1.4.1 Théorie de l'Intégration 8
1.4.2 Une formule d'Intégration par Parties 9
1.4.3 Équation de Poisson 11
1.4.4 Calcul Différentiel 12

2 Intégrales Singulières **14**
2.1 Introduction 14
2.2 Un Premier théorème 15
2.3 Le Théorème de Calderòn-Zygmund 26
2.4 Conclusion 34

3 Application aux Équations d'Euler pour un Fluide Incompressible **38**
3.1 Généralités sur les Équations d'Euler Incompressibles 38
3.1.1 Introduction Physique 38
3.1.2 Trajectoires des Particules 40
3.1.3 Incompressibilité et Divergence 40
3.1.4 Tourbillon et Loi de Biot-Savart 42
3.2 Une Estimation de ∇v à l'Aide d'Intégrales Singulières 44
3.3 Unicité des Solutions de Yudovich 47
3.3.1 Idée de la Preuve 47
3.3.2 Démonstration Rigoureuse 49

Remerciements

L'*Institut Camille Jordan* est remercié pour son accueil. Une gratitude toute particulière va à Dragoş Iftimie pour sa patience, ses longues explications (souvent répétées) et la quantité non dénombrable de conseils qu'il a prodigués. Merci aussi à Valentina Busuioc pour les discussions cordiales.

Des remerciements vont également à l'ensemble des enseignants qui ont transmis leur amour des Sciences : Roland Benoit, Jean-Luc Joly, Denis Choimet, Jacques Renault, Patrick Séguin et Romain Presle (pour n'en citer que quelques uns).

Introduction

Origines du Problème

Les fonctions définies par des produits de convolution de fonctions avec des noyaux affectés de singularités sont monnaie courante [1] en Mathématiques et en Physique ne serait-ce que parce que les solutions à bon nombre d'équations aux dérivées partielles linéaires [2] impliquent des convolutions avec des *solutions élémentaires* d'opérateurs différentiels, ces dernières présentant toujours des singularités.
Un exemple typique est la solution élémentaire du Laplacien $\Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2$ qui est donnée par

$$T(x) = \frac{1}{2\pi} \log |x| \qquad \text{pour } x \in \mathbb{R}^2$$

et qui fournit comme solution à l'équation de Poisson $\Delta u = \rho$ la fonction

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int \rho(x - y) \log |y| \mathrm{d}y$$

Il se pose alors la question de la régularité de la solution. Si le terme de source ρ n'est pas une fonction de classe C^1, les dérivées premières de u sont données en dérivant le noyau $\log |y|$,

$$\nabla u(x) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{y}{|y|^2} \rho(x - y) \mathrm{d}y$$

Mais on ne peut aller au delà des dérivées premières de cette manière puisque les dérivées secondes du noyau présentent une singularité non intégrable (en $1/r^2$). Pourtant les singularités de ce type (en $1/r^2$) sont "presque" intégrables : si $\epsilon > 0$, les noyaux majorés par $O\left(1/r^{2-\epsilon}\right)$ sont intégrables.
Nous allons étudier les deux problèmes suivants :

Question d'existence : À quelle(s) condition(s) peut-on donner un sens à la convolution avec des noyaux "presque" intégrables (en $1/r^n$ où n est la dimension de l'espace) ?

1. Pour ne pas dire argent liquide, ce qui serait particulièrement adapté au sujet du présent document.
2. On pourra citer à titre d'exemple les équations de propagation des ondes qui sont légion en électromagnétisme ou l'équation de Poisson dont nous parlerons plus en détail par la suite.

Question de régularité : Quelle est la régularité des fonctions ainsi obtenues ?

Le théorème de Caderòn-Zygmund

Le cas des fonctions d'une seule variable (réelle) est le premier à avoir été traité. Un théorème de M. Riesz assure l'existence des transformées singulières du type

$$Hf(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x-y)}{y} \mathrm{d}y$$

définissent des applications linéaires $H : L^p \longrightarrow L^p$ continues ($p > 1$). Zygmund fait d'ailleurs mention du sujet dans son livre d'Analyse Harmonique [6] publié en 1935. Le cas des fonctions de plusieurs variables est présenté par Calderòn et Zygmund en 1952 dans leur article commun [2].

Théorème 0.1 (Calderòn-Zygmund)**.** *Soit $n < +\infty$ la dimension de l'espace ambiant. On considère un noyau "singulier " $K(y) = O(1/|y|^n)$ vérifiant une certaine condition de de moyenne*[3] *autour de sa singularité. On définit l'opérateur T_ϵ par*

$$T_\epsilon f(x) = \int_{|y|\geq\epsilon} f(x-y)K(y)dy \tag{1}$$

Alors $T_\epsilon f$ admet une limite dans L^p pour $\epsilon \longrightarrow 0$ définissant (existence) un opérateur T :

$$Tf = \lim_{\epsilon\to 0} T_\epsilon f \qquad \text{dans } L^p.$$

L'application linéaire $T : L^p \longrightarrow L^p$ est continue pour chaque $1 < p < +\infty$ (régularité) et, si de plus $p \geq 2$, sa norme subordonnée est majorée par

$$\|T\|_{\mathcal{L}(L^p)} \leq Cte \cdot p$$

La démonstration de ce théorème passe par l'étude des opérateurs T_ϵ à noyaux tronqués $K(x)\mathbb{1}_{|x|\geq\epsilon}$ pour lesquels il faut en premier lieu établir la majoration suivante (pour $p \geq 2$)

$$\|T_\epsilon f\|_{L^p} \leq \mathrm{Cte} \cdot p\|f\|_{L^p}$$

Celle-ci est une conséquence du *théorème d'interpolation de Marcinkiewicz*[4] qui affirme la continuité de l'opérateur T_ϵ sur l'espace L^p pourvu que soit montré une forme "faible" de "continuité" de l'opérateur sur L^1 et L^2 :

$$\sup_{\alpha\geq 0} [\alpha \mathrm{mes}\{|T_\epsilon f| > \alpha\}] \leq \mathrm{Cte}\|f\|_{L^1}$$

$$\left[\sup_{\alpha\geq 0} \left[\alpha^2 \mathrm{mes}\{|T_\epsilon f| > \alpha\}\right]\right]^{1/2} \leq \mathrm{Cte}\|f\|_{L^2}$$

On dit alors que T est du type faible sur L^1 et L^2.

---

3. La bonne condition, nous le verrons, est que le noyau est "en moyenne" nul autour de l'origine.
4. Lequel a été l'élève de Zygmund.

Nous montrerons d'abord que T_ϵ est du type faible sur L^1 en supposant sa continuité sur L^2. Celle-ci repose sur un lemme de recouvrement qui permet de scinder f en deux parties pour lesquelles nous pourrons majorer séparément les mesures $\text{mes}\{|Tf| > \epsilon\}$. Concernant la continuité sur L^2, nous utilisons les propriétés de la transformée de Fourier de $T_\epsilon f$: si $K_\epsilon = K\mathbb{1}_{|x|\geq\epsilon}$ est le noyau tronqué,

$$\|T_\epsilon f\|_{L^2} = \|\hat{K}_\epsilon \hat{f}\|_{L^2} \leq \|\hat{K}_\epsilon\|_{L^\infty}\|f\|_{L^2}$$

La continuité de $T_\epsilon : L^2 \longrightarrow L^2$ sera acquise si les fonctions $\hat{K}_\epsilon$ sont bornées, ce que nous montrerons aussi.

Applications aux Équations d'Euler Incompressible

Illustrons l'efficacité de ce théorème par son action dans une situation où survient naturellement un noyau singulier.

On considère un fluide parfait incompressible plan [5] décrit par son champ des vitesses v et sa pression en chaque point p qui satisfont aux équations suivantes :

$$\begin{cases} \partial_t v + \sum_i v_i \partial_i v + \nabla p = 0 \\ \text{div}(v) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

L'interrogation à laquelle nous nous soumettrons sera celle de l'unicité des solutions de Yudovich (c'est à dire les solutions à tourbillon $\omega = \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1$ borné). Signalons que l'article original [5] de Yudovich (1963) présente l'existence et unicité de ces solutions sur des domaines simplement connexes ou non tandis que nous nous cantonnerons plus modestement dans la preuve de la seule unicité des solutions définies sur le plan entier.

Nous le verrons, la preuve de l'unicité des solutions rend nécessaire un majoration efficace de $\|\nabla v\|_{L^p}$. Le champ des vitesses s'exprime en fonction de son tourbillon par la relation intégrale suivante :

$$v(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int \frac{y^\perp}{|y|^2}\omega(x-y,t)\mathrm{d}y = K * \omega(x)$$

Ceci nous permet de voir ∇v comme le "produit de convolution" du tourbillon ω avec le noyau singulier

$$\nabla K(x_1,x_2) = \frac{1}{(x_1^2+x_2^2)^2}\begin{pmatrix} -2x_1x_2 & x_1^1 - x_2^2 \\ x_2^2 - x_1^2 & 2x_1x_2 \end{pmatrix}$$

Le théorème de Calderòn-Zygmund nous permet d'écrire la majoration attendue $\|\nabla v\|_{L^p} \leq p\text{Cte}\|\omega\|_{L^p}$ qui permettra de conclure quant à l'unicité des solutions.

Plan du texte

Le premier chapitre de ce texte est un avant-propos consacré aux prérequis à la démonstration. Outre un catalogue des notations et conventions présentes dans la suite, sont montrés deux résultats importants pour la suite : une formule

5. En dimension 2.

d'intégration par parties sur des boules et la résolution de l'équation de Poisson.

Dans le deuxième chapitre, nous démontrons le théorème 0.1 de la manière décrite ci-dessus. Ce chapitre constitue le "noyau dur" du texte et son contenu provient du livre [4] de E. M. Sein.

Le troisième et dernier chapitre présente les applications du théorème à l'unicité des solutions de Yudovich des équations d'Euler et se décompose en trois parties. La première est destinée à familiariser le lecteur avec les solutions des équations d'Euler et présente des calculs essentiellement formels. Dans la deuxième partie, nous appliquons le théorème 0.1 au champ dérivé ∇v pour ensuite appliquer ce résultat dans la troisième et dernière partie. Le livre [1] de A. J. Majda et A. L. Bertozzi a été le support principal de ce qui est exposé dans ce chapitre.

Chapitre 1

Notations, Définitions, Rappels

Nous fixons dans ce chapitre les notations et les conventions que nous utiliserons dans ce texte. Nous donnons aussi quelques résultats importants dont nous nous servirons par la suite, à savoir une formule d'intégration par parties sur des boules en dimension 2 et la résolution dans l'espace des distributions tempérées de l'équation de Poisson bidimensionnelle.

1.1 Notations

Dans tout ce texte, n est un entier naturel et $\mathbb{R}^n$ est muni de $(\cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, le produit scalaire usuel. Nous munissons en outre $\mathbb{R}^n$ de la mesure de Lebesgue "mes" définie sur $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ la tribu de Lebesgue [1]. Si $x \in \mathbb{R}^n$, nous noterons toujours $x = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$. Les espaces L^p de Lebesgue ($1 \leq p \leq +\infty$) correspondants sont notés $L^p(\mathbb{R}^n)$, ou plus simplement L^p lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.
Sans précision supplémentaire, les intégrales des fonctions $f \in L^1$ son prises sur $\mathbb{R}^n$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x = \int f$$

On pose $\bar{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

Si E est une espace normé et $T : E \longrightarrow E$ une application linéaire qui admet un restriction *continue* $T : F \longrightarrow F$ (où $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel) on dit que T est *borné* sur F. Cette appellation sera particulièrement utile puisque nous devrons considérer des applications qui seront définies sur tout E mais continues sur certains sous-espaces seulement.

Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction C^1, on confondra allègrement la différentielle de f et son gradient qui seront notés, pour $x \in \mathbb{R}^n$

$$\mathrm{d}f(x) = \nabla f(x)$$

1. C'est la tribu complétée de la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

On confondra également, sans plus de vergogne, les différentielles des applications et les matrices jacobiennes associées. Par conséquent, la composition de deux différentielles sera notée multiplicativement.

Si

$$f: \begin{array}{c} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,t) \longmapsto f(x,t) \end{array}$$

est une application de classe C^1, on note $\partial_1 f, \partial_2 f, ..., \partial_n f$ et $\partial_t f$ ses dérivées partielles "en espace" et "en temps". Sans d'avantage de précision, $\mathrm{d}f(x,t) = \nabla f(x,t)$ sera toujours la différentielle partielle en espace $\partial_x f(x,t)$.

Pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$, on pose $B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n | |y| < r\}$ et $\mathbb{1}_r(x) = \mathbb{1}_{|x| \geq r}$. On notera $\bar{B}(x,r)$ l'adhérence de $B(x,r)$.

Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert, $\mathcal{D}(\Omega)$ est l'espace vectoriel des fonctions C^∞ à support compact sur Ω, $\mathcal{D}'(\Omega)$ est l'espace des distributions associées et $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des distributions tempérées. Lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté possible, nous noterons tout simplement $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{S}'$ ces espaces.

1.2 Conventions

La transformation de Fourier est définie sur la classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ par

$$\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \hat{f}(x) = \int f(y) e^{-2i\pi x \cdot y} \mathrm{d}y$$

Si $f \in \mathcal{S}'$ est une distribution tempérée, nous noterons $\mathcal{F}f = \hat{f}$ sa transformée de Fourier.

1.3 Définitions

Définition 1.1 (Espaces $L^{p,\infty}$)**.** Si $1 \leq p < +\infty$, on note $L^{p,\infty}$ l'espace des fonctions mesurables $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ avec

$$\|f\|_{L^{p,\infty}} := \left[\sup_{\alpha \geq 0} \alpha^p \mathrm{mes}\{|f| > \alpha\}\right]^{1/p} < +\infty$$

On nomme cet espace l'espace L^p *faible*.

Montrons qu'il s'agit d'un espace vectoriel. Pour $\lambda \in \mathbb{C}$ et $f, g \in L^{p,\infty}$, on a d'une part,

$$\begin{aligned} \|\lambda f\|_{L^{p,\infty}} &= \left[\sup_{\alpha \geq 0} \alpha^p \mathrm{mes}\{|\lambda f| > \alpha\}\right]^{1/p} \\ &= \left[\sup_{\alpha \geq 0} |\lambda|^p \left(\frac{\alpha}{|\lambda|}\right)^p \mathrm{mes}\left\{|f| > \frac{\alpha}{|\lambda|}\right\}\right]^{1/p} \\ &= |\lambda| \|f\|_{L^{p,\infty}} \end{aligned}$$

et d'autre part, comme $\{|f+g|>\alpha\} \subset \{|f|>\frac{\alpha}{2}\} \cup \{|g|>\frac{\alpha}{2}\}$,

$$\begin{aligned}
\|f+g\|^p_{L^{p,\infty}} &= \sup_{\alpha\geq 0} \alpha^p \mathrm{mes}\{|f+g|>\alpha\} \\
&\leq \sup_{\alpha\geq 0} \alpha^p \left(\mathrm{mes}\left\{|f|>\frac{\alpha}{2}\right\} + \mathrm{mes}\left\{|g|>\frac{\alpha}{2}\right\}\right) \\
&\leq 2^p \left[\sup_{\alpha\geq 0} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^p \left(\mathrm{mes}\left\{|f|>\frac{\alpha}{2}\right\} + \mathrm{mes}\left\{|g|>\frac{\alpha}{2}\right\}\right)\right] \\
&< +\infty
\end{aligned}$$

Remarquons au passage que $\|.\|_{L^{p,\infty}}$ n'est *pas* une norme sur $L^{p,\infty}$ mais seulement une *quasi*-norme. L'inégalité triangulaire n'est en effet pas au nombre de ses propriétés, ce que l'on peut vérifier en regardant, sur $[0,1]$, les fonctions $x \longmapsto x^{-1/p}$ et $x \longmapsto (1-x)^{-1/p}$.

Si $p=+\infty$, on pose $L^{p,\infty} = L^\infty$.

1.4 Résultats Préliminaires

1.4.1 Théorie de l'Intégration

Se trouvent catalogués ci-dessous quelques résultats de théorie de l'intégration.

Lemme 1.2 (Relation de dualité). *On considère $1 \leq p < +\infty$ et q exposants conjugués*[2]. *Soit $f \in L^p$, alors,*

$$\|f\|_{L^p} = \sup_{g\in L^q, \|g\|_{L^q}\leq 1} |\langle f,g\rangle| = \sup_{\|g\|_{L^q}\leq 1} \left|\int fg\right|$$

Démonstration. L'inégalité de Hölder donne, pour $\|g\|_{L^q} \leq 1$,

$$\sup_{g\in L^q, \|g\|_{L^q}\leq 1} |\langle f,g\rangle| \quad \leq \|f\|_{L^p}$$

Pour établir l'égalité, supposons d'abord $p>1$. On considère $h := -\mathrm{sgn}(f)|f|^{p-1}$ qui est une fonction L^q. En effet, $|h|^q = |f|^{q(p-1)} = |f|^p$. Alors, en posant $g = \frac{h}{\|h\|_{L^q}}$,

$$\|f\|_{L^p} = \int fg = \frac{\int |f|^p}{\left(\int |f|^p\right)^{1/q}}$$

Si $p=1$, il suffit de prendre $h = -\mathrm{sgn}(f) \in L^\infty$ et de conclure. □

Proposition 1.3 (Inégalité de Hausdorff-Young). *On considère $1 \leq p,q,r \leq +\infty$ avec $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1+\frac{1}{r}$. Si $(f,g) \in L^p \times L^q$ alors $f*g \in L^r$ et*

$$\|f*g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}$$

Nous ne montrons pas ce résultat dont la preuve est longue, peu instructive et complètement hors de notre propos. Référons plutôt à [3] (théorème 1.3.10. page 18) pour une démonstration complète.

2. p et q sont dits exposants conjugués s'ils vérifient $1/p+1/q=1$.

Lemme 1.4 (Inégalité de Markov). *On considère* $1 \leq p < +\infty$ *et* $f \in L^p$. *Alors, pour chaque* $\alpha > 0$,

$$mes\{|f| > \alpha\} \leq \frac{1}{\alpha^p} \|f\|_{L^p}^p$$

Démonstration. On remarque que $\alpha \mathbb{1}_{|f|>\alpha} < |f|$ partout, donc $\alpha^p \mathbb{1}_{|f|>\alpha} < |f|^p$. Le résultat vient en intégrant cette relation :

$$\alpha^p \mathrm{mes}\{|f| > \alpha\} \leq \int |f|^p$$

□

Lemme 1.5 (de Borel-Cantelli). *On considère* $(A_n)_n$ *une suite d'ensembles mesurables tels que*

$$\sum_{n \geq 0} mes(A_n) < +\infty$$

Alors,

$$mes\left(\limsup_{n\geq 0} A_n\right) = mes\left(\bigcap_{i \geq 0} \bigcup_{j \geq i} A_j\right) = 0$$

1.4.2 Une formule d'Intégration par Parties

Nous montrons dans cette partie une formule d'intégration par parties, cas particulier de la formule de Stokes dans un contexte de symétrie sphérique.

On considère $f : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et on cherche à évaluer, pour $R > 0$, les intégrales

$$\iint_{B(0,R)} \partial_x f(x,y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad \text{et} \qquad \iint_{B(0,R)} \partial_y f(x,y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Proposition 1.6. *Sous les conditions mentionnées ci-dessus, on a :*

$$\iint_{B(0,R)} \partial_x f = \int_0^{2\pi} \cos(\theta) f(R\cos(\theta), R\sin(\theta)) R d\theta$$

$$\iint_{B(0,R)} \partial_y f = \int_0^{2\pi} \sin(\theta) f(R\cos(\theta), R\sin(\theta)) R d\theta$$

Corollaire 1.7. *En appliquant ceci à* $fg \to f$, *on écrit une formule d'intégration par parties.*

$$\iint_{B(0,R)} g\partial_x f = \int_0^{2\pi} \cos(\theta)(fg)(R\cos(\theta), R\sin(\theta)) R d\theta - \iint_{B(0,R)} f\partial_x g \quad (1.1)$$

$$\iint_{B(0,R)} g\partial_y f = \int_0^{2\pi} \sin(\theta)(fg)(R\cos(\theta), R\sin(\theta)) R d\theta - \iint_{B(0,R)} f\partial_y g \quad (1.2)$$

Et en remarquant qu'une couronne est la différence de deux boules ouvertes,

$C(R_1,R_2)=B(0,R_2)\diagdown\bar{B}(0,R_1)$, *on a aussi un formule d'intégration par parties sur les couronnes :*

$$\begin{aligned}\iint_{C(R_1,R_2)} g\partial_x f = &\int_{r=R_2} R_2\cos(\theta) fg(R_2\cos(\theta),R_2\sin(\theta))d\theta\\ &-\int_{r=R_1} R_1\cos(\theta) fg(R_1\cos(\theta),R_1\sin\theta)d\theta\\ &-\iint_{C(R_1,R_2)} f\partial_x f\end{aligned}$$

Démonstration de la proposition. Nous allons passer en coordonnées polaires puis effectuer des intégrations par parties. On pose dans toute la suite $x = r\cos(\theta)$ et $y=r\sin(\theta)$.

$$\iint_{B(0,R)} \partial_x f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0^+}^{R} \partial_x f(r\cos(\theta),r\sin(\theta))r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

Posons, pour $r>0$ et $\theta\in\mathbb{R}$, $F(r,\theta)=f(r\cos(\theta),r\sin(\theta))$ et calculons les dérivées partielles de f en fonction de celles de F.

$$\begin{cases}\partial_r F(r,\theta)=\partial_x f(x,y)\cos(\theta)+\partial_y f(x,y)\sin(\theta)\\ \partial_\theta F(r,\theta)=\partial_x f(x,y)(-r\sin(\theta))+\partial_y f(x,y)r\cos(\theta)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\partial_x f(x,y)=\cos(\theta)\partial_r F(r,\theta)-\frac{1}{r}\sin(\theta)\partial_\theta F(r,\theta)\\ \partial_y f(x,y)=\sin(\theta)\partial_r F(r,\theta)+\frac{1}{r}\cos(\theta)\partial_\theta F(r,\theta)\end{cases}$$

Le théorème de Fubini nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\iint_{B(0,R)} \partial_x f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint_{]0,2\pi[\times]0,R[} \left[r\partial_r F(r,\theta)\cos(\theta)-\partial_\theta F(r,\theta)\sin(\theta)\right]\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\ &= \int_\theta \cos(\theta)\left[\int_r r\partial_r F(r,\theta)\mathrm{d}r\right]\mathrm{d}\theta - \int_r\left[\int_\theta \partial_\theta F(r,\theta)\sin(\theta)\mathrm{d}\theta\right]\mathrm{d}r\end{aligned}$$

Des intégrations par parties dans chacune des intégrandes donnent :

$$\int_0^R r\partial_r F(r,\theta)\mathrm{d}r = RF(R,\theta)-\int_0^R F(r,\theta)\mathrm{d}r$$

$$\int_0^{2\pi} \partial_\theta F(r,\theta)\sin(\theta)\mathrm{d}\theta = -\int_0^{2\pi}\cos(\theta)F(r,\theta)\mathrm{d}\theta$$

Les termes intégrés à la fois en r et θ s'annulent pour donner :

$$\iint_{B(0,R)} \partial_x f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} R\cos(\theta)F(R,\theta)\mathrm{d}\theta$$

En effectuant *mutatis mutandi* le même raisonnement sur $\iint \partial_y f$, on obtient les formules d'intégration :

$$\iint_{B(0,R)} \partial_x f = \int_0^{2\pi} \cos(\theta) f(R\cos(\theta),R\sin(\theta))R\mathrm{d}\theta$$

$$\iint_{B(0,R)} \partial_y f = \int_0^{2\pi} \sin(\theta) f(R\cos(\theta),R\sin(\theta))R\mathrm{d}\theta$$

□

1.4.3 Équation de Poisson

Ce paragraphe a pour vocation de donner les quelques idées qui président à la résolution de l'équation de Poisson, celle-ci intervenant de façon importante dans le dernier chapitre de ce texte.

On travaille dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$. Donnons nous une fonction bornée à support compact $\rho \in L_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ et cherchons à résoudre dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ l'équation de Poisson associée :

$$\Delta u = \rho, \qquad u \in \mathcal{S}'$$

On dispose d'une *solution élémentaire du laplacien* en dimension 2, $T = \frac{1}{2\pi} \log \sqrt{x^2 + y^2} \in L^1_{\text{loc}}$. Montrons que $\Delta T = \delta_0$ dans $\mathcal{S}'$.

Soit $\phi \in \mathcal{D}$ une fonction test. Nous allons chercher à nous isoler de la singularité. Comme les fonctions T et ϕ sont localement intégrables,

$$\begin{aligned}\langle \Delta T, \phi \rangle &= \langle T, \Delta \phi \rangle \\ &= \lim_{\epsilon \to 0} \iint_{r \geq \epsilon} \log \sqrt{x^2 + y^2} \Delta \phi(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y\end{aligned}$$

Pour plus ce clarté, nous noterons $(x, y) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = re^{i\theta} \in \mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$. Soit $R > \epsilon$ avec $\operatorname{supp}(\phi) \subset B(0, R)$. Effectuons une intégration par parties sur la couronne $C(\epsilon, R)$.

$$\begin{aligned}\iint_{r \geq \epsilon} \log \sqrt{x^2 + y^2} \partial_x^2 \phi(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y &= -\int_0^{2\pi} \cos(\theta) \epsilon \log(\epsilon) (\partial_x \phi)(\epsilon e^{i\theta}) \mathrm{d}\theta \\ &\quad - \iint_{r \geq \epsilon} \partial_x \phi(x, y) \partial_x \left(\log \sqrt{x^2 + y^2} \right) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \\ &= - \iint_{r \geq \epsilon} \partial_x \phi(x, y) \frac{x}{x^2 + y^2} \mathrm{d}x \mathrm{d}y + o(1)\end{aligned}$$

Une nouvelle intégration par parties fournit :

$$\begin{aligned}\iint_{r \geq \epsilon} \log \sqrt{x^2 + y^2} \partial_x^2 \phi(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y &= \int_0^{2\pi} \epsilon \cos(\theta) \phi(\epsilon e^{i\theta}) \frac{\epsilon \cos(\theta)}{\epsilon^2} \mathrm{d}\theta \\ &\quad + \iint_{r \geq \epsilon} \phi(x, y) \partial_x \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) \mathrm{d}x \mathrm{d}y + o(1)\end{aligned}$$

La continuité de $\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ assure la convergence uniforme $\phi(\epsilon e^{i\theta}) \longrightarrow \phi(0)$. L'application de ceci à l'intégrale sur le cercle $r = \epsilon$ donne à son tour

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) \phi(\epsilon e^{i\theta}) \mathrm{d}\theta \underset{\epsilon \to 0}{\longrightarrow} \phi(0) \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) \mathrm{d}\theta = \pi \phi(0)$$

En effectuant les mêmes manipulations sur $\iint \partial_y^2 \phi(x, y) \log \sqrt{x^2 + y^2} \mathrm{d}x \mathrm{d}y$, on obtient :

$$\begin{aligned}\iint_{r \geq \epsilon} \log \sqrt{x^2 + y^2} \Delta \phi(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y &= \iint_{r \geq \epsilon} \phi(x, y) \Delta \left(\log \sqrt{x^2 + y^2} \right) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \\ &\quad + 2\pi \phi(0) + o(1)\end{aligned}$$

Or, pour $(x,y) \neq 0$,

$$\begin{aligned}\Delta\left(\log\sqrt{x^2+y^2}\right) &= \partial_x^2\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)+\partial_y^2\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)\\ &= \frac{y^2-x^2}{x^2+y^2}+\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\equiv 0\end{aligned}$$

Tout ceci assure bien que $\Delta T = \delta_0$ dans $\mathcal{D}' \subset \mathcal{S}'$. Nous pouvons donner une solution à l'équation de Poisson sous la forme du produit de convolution [3] $u = T * \rho$. En effet, en dérivant dans $\mathcal{S}'$,

$$\Delta(T*\rho) = \Delta T * \rho = \delta_0 * \rho = \rho$$

La solution obtenue est bien une distribution tempérée puisqu'à croissance "lente". Si $R > 0$ est tel que $\mathrm{supp}(\rho) \subset B(0,R)$ et si $|x| \longrightarrow +\infty$,

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int \rho(y)\log|x-y|\mathrm{d}y\right| \leq \pi R^2\frac{1}{2\pi}\|\rho\|_{L^\infty}\log(|x|+R) = O(\log(|x|))$$

Étudions l'unicité de la solution obtenue. On cherche pour cela à déterminer le noyau de l'opérateur laplacien $\Delta : \mathcal{S}' \longrightarrow \mathcal{S}'$. Soit $u \in \mathcal{S}'$ telle que $\Delta u = 0$. Alors, la transformée de Fourier de cette relation donne

$$\widehat{\Delta u} = \widehat{\partial_x^2 u} + \widehat{\partial_y^2 u} = -4\pi^2|y|^2\hat{u}$$

Le support de $\hat{u}$ vérifie donc $\mathrm{supp}(\hat{u}) \subset \{0\}$ et $\hat{u}$ est un combinaison linéaire des dérivées de la masse de Dirac $\delta_0^{(\alpha)}$ $(\alpha \in \mathbb{N}^2)$.

$$\hat{u} = \sum_\alpha b_\alpha \delta_0^{(\alpha)}$$

La distribution u est donc un polynôme harmonique à deux variables.

Théorème 1.8 (Equation de Poisson). *Si $\rho \in L_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, l'équation de Poisson bidimensionnelle admet une infinité de solutions dans $\mathcal{S}'$ toutes localement intégrables. Il n'existe en revanche (à une constante additive près) qu'une seule solution u telle que, pour une certaine constante $C > 0$,*

$$|u(x)| \leq C\log|x| \qquad \textit{pour } |x| \textit{assez grand.}$$

Cette solution est donnée par le produit de convolution $u = \frac{1}{2\pi}\log|y| * \rho$.

1.4.4 Calcul Différentiel

Lemme 1.9 (de Poincaré). *On considère une fonction g de classe C^1 définie sur $\mathbb{R}^n$ entier [4] telle que*

$$\forall i,j, \quad \partial_i g_j = \partial_j g_i$$

3. Ce produit de convolution est bien défini puisqu'il s'agit de la convolution d'une fonction à support compact ρ avec une autre distribution.

4. Le théorème est vrai pour des fonctions définies sur des ouverts simplement connexes, mais nous n'aurons pas besoin considérer des ouverts autres que $\mathbb{R}^n$.

Alors il existe une fonction f (unique à une constante additive près) de classe C^2 telle que $g = \nabla f$.

Démonstration. Un physicien écrirait :

$$f(x) - f(0) = \int \mathrm{d}f = \int \nabla f \cdot \mathrm{d}x = \sum_i \int_0^1 \partial_i f(tx) x_i \mathrm{d}t$$

On pose, pour $x \in \mathbb{R}^n$,

$$f(x) = \sum_i \int_0^1 g_i(tx) x_i \mathrm{d}t$$

et on vérifie que l'on a bien $\partial_j f = g_j$ pour chaque j.

Pour montrer l'unicité de f, on considère un autre fonction $\tilde{f}$ telle que $g = \nabla \tilde{f}$. Alors $\nabla(f - \tilde{f}) = 0$, d'où la constance de $f - \tilde{f}$. □

Chapitre 2

Intégrales Singulières

L'essentiel de la matière présentée dans ce chapitre est tirée du livre [4] de E.M. Stein qui fait du théorème de Calderòn-Zygmund l'objet de ses deux premiers chapitres.

2.1 Introduction

Introduisons notre propos par quelques calculs formels. Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue à support compact et $g \in L^1$ définie par

$$g(x) = \log|x| \quad \text{pour } x \neq 0,$$

on considère le produit de convolution

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} \log|y| f(x-y) \mathrm{d}y$$

On peut s'interroger quant à la régularité de ce produit de convolution. En dérivant formellement on obtient

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x-y)}{y} \mathrm{d}y$$

Evidemment, cette intégrale n'a aucun sens, que cela soit du point de vue de Riemann ou de Lebesgue, puisque $1/y$ n'est pas intégrable. Pourtant, si le produit de convolution $f * g$ était dérivable, cette intégrale serait le sens que l'on voudrait lui donner.

Une bonne idée est de regarder cette intégrale en se servant de la valeur principale de $1/y$. Si cette fois-ci f est de classe C^1, $f * g$ est une fonction C^1 et

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f * g)(x) &= f' * g(x) \\
&= \langle \log|y|, f'(x - .) \rangle \\
&= \left\langle \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} \log|y|, f(x - .) \right\rangle \\
&= \langle \text{v.p.}(1/y), f(x - .) \rangle \\
&= \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{|y| \geq \epsilon} \frac{f(x-y)}{y} \mathrm{d}y
\end{aligned}$$

Ce qui fait fonctionner les choses est la symétrie que $1/y$ présente autour de 0, nous autorisant à prendre la valeur principale de l'intégrale *et* le fait que la singularité du noyau est en $1/y^{\dim(\mathbb{R})}$ le rendant presque intégrable.

Cette intégrale est en fait connue comme étant la transformée de Hilbert $Hf(x) = \frac{1}{\pi}\int \frac{f(x-y)}{y}\mathrm{d}y$ de la fonction f et constitue l'exemple introductif de l'article original [2] de Calderòn et Zygmund. Les auteurs disposaient déjà d'une inégalité de continuité sur cette transformation, l'inégalité de Riesz (voir le chapitre 16 de [6])

$$\|Hf\|_{L^p} \leq C(p)\|f\|_{L^p}$$

et l'objectif de leur article était de généraliser la discussion à des fonctions de plusieurs variables réelles.

Comme peut le suggérer la démarche exposée ci-dessus, l'intégrale singulière sera construite comme une suite d'intégrales tronquées, définissant ainsi une suite d'opérateurs dont nous devrons montrer la convergence.

Si K est un noyau [1] affecté d'un singularité de type $\frac{1}{|x|^n}$ et jouissant de certaines propriétés "de moyenne" que nous préciserons par la suite, on se munit de $\epsilon > 0$ appelé à tendre vers 0 et on pose [2] $K_\epsilon = K\mathbb{1}_\epsilon$. Nous allons d'abord porter notre attention sur l'opérateur $f \longmapsto K_\epsilon * f$. C'est à lui que s'adresse le théorème qui fait l'objet de la section suivante.

2.2 Un Premier théorème

Le théorème ci-dessous est (répétons-le) un résultat intermédiaire qui intervient dans la mise au point des intégrales singulières. Il est destiné aux noyaux dont la singularité $K(x,y) = O\left(\frac{1}{|x-y|^n}\right)$ a été "tronquée", en gardant $|x-y| \geq \epsilon$ par exemple.

Théorème 2.1. *On considère $K : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction C^1 bornée [3] sur $\{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n | x \neq y\}$ vérifiant, pour une certaine constante $B > 0$:*

1. *Si $x \neq y$,*

$$|K(x,y)| \leq \frac{B}{|x-y|^n}$$

2. *Si $x \neq y$, le gradient $\nabla K(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ de K est majoré par*

$$|\nabla K(x,y)| \leq \frac{B}{|x-y|^{n+1}}$$

En particulier, pour chaque x, $K(x,.)$ est une fonction L^2. On pose, pour $f \in L^2$,

$$Tf(x) = \int K(x,y)f(y)\,dy$$

1. C'est à dire une fonction contre laquelle on effectue des produits de convolution ou contre laquelle on intègre d'autres foncitons.
2. Gardons à l'esprit que nous notons $\mathbb{1}_\epsilon : x \mapsto \mathbb{1}_{|x| \geq \epsilon}$.
3. Supposer nos opérateurs bornés n'est pas un problème puisque le théorème est destiné aux noyaux tronqués.

définissant sur L^2 une application linéaire T à valeurs dans l'ensemble des fonctions mesurables. Supposons en outre T bornée sur L^2 avec $\|T\|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq B$.

Alors, pour chaque $1 < p < +\infty$, T est borné sur L^p et il existe une constante $C > 0$ qui ne dépend que de n et B telle que, si de plus $p \geq 2$,

$$\forall f \in L^p, \quad \|Tf\|_{L^p} \leq pC\|f\|_{L^p}$$

Avant de discuter de la preuve de ce premier énoncé, donnons quelques précisions sur sa conclusion et ses hypothèses. Lorsque l'on dit que T est borné sur L^p, cela signifie que $T : \left(L^2 \cap L^p, \|.\|_{L^p}\right) \longrightarrow L^p$ est une application continue de sorte que [4] T se prolonge en une application continue $T : L^p \longrightarrow L^p$ qui vérifie la majoration donnée par l'énoncé.

Comme nous l'avons déjà dit, ce théorème est destiné à des noyaux qui sont plus réguliers que ceux que nous manipulerons plus tard. En particulier, nous saurons nous débarrasser de l'hypothèse de régularité C^1 ainsi que la majoration de ∇K et dont le seul interêt est d'assurer l'existence des objets. Il n'en est pas de même pour la continuité de T sur L^2 ou pour la majoration $K(x,y) \leq \frac{B}{|x-y|^n}$ qui sont fondamentales.

La démonstrations que nous exhiberons utilise le théorème d'interpolation de Marcinkiewicz qui fournit le résultat pourvu que soit montré une inégalité de "continuité" sur $T : L^1 \longrightarrow L^{1,\infty}$. En cas de besoin, la définition des espaces $L^{p,\infty}$ se trouve au premier chapitre (définition 1.1). Si $1 \leq p \leq +\infty$, on dira que T est *du type faible* sur L^p si

$$\exists C > 0 | \forall f \in L^p, \quad \|Tf\|_{L^{p,\infty}} \leq C\|f\|_{L^p}$$

Bien entendu, il résulte de l'inégalité de Markov (lemme 1.4) que si un opérateur T est borné sur L^p alors T est du type faible sur L^p avec au plus la même constante de continuité.

Énonçons et montrons le théorème de Marcinkiewicz.

Théorème 2.2 (d'interpolation de Marcinkiewicz)**.** *On considère $1 \leq r < q < +\infty$ et T une application linéaire du type faible sur L^r et L^q : il existe une constante $C > 0$ vérifiant*

$$\forall f, \quad \begin{cases} \|Tf\|_{L^{r,\infty}} \leq C\|f\|_{L^r} & \text{si } f \in L^r \\ \|Tf\|_{L^{q,\infty}} \leq C\|f\|_{L^q} & \text{si } f \in L^q \end{cases}$$

Alors, pour chaque $r < p < q$, T est bornée sur L^p et $\|T\|_{\mathcal{L}(L^p)} \leq C'_p$ où $C'_p > 0$ est une constante ne dépendant que de C, p, r et q qui peut être explicitée :

$$C'_p = \sqrt[p]{Cp2^q\left(\frac{1}{p-r} + \frac{1}{q-p}\right)}$$

4. En utilisant la complétude de L^p et le théorème de prolongement des applications uniformément continues.

Démonstration. Montrons tout d'abord que T est bien défini sur L^p. La linéarité de T permet de définir T sur $L^r + L^q$. Assurons nous que $L^p \subset L^r + L^q$. On se munit pour cela de $f \in L^p$ et de $\alpha > 0$. Écrivons

$$f = f_1 + f_2 = f\mathbb{1}_{|f|>\alpha} + f\mathbb{1}_{|f|\leq\alpha}$$

Alors,

$$\int |f_1|^r = \int |f_1|^p |f_1|^{r-p} \leq \alpha^{r-p} \int |f_1|^p \leq \alpha^{r-p} \int |f|^p < +\infty$$

$$\int |f_2|^q = \int |f_1|^p |f_1|^{q-p} \leq \alpha^{r-q} \int |f_1|^p \leq \alpha^{q-p} \int |f|^p < +\infty$$

Ceci assure que $f \in L^r + L^q$.

On prend encore $f \in L^p$. On peut écrire (dans $\bar{\mathbb{R}}_+$)

$$\|Tf\|_{L^p}^p = p \int_0^{+\infty} \alpha^{p-1} \mathrm{mes}\{|Tf| > \alpha\} \mathrm{d}\alpha$$

C'est en effet une conséquence du théorème de Fubini-Tonelli [5] :

$$\begin{aligned} p \int_0^{+\infty} \alpha^{p-1} \mathrm{mes}\{|Tf| > \alpha\} \mathrm{d}\alpha &= \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} p\alpha^{p-1} \mathbb{1}_{|Tf|>\alpha}(x) \mathrm{d}x \mathrm{d}\alpha \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^{+\infty} p\alpha^{p-1} \mathbb{1}_{|Tf|>\alpha}(x) \mathrm{d}\alpha \mathrm{d}x \\ &= \int |Tf|^p \end{aligned}$$

Il s'agit donc de majorer $\mathrm{mes}\{|Tf| > \alpha\}$. Pour chaque $\alpha > 0$, posons encore $f = f_{1\alpha} + f_{2\alpha} = f\mathbb{1}_{|f|>\alpha} + f\mathbb{1}_{|f|\leq\alpha}$.

$$\begin{aligned} \mathrm{mes}\{|Tf| > 2\alpha\} &\leq \mathrm{mes}\{|Tf_{1\alpha}| > \alpha\} + \mathrm{mes}\{|Tf_{2\alpha}| > \alpha\} \\ &\leq C \left[\frac{1}{\alpha^r} \|f\|_{L^r}^r + \frac{1}{\alpha^q} \|f\|_{L^q}^q \right] \end{aligned}$$

Tout ceci nous permet d'écrire (toujours dans $\bar{\mathbb{R}}_+$)

$$\begin{aligned} \|Tf\|_{L^p}^p &\leq p \int_0^{+\infty} \alpha^{p-1} \mathrm{mes}\left\{|Tf_{1\alpha}| > \frac{\alpha}{2}\right\} \mathrm{d}\alpha + p \int_0^{+\infty} \alpha^{p-1} \mathrm{mes}\left\{|Tf_{2\alpha}| > \frac{\alpha}{2}\right\} \mathrm{d}\alpha \\ &\leq Cp \left[\int_0^{+\infty} \alpha^{p-1} \left[\left(\frac{2}{\alpha}\right)^r \|f_{1\alpha}\|_{L^r}^r \right] \mathrm{d}\alpha + \int_0^{+\infty} \alpha^{p-1} \left[\left(\frac{2}{\alpha}\right)^q \|f_{1\alpha}\|_{L^q}^q \right] \mathrm{d}\alpha \right] \\ &\leq 2^q Cp \left[\int_0^{+\infty} \alpha^{p-1-r} \|f_{1\alpha}\|_{L^r}^r \mathrm{d}\alpha + \int_0^{+\infty} \alpha^{p-1-q} \|f_{1\alpha}\|_{L^q}^q \mathrm{d}\alpha \right] \end{aligned}$$

5. Qui assure que toutes les fonctions considérées sont mesurables et positives.

Utilisons à nouveau le théorème de Fubini-Tonelli pour conclure.

$$\begin{aligned}\|Tf\|_{L^p}^p &\leq 2^q Cp \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^{+\infty} |f(x)|^r \mathbb{1}_{|f|>\alpha}(x) \alpha^{p-1-r} \mathrm{d}\alpha \mathrm{d}x \\ &\quad + 2^q Cp \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^{+\infty} |f(x)|^q \mathbb{1}_{|f|>\alpha}(x) \alpha^{p-1-q} \mathrm{d}\alpha \mathrm{d}x \\ &\leq \frac{2^q Cp}{p-r} \int |f|^r |f|^{p-r} + \frac{2^q Cp}{q-p} \int |f|^q |f|^{p-q} \\ &\leq Cp 2^q \left(\frac{1}{p-r} + \frac{1}{q-p} \right) \|f\|_{L^p}^p < +\infty\end{aligned}$$

Nous avons atteint notre objectif avec une valeur de C'_p qui est :

$$C'_p = \sqrt[p]{Cp 2^q \left(\frac{1}{p-r} + \frac{1}{q-p} \right)}$$

□

Supposons montré que T soit du type faible sur L^1 avec une constante associée C qui ne dépend que de n et B et rappelons que T est borné sur L^2.

Le théorème de Marcinkiewicz assure que T est borné sur L^p pour $1 < p \leq 2$. Il nous reste à montrer le théorème pour $2 < p < +\infty$ et vérifier que, pour un tel p, $\|T\|_{L^p} = O(p)$.

Soit $p > 2$ et soit $q < 2$ l'exposant conjugué[6] de p. D'après ce qui précède, T est borné sur L^q puisque $1 < q < 2$. Exploitons la relation de dualité existant entre L^p et L^q (sous la forme du lemme 1.2) pour montrer que T est aussi borné sur L^p.

Pour $f \in L^p \cap L^2$,

$$\|Tf\|_{L^p} = \sup_{\|g\|_{L^q} \leq 1} |\langle Tf, g \rangle| \in \bar{\mathbb{R}}_+$$

où la borne supérieure est prise sur les fonctions continues à support compact[7]. Alors,

$$\begin{aligned}\|Tf\|_{L^p} &= \sup_{\|g\|_{L^q} \leq 1} \left| \iint K(x,y) f(y) g(x) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \right| \\ &= \sup_{\|g\|_{L^q} \leq 1} \left| \left\langle f, y \longmapsto \int K(x,y) g(x) \mathrm{d}x \right\rangle \right|\end{aligned}$$

Vérifions que le noyau $\tilde{K} : (x,y) \longmapsto K(y,x)$ vérifie aussi les hypothèses du théorème. En raison de la symétrie en x et y des hypothèses *1.* et *2.*, il suffit de vérifier que l'opérateur $\tilde{T}$ défini pour $f \in L^2$ par

$$\tilde{T} f(y) = \int K(x,y) g(x) \mathrm{d}x$$

6. p et q sont dits exposants conjugués s'ils vérifient $1/p + 1/q = 1$.

7. Avec un tel choix de g, le crochet de dualité $\langle Tf, g \rangle$ est toujours bien défini, même si la borne supérieure peut être infinie. Prendre g si régulière ne constitue pas un problème puisque l'espace des fonctions continues à supports compacts est dense dans L^q si $q < +\infty$.

est un opérateur borné sur L^2. On raisonne encore par dualité :

$$\begin{aligned}\|\tilde{T}f\|_{L^2} &= \sup_{\|h\|_{L^2}\leq 1}\left|\int \tilde{T}f\cdot h\right| = \sup_{\|h\|_{L^2}\leq 1}\left|\iint K(x,y)f(x)h(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \\ &\leq \sup_{\|h\|_{L^2}\leq 1}\left|\int Th\cdot f\right| \leq \|Th\|_{L^2}\|f\|_{L^2} \leq \|T\|_{\mathcal{L}(L^2)}\|f\|_{L^2}\end{aligned}$$

Compte tenu de ce qui précède (comme $1 < q \leq 2$), $\tilde{T}$ est un opérateur borné sur L^q. De plus, la norme de $\tilde{T}$ est majorée par :

$$\|\tilde{T}\|_{\mathcal{L}(L^q)} \leq C'(q) = \sqrt[q]{4Cq\left(\frac{1}{q-1}+\frac{1}{2-q}\right)}$$

où $C = \max\{\|T\|_{\mathcal{L}(L^2)}, C_1\}$. Alors, comme $\|g\|_{L^q} \leq 1$,

$$|\langle Tf, g\rangle| \leq C'(q)\|f\|_{L^p}$$

Pour mettre fin à la preuve, il nous faut prouver la majoration $C'(q) = O(p)$ pour $p \geq 2$. Nous allons développer $C'(q)$ pour p suffisamment grand en nous souvenant que $q = \frac{p}{p-1}$.

On obtient, comme $q = 1 + O\left(\frac{1}{p}\right)$ pour[8] $p \geq 2$,

$$\begin{aligned}C'(q) &= \left[4C\frac{p}{p-1}\left(\frac{1}{\frac{p}{p-1}-1}+\frac{1}{2-\frac{p}{p-1}}\right)\right]^{\frac{p}{p-1}} \\ &\underset{p\geq 2}{=} \left[4C\left(1+O\left(\frac{1}{p}\right)\right)\left(p+O(1)\ +\ 1+O\left(\frac{1}{p}\right)\right)\right]^{1+O\left(\frac{1}{p}\right)} \\ &\underset{p\geq 2}{=} 4C\exp\left[\left(1+O\left(\frac{1}{p}\right)\right)\log\left(p+O(1)\right)\right] \\ &\underset{p\geq 2}{=} 4C\exp\left[\log(p)+O(1)\right] \\ &\underset{p\geq 2}{=} O(Cp)\end{aligned}$$

Les constantes dans les O étant des constantes numériques[9], ceci démontre le théorème.

Reste à prouver que T est du type faible sur L^1. Nous utilisons le lemme de recouvrement suivant qui permet de décomposer Tf en une somme de deux fonctions que l'on majorera séparément.

Lemme 2.3 (de recouvrement). *Soit $u \in L^1$ et $\alpha > 0$. Il existe $v, w_1, w_2, ..., \in L^1$ et $Q_1, Q_2, ...$ des pavés de $\mathbb{R}^n$ d'intérieurs disjoints tels que*

8. Signalons l'emploi abusif mais bien pratique que nous faisons de la notation $O(.)$. Ici, $f(x) = O(g(x))$ pour $x \geq a$ signifie exactement qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $|f(x)| \leq C|g(x)|$ pour $x \geq a$.

9. Nous nommons *constantes numériques* des constantes qui ne dépendent de rien et auxquelles il serait possible de donner une valeur (numérique) si l'envie nous en prenait.

1. $u = v+\sum_k w_k$ *où la somme est prise au sens de la convergence ponctuelle.*
2. $\|v\|_{L^1} + \sum_k \|w_k\|_{L^1} \leq 3\|u\|_{L^1}$
3. *Les* w_k *sont de moyennes nulles et à supports dans les* Q_k *: pour chaque* $k \geq 1$
$$\int w_k = 0 \quad et \quad supp(w_k) \subset Q_k$$
4. $\|v\|_{L^\infty} \leq 2^n\alpha$
5. $\sum_k mes(Q_k) \leq \frac{1}{\alpha}\|u\|_{L^1}$

Démonstration. Divisons $\mathbb{R}^n$ en un réseau de “cubes” identiques suffisamment grands pour que, si Q est l'un de ces cubes,
$$\text{mes}(Q) \geq \frac{1}{\alpha}\|u\|_{L^1}$$
Alors, en particulier, la moyenne de $|u|$ sur Q vérifie
$$\frac{1}{\text{mes}(Q)}\int_Q |u| \leq \alpha$$
Divisons Q en 2^n cubes identiques : si Q s'écrit comme produit cartésien de segments $Q = \prod_{1\leq i\leq n} I_j$, on considère les pavés s'écrivant comme produits cartésiens de moitiés des I_j. Portons d'abord notre attention sur les cubes R composant Q tels que
$$\frac{1}{\text{mes}(R)}\int_R |u| \geq \alpha$$
Comme $R \subset Q$, et que $\text{mes}(R) = \text{mes}(Q)/2^n$,
$$\int_R |u| \leq \int_Q |u| \leq \alpha\text{mes}(Q) = \alpha 2^n \text{mes}(R)$$
Ceci nous permet d'écrire l'encadrement suivant :
$$\alpha \leq \frac{1}{\text{mes}(R)}\int_R |u| \leq \alpha 2^n$$
Définissons $v_R, w_R : R \longrightarrow \mathbb{R}$ par
$$\forall x \in R, \quad \begin{cases} v_R(x) = \frac{1}{\text{mes}(R)}\int_R u \\ w_R(x) = u(x) - v_R(x) \end{cases}$$
On prolonge encore w_R sur $\mathbb{R}^n$ en posant $w_R(x) = 0$ pour $x \notin R$.

Pour les cubes Q' composant Q qui ne sont pas du type R, on recommence la construction précédente avec $Q' \to Q$. C'est possible puisque Q et Q' jouissent des mêmes propriétés :
$$\frac{1}{\text{mes}(Q')}\int_{Q'} |u| < \alpha$$
On obtient, par itération de ce procédé, une quantité *dénombrable* de cubes $Q_1, Q_2, ...$ de type R. On pose $v(x) = v_R(x)$ si x est dans un cube de type R et $v(x) = u(x)$ dans le cas contraire.

Nous avons construit des fonctions $v, w_1 = w_{Q_1}, w_2 = w_{Q_2}, ...$ dont la somme est u. Montrons que ces fonctions ont les propriétés que nous souhaitons qu'elles aient.

Propriété 2.

$$\|v\|_{L^1} + \sum_{k\geq 1} \|w_k\|_{L^1} = \|v\mathbb{1}_{\bigcap_k {}^c Q_k}\|_{L^1} + \sum_k [\|v\mathbb{1}_{Q_k}\|_{L^1} + \|w_k\|_{L^1}]$$

Majorons chaque terme.

$$\|v\mathbb{1}_{Q_k}\|_{L^1} = \int_{Q_k} \left| \frac{1}{\mathrm{mes}(Q_k)} \int_{Q_k} u \right| \mathrm{d}x \leq \int_{Q_k} |u|$$

Cette première majoration fournit

$$\|v\|_{L^1} \leq \|u\|_{L^1}$$

Ensuite, comme $w_k = u_k - v_k$ sur chaque Q_k, $\|w_k\|_{L^1} \leq 2\|u\mathbb{1}_{Q_k}\|_{L^1}$ et

$$\|v\|_{L^1} + \sum_{k\geq 1} \|w_k\|_{L^1} \leq 3\|u\|_{L^1}$$

Propriété 4. Bien entendu, pour chaque k, $Q_k \subset \{|v| \leq 2^n\alpha\}$. On considère x qui n'est élément d'aucun des Q_k. Comme $v(x) = u(x)$, il s'agit de montrer que

$$|u| \leq 2^n\alpha \quad \text{mes-presque partout sur } \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{k\geq 1} Q_k$$

Comme x n'est élément d'aucun cube Q_k, x est dans l'intersection d'une suite décroissante de pavés qui ne sont pas du type R : $x \in \bigcap_j S_j$. Ainsi,

$$\forall j \geq 1, \quad \left| \frac{1}{\mathrm{mes}(S_j)} \int_{S_j} u \right| \leq \alpha$$

Le *théorème de différentiation de Lebesgue* que nous donnons et démontrons ci-dessous permet de conclure que, sauf pour une quantité négligeable de points x,

$$u(x) = \lim_{j\to+\infty} \left| \frac{1}{\mathrm{mes}(S_j)} \int_{S_j} u \right| \leq \alpha$$

Propriété 5. Pour chaque k,

$$\alpha \mathrm{mes}(R) \leq \int_{Q_k} |u|$$

Comme les cubes de type Q_k sont d'intérieurs disjoints,

$$\sum_{k\geq 1} \mathrm{mes}(Q_k) \leq \sum_{k\geq 1} \frac{1}{\alpha} \int_{Q_k} |u| \leq \frac{1}{\alpha} \int_{\bigcup_k Q_k} |u| \leq \frac{1}{\alpha} \int |u|$$

$\square$

Nous nous sommes servi du théorème suivant :

Théorème 2.4 (de différentiation de Lebesgue). *Soit $f \in L^1$. On a*

$$f(x) = \lim_{diam(Q)\to 0} \frac{1}{mes(Q)} \int_Q f \quad \textit{pour presque tout } x \in \mathbb{R}^n$$

où la limite est prise sur les pavés Q contenant x en leur intérieur.

Démonstration. On définit Mf, la fonction maximale de Lebesgue associée à f, par la relation suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad Mf(x) = \sup_{x\in \mathrm{Int}(Q)} \frac{1}{\mathrm{mes}(Q)} \int_Q |f|$$

Lemme 2.5. *Si $f \in L^1$ alors $Mf \in L^{1,\infty}$.*

Démonstration du lemme. Si $\alpha > 0$, $\{Mf > \alpha\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. En effet, si $Mf(x) > \alpha$ pour $x \in \mathbb{R}^n$, il existe un carré Q contenant x en son intérieur avec

$$\frac{1}{\mathrm{mes}(Q)} \int_Q |f| > \alpha$$

Par définition de Mf, si $y \in \mathrm{Int}(Q)$, alors $Mf(y) > \alpha$, d'où le caractère ouvert de $\{Mf > \alpha\}$.

Si nous notons $\mathcal{K}$ l'ensemble des compacts de $\mathbb{R}^n$, comme $\{Mf > \alpha\}$ est un ouvert, nous pouvons écrire

$$\mathrm{mes}\{Mf > \alpha\} = \sup_{K\in\mathcal{K}, K\subset\{Mf>\alpha\}} \mathrm{mes}(K)$$

C'est donc les $\mathrm{mes}(K)$ que nous allons essayer de majorer. On se donne $K \in \mathcal{K}$ avec $K \subset \{Mf > \alpha\}$. Comme K est compact, le critère de Borel-Lebesgue nous permet de recouvrir K par un nombre fini de cubes

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{N} Q_i$$

tels que, pour chaque i,

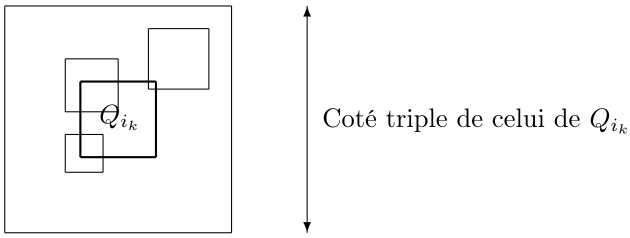
$$\frac{1}{\mathrm{mes}(Q_i)} \int_{Q_i} |f| > \alpha \qquad \textit{id est} \quad \mathrm{mes}(Q_i) < \frac{1}{\alpha} \int_{Q_i} |f|$$

Nous sommes donc amenés à majorer $\sum_i \int_{Q_i} |f|$. Pour ce faire, nous allons nous ramener à des cubes Q_i disjoints en extrayant des Q_i les cubes dont la contributions sera la plus significative.

Prenons comme premier élément extrait le cube de plus grande mesure Q_{i_1} et supprimons le de la liste des Q_i ainsi que tous les cubes Q_i qui le touchent. On recommence en prenant comme deuxième élément extrait le cube Q_{i_2} de plus grande mesure parmi ceux qui restent. On construit, en itérant ce procédé, une famille de cubes Q_{i_k} disjoints ne recouvrant *pas* K mais vérifiant

$$\mathrm{mes}(K) \leq 3^n \sum_k \mathrm{mes}(Q_{i_k})$$

Cette inégalité reflète le fait qu'à chaque étape k a été supprimé de la liste des Q_i le cube Q_{i_k} et des cubes plus petits au plus adjacents à Q_{i_k}. Le volume supprimé est donc au plus $3^n \mathrm{mes}(Q_{i_k})$.



Alors,

$$\mathrm{mes}(K) \leq 3^n \sum_k \mathrm{mes}(Q_{i_k}) \leq \frac{3^n}{\alpha} \sum_k \int_{Q_{i_k}} |f| \leq \frac{3^n}{\alpha} \|f\|_{L^1}$$

ce qui montre que $Mf \in L^{1,\infty}$. $\square$

Terminons la preuve du théorème de Lebesgue.

Pour chaque $k \geq 1$, on peut fixer une fonction régulière $g_k \in \mathcal{D}$ avec $\|f - g\|_{L^1} \leq \frac{1}{2^k}$. Les fonctions g_k étant uniformément continues [10], on peut fixer des constantes $\delta_k > 0$ avec

$$\left| g_k(x) - \frac{1}{\mathrm{mes}(Q)} \int_Q g_k \right| \leq \frac{1}{k} \qquad \text{si } x \in Q, \quad \mathrm{diam}(Q) \leq \delta_k \quad \text{et} \quad \mathrm{mes}(Q) > 0$$

On considère $x \in Q$ avec $\left| f(x) - \frac{1}{\mathrm{mes}(Q)} \int_Q f \right| > \frac{3}{k}$. Alors

$$\begin{cases} \text{ou bien} & |f(x) - g_k(x)| > \frac{1}{k} \\ \text{ou bien} & \left| \frac{1}{\mathrm{mes}(Q)} \int_Q (f - g_k) \right| > \frac{1}{k} \end{cases}$$

Pour un tel x, l'inégalité triangulaire donne

$$\begin{cases} \text{ou bien} \quad |f(x) - g_k(x)| > \frac{1}{k} & \text{et on note } A_k = \left\{ |f - g_k| > \frac{1}{k} \right\} \\ \text{ou bien} \quad M(f - g_k)(x) > \frac{1}{k} & \text{et on note } B_k = \left\{ M(f - g_k) > \frac{1}{k} \right\} \end{cases}$$

L'ensemble des x pour lesquels il n'y a pas convergence de $\frac{1}{\mathrm{mes}(Q)} \int_Q f$ est donc un sous-ensemble de

$$\limsup_{k \geq 1} (A_k \cup B_k) = \bigcap_{i \geq 0} \bigcup_{j \geq i} (A_j \cap B_j)$$

Or,

$$\begin{aligned} \mathrm{mes}(A_k \cup B_k) &\leq \mathrm{mes} \left\{ |f - g_k| > \frac{1}{k} \right\} + \mathrm{mes} \left\{ M(f - g_k) > \frac{1}{k} \right\} \\ &\leq k \|f - g_k\|_{L^1} + k \|M(f - g_k)\|_{L^{1,\infty}} \leq 2 \frac{k}{2^k} \in l^1 \end{aligned}$$

10. En vertu du théorème de Heine.

Le (premier) lemme de Borel-Cantelli (lemme 1.5) assure que $\limsup_{k\geq 1}(A_k \cup B_k)$ est une partie négligeable de $\mathbb{R}^n$, ce qui termine la preuve. □

Nous sommes maintenant en mesure de clore la preuve du théorème 2.1. On se donne $f \in L^1$. Montrons que $Tf \in L^{1,\infty}$. Il s'agit de montrer l'existence d'une constante $C > 0$ qui ne dépend que de n et de B telle que

$$\text{mes}\{|Tf| > \alpha\} \leq \frac{C}{\alpha}\|f\|_{L^1} \quad \text{pour } \alpha > 0$$

Le lemme de recouvrement nous permet de décomposer f en

$$f = v + \sum_k w_k$$

Appliquons T à cette décomposition en nous servant du fait que les w_k sont à support disjoints dans les Q_k. Pour $x \in \mathbb{R}^n$,

$$Tf(x) = Tv(x) + \int K(x,y) \sum_j w_j(y)\mathrm{d}y$$

Le théorème de Fubini permet de permuter les symboles $\sum_j$ et $\int_y$

$$Tf(x) = Tv(x) + \sum_k \int_{Q_k} K(x,y) w_k(y)\mathrm{d}y$$

Ainsi, (toujours au sens de la convergence ponctuelle)

$$Tf = Tv + \sum_k Tw_k$$

L'inégalité de Markov (lemme 1.4) fournit

$$\text{mes}\left\{|Tv| > \frac{\alpha}{2}\right\} \leq \frac{4}{\alpha^2}\|Tv\|_{L^2}^2$$

et

$$\|Tv\|_{L^2}^2 \leq C\int |v|^2 \leq C\|v\|_{L^\infty}\int |v| \leq C\alpha\|v\|_{L^1}$$

La combinaison de ces deux majorations donne

$$\text{mes}\left\{|Tv| > \frac{\alpha}{2}\right\} \leq \frac{4C}{\alpha}\|f\|_{L^1}$$

Il nous reste à nous occuper des Tw_k, ce qui est plus difficile. Comme les w_k sont de moyennes nulles, pour chaque x,

$$\begin{aligned} Tw_k(x) &= \int_{Q_k} K(x,y) w_k(y)\mathrm{d}y \\ &= \int_{Q_k} \left[K(x,y) - K(x,x_k)\right] w_k(y)\mathrm{d}y \end{aligned}$$

où x_k est le centre de Q_k. Munissons nous de $r_k > 0$ tel que $Q_k \subset B(x_k, r_k)$ et de $\tilde{Q}_k$ le plus petit cube contenant $B(x_k, 2r_k)$. On pose $A = \bigcup_k \tilde{Q}_k$. Alors, pour chaque k, $\text{mes}(\tilde{Q}_k) \leq C_n \text{mes}(Q_k)$ où C_n est une constante qui ne dépend que de n et

$$\text{mes}(A) \leq \sum_k \text{mes}(\tilde{(Q)}_k) \leq C_n \sum_k \text{mes}(Q_k) \leq C_n C \frac{\|f\|_{L^1}}{\alpha}$$

Puis, pour chaque k,

$$\begin{aligned}
\int_{{}^c\tilde{Q}_k} |Tw_k| &= \int_{{}^c\tilde{Q}_k} \left| \int_{Q_k} [K(x,y) - K(x,x_k)]\, w_k(y)\mathrm{d}y \right| \mathrm{d}x \\
&\leq \int_{|x-x_k|\geq 2r_k} \int_{|y-x_k|\leq r_k} |[K(x,y) - K(x,x_k)]\, w_k(y)|\, \mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&\leq \int_{|y-x_k|\leq r_k} \int_{|x-x_k|\geq 2r_k} |[K(x,y) - K(x,x_k)]\, w_k(y)|\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

Majorons l'intégrale à l'intérieur (en x) en nous servant de l'inégalité des accroissements finis. On a [11] :

$$\begin{aligned}
|K(x,y) - K(x,x_k)| &= \left| \int_0^1 \frac{\partial K}{\partial y}(x, x_k + t(y-x_k))(y-x_k)\mathrm{d}t \right| \\
&\leq \int_0^1 B \frac{|y-x_k|}{|x - x_k - t(y-x_k)|^{n+1}} \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable $z = x - x_k$, on obtient,

$$\int_{|x-x_k|\geq 2r_k} |K(x,y) - K(x,x_k)|\, \mathrm{d}x \leq \int_{|z|>2r_k} \int_0^1 B \frac{|y-x_k|}{|z - t(y-x_k)|^{n+1}} \mathrm{d}t\mathrm{d}z$$

Comme $|z| \geq 2r_k$, $t|y-x_k| \leq r_k$ et $|z - t(y-x_k)| \geq |z| - r_k$,

$$\int_{|x-x_k|\geq 2r_k} |K(x,y) - K(x,x_k)|\, \mathrm{d}x \leq Br_k \int_{|z|\geq 2r_k} \frac{\mathrm{d}z}{(|z| - r_k)^{n+1}}$$

Et un passage en coordonnées polaires fournit la majoration

$$\begin{aligned}
\int_{|x-x_k|\geq 2r_k} |K(x,y) - K(x,x_k)|\, \mathrm{d}x &\leq C_n B r_k \int_{r_k}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}r}{r} \\
&\leq BC'_n
\end{aligned}$$

Cette dernière constante ne dépend que de B et n.

On déduit de tout cela

$$\int_{{}^c\tilde{Q}_k} |Tw_k| \leq BC'_n \int_{|y-x_k|\leq r_k} |w_k(y)|\mathrm{d}y \leq \|w_k\|_{L^1}$$

Si $w = \sum_k w_k$ alors,

$$\begin{aligned}
\int_{{}^cA} |Tw| = \int_{\bigcap_k {}^c\tilde{Q}_k} |Tw| &\leq \sum_k \int_{{}^c\tilde{Q}_k} |Tw_k| \\
&\leq BC'_n \sum_k \|w_k\|_{L^1} \leq 3BC'_n \|f\|_{L^1}
\end{aligned}$$

---

11. Ici, $\frac{\partial K}{\partial y}(x,y)$ est la différentielle de l'application partielle $b \longmapsto K(x,b)$ évaluée au point (x,y).

Enfin,

$$\begin{aligned}
\operatorname{mes}\left\{|Tw| > \frac{\alpha}{2}\right\} &= \operatorname{mes}\left(\left\{|Tw| > \frac{\alpha}{2}\right\} \cup A\right) + \operatorname{mes}\left(\left\{|Tw| > \frac{\alpha}{2}\right\} \cup {}^cA\right) \\
&\leq \operatorname{mes}(A) + \frac{2}{\alpha}\int_{^cA} |Tw| \\
&\leq (1 + 3BC'_n)\|f\|_{L^1}
\end{aligned}$$

Ceci conclut la preuve du premier théorème.

Terminons cette partie par une remarque sur l'hypothèse *2.* du théorème :

$$|\nabla K(x,y)| \leq \frac{B}{|x-y|^{n+1}}$$

Cette inégalité n'a été utilisée que pour majorer $|K(x,y) - K(x,x_k)|$. Il est donc possible de remplacer cette hypothèse *ainsi que l'hypothèse de régularité* C^1 par la condition plus faible

$$\forall y \neq x_k, \quad \int_{|x-x_k|\geq 2r_k} |K(x,y) - K(x,x_k)| \,\mathrm{d}x \leq B$$

ou, dans le cas d'un noyau de convolution $K(x,y) = K(x-y)$,

$$\forall y \neq 0, \quad \int_{|x|\geq 2y} |K(x-y) - K(x)| \,\mathrm{d}x \leq B$$

2.3 Le Théorème de Calderòn-Zygmund

Énonçons le théorème dans toute sa généralité.

Théorème 2.6 (Calderòn-Zygmund)**.** *Soit* $K : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ *une application mesurable avec, pour une certaine constante* $B > 0$*,*

1. *pour (presque) tout* $x \neq 0$, $|K(x)| \leq \frac{B}{|x|^n}$.
2. *pour (presque) tout* $y \neq 0$,

$$\int_{|x|\geq 2|y|} |K(x-y) - K(x)| \, dx \leq B$$

3. *pour tous* $0 < R_1 < R_2 < +\infty$,

$$\int_{R_1<|x|<R_2} K(x) dx = 0$$

Pour chaque $\epsilon > 0$ et $1 < q < +\infty$, $K_\epsilon(x) = K(x)\mathbb{1}_{|x|\geq\epsilon}$ est[12] *une fonction L^q, ce qui nous autorise à définir*[13]*, si $f \in L^p$ (avec $1 < p < +\infty$) et $x \in \mathbb{R}^n$,*

$$T_\epsilon f(x) = \int_{|y|\geq\epsilon} f(x-y)K(y)dy$$

Alors $T_\epsilon f \in L^p$ et il existe $C(p) > 0$ indépendante de ϵ telle que

$$\forall f \in L^p, \quad \|T_\epsilon f\|_{L^p} \leq C(p)\|f\|_{L^p}$$

De plus, $T_\epsilon f$ admet une limite dans L^p pour $\epsilon \to 0^+$ et l'opérateur limite $T : f \longmapsto Tf = \lim_{\epsilon\to 0} T_\epsilon f$ est borné sur L^p.

Enfin, si en particulier $p \geq 2$,

$$\|T\|_{\mathcal{L}(L^p)} = O\left(p\right)$$

Démontrons ce théorème.

Fixons $\epsilon > 0$ et assurons nous $K_\epsilon \in L^q$. Un passage en coordonnées polaires assure que :

$$\int |K_\epsilon|^q \leq \text{Cte} \int_{r\geq\epsilon} \left(\frac{1}{r^n}\right)^q r^{n-1}\text{d}r < +\infty$$

Montrons que T_ϵ est borné sur L^2 en vue d'appliquer le théorème 2.1 de la première partie. Comme nous avons, cette fois-ci, affaire à des produits de convolution, il convient de travailler sur les transformées de Fourier des K_ϵ.

Lemme 2.7. *La transformée de Fourier $\hat{K}_\epsilon$ de $K_\epsilon \in L^2$ est une fonction (essentiellement) bornée $\hat{K}_\epsilon \in L^\infty$. De plus $\|\hat{K}_\epsilon\|_{L^\infty} \leq CB$ pour une certaine constante C qui ne dépend que de n.*

Ce lemme permet de montrer directement que les T_ϵ sont bornés sur L^2. Comme K_ϵ est une fonction L^2, elle admet une transformée de Fourier dans L^2. Si $f \in \mathcal{D}$, on peut considérer le produit de convolution $K_\epsilon * f \in L^2$ dont la transformée de Fourier est

$$\widehat{K_\epsilon * f} = \hat{f}\hat{K}_\epsilon \in L^2$$

Il s'ensuit $K_\epsilon * f \in L^2$ et

$$\|T_\epsilon f\|_{L^2} = \|K_\epsilon * f\|_{L^2} \leq CB\|f\|_{L^2}$$

d'où, par densité de $\mathcal{D}$ dans L^2, $\|T_\epsilon\|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq CB$.

Remettons la preuve de ce lemme à plus tard et achevons la démonstration du théorème de Calderòn-Zygmund.

12. On rappelle une dernière fois que l'on note $\mathbb{1}_\epsilon : x \longmapsto \mathbb{1}_{|x|\geq 1}$.
13. Grâce à l'inégalité de Hausdorff-Young en prenant q tel que p et q soient exposants conjugués.

Les opérateurs T_ϵ vérifient les hypothèses du premier théorème 2.1 (sauf éventuellement l'hypothèse *2.* à savoir la majoration sur $|\nabla K(x)|$ qui est remplacée par l'hypothèse plus faible *2.* du théorème de Calderòn-Zygmund). On en déduit la majorations des normes d'opérateurs

$$\forall 1 < p < +\infty, \quad \|T_\epsilon\|_{\mathcal{L}(L^p)} \leq C(p)$$

où $C(p)$ ne dépend que de n, B et p et vérifie

$$C(p) \underset{p \geq 2}{=} O\left(p\right)$$

Il nous reste à montrer la convergence dans L^p des $T_\epsilon f$. Fixons $\delta > 0$ et approchons f par une fonction régulière $g \in \mathcal{D}$ telle que $\|f - g\|_{L^p} \leq \delta$. L'hypothèse *3.* du théorème nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} T_\epsilon g(x) &= \int_{|y| \geq \epsilon} K(y) g(x-y) \mathrm{d}y \\ &= \int_{|y| \geq 1} K(y) g(x-y) \mathrm{d}y + \underbrace{\int_{\epsilon \leq |y| \leq 1} K(y) \left[g(x-y) - g(x)\right] \mathrm{d}y}_{:= \phi_\epsilon(x)} \end{aligned}$$

La première intégrale définit une fonction L^p (d'après l'inégalité de Hausdorff-Young) qui ne dépend pas de ϵ. La deuxième intégrale $\phi_\epsilon(x)$ définit une fonction à support compact, puisque convolution de deux fonctions à support compact g et $K(y)\mathbb{1}_{\epsilon \leq |y| \leq 1}$. Soit $M > 0$ tel que $\mathrm{supp}(g) \subset B(0, M)$. Alors,

$$\mathrm{supp}\left(\phi_n\right) \subset B(0, M+1)$$

De plus, la suite de fonctions $T_\epsilon g$ converge uniformément. Appliquons, pour montrer cela, le critère de Cauchy. Si $\epsilon' < \epsilon$ et $\epsilon \longrightarrow 0$, l'inégalité des accroissements finis donne

$$\begin{aligned} |T_\epsilon f(x) - T_{\epsilon'} f(x)| &= |\phi_\epsilon(x) - \phi_{\epsilon'}(x)| \\ &= \left| \int_{\epsilon' \leq |y| \leq \epsilon} K(y) \left[g(x-y) - g(x)\right] \mathrm{d}y \right| \\ &\leq B \int_{\epsilon' \leq |y| \leq \epsilon} \frac{1}{|y|^n} \left\|\nabla g\right\|_{L^\infty} |y| \mathrm{d}y \\ &\leq B \left\|\nabla g\right\|_{L^\infty} \int_{|y| \leq \epsilon} \frac{\mathrm{d}y}{|y|^{n-1}} \underset{\epsilon \to 0}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

La convergence uniforme et la compacité des supports (contenus dans un compact indépendant de ϵ) assure la convergence dans L^p, qui est un espace de Banach, de la suite de fonctions $T_\epsilon g$.

Déduisons de cela la convergence de $T_\epsilon f$ dans L^p en appliquant à nouveau le critère de Cauchy. Pour $\epsilon > \epsilon'$,

$$\begin{aligned} \|T_\epsilon f - T_{\epsilon'} f\|_{L^p} &\leq \|T_\epsilon f - T_\epsilon g\|_{L^p} + \|T_\epsilon g - T_{\epsilon'} g\|_{L^p} + \|T_{\epsilon'} g - T_{\epsilon'} f\|_{L^p} \\ &\leq 2C(p) \|f - g\|_{L^p} + \|T_\epsilon g - T_{\epsilon'} g\|_{L^p} \end{aligned}$$

Donc, pour chaque $\delta > 0$,

$$\limsup_{\epsilon' < \epsilon \to 0} \|T_\epsilon f - T_{\epsilon'} f\|_{L^p} \leq C(p)\delta$$

La complétude de L^p nous permet de définir $Tf = \lim_\epsilon T_\epsilon f$ dans L^p qui vérifie l'inégalité souhaitée. L'opérateur T résultant est donc borné sur L^p.

Afin de rendre l'exposé ci-dessus complet, prouvons le lemme 2.7.

Démonstration du lemme. Étudions d'abord le cas $\epsilon = 1$. Nous reviendrons au cas général en appliquant des dilatations à $K_1 = K_{\epsilon=1}$. Montrons que le noyau K_1 jouit des mêmes propriétés que le noyau K :

1. $|K_1(x)| \leq \frac{B}{|x|^n}$ pour chaque $x \neq 0$.
2. Evidemment, si $0 < R_1 < R_2 < +\infty$,

$$\int_{R_1 \leq |x| \leq R_2} K_1(x) \mathrm{d}x = 0$$

3. Fixons $y \neq 0$ et écrivons

$$\int_{|x| \leq 2|y|} |K(x-y)\mathbb{1}_{|x-y|\geq 1} - K(x)\mathbb{1}_{|x|\geq 1}| \mathrm{d}x = I_1 + I_2 + I_3$$

avec, pour $j \in \{1, 2, 3\}$,

$$I_j = \int_{A_j} |K(x-y)\mathbb{1}_{|x-y|\geq 1} - K(x)\mathbb{1}_{|x|\geq 1}| \mathrm{d}x$$

où

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{x \in \mathbb{R}^n, \quad |x-y| \geq 1, |x| < 1, |x| \leq 2|y|\} \\
A_2 &= \{x \in \mathbb{R}^n, \quad |x-y| < 1, |x| \geq 1, |x| \leq 2|y|\} \\
A_3 &= \{x \in \mathbb{R}^n, \quad |x-y| \geq 1, |x| \geq 1, |x| \leq 2|y|\}
\end{aligned}$$

L'intégrale pour $|x-y| < 1$ et $|x| < 1$ est nulle puisque les indicatrices s'annulent sur ce domaine. Les trois intégrales sont majorées par :

$$|I_1| = \int_{A_1} |K(x-y)| \mathrm{d}x \leq \int_{A_1} \frac{B}{|x-y|^n} \mathrm{d}x \leq B \cdot \mathrm{mes}(B(0,1))$$

$$\begin{aligned}
|I_2| = \int_{A_2} |K(x)| \mathrm{d}x \leq \int_{A_2} \frac{B}{|x|^n} \mathrm{d}x &\leq B \cdot \mathrm{mes}\{x \in \mathbb{R}^n, |x-y| \leq 1\} \\
&= B \cdot \mathrm{mes}(B(0,1))
\end{aligned}$$

$$|I_3| \leq \int_{|x| \leq 2|y|} |K(x-y) - K(x)| \mathrm{d}x \leq B$$

En posant $B' = 3B \cdot \mathrm{mes}(B(0,1)) \geq B$, on a bien,

$$\int_{|x| \leq 2|y|} |K(x-y)\mathbb{1}_{|x-y|\geq 1} - K(x)\mathbb{1}_{|x|\geq 1}| \mathrm{d}x \leq B' \tag{2.1}$$

K_1 satisfait donc aux mêmes conditions que K avec pour constante B' qui ne dépend que de B et n.

Étudions $\hat{K}_1$. Une difficulté se présente : comme K_1 n'est pas intégrable, nous ne disposons pas d'une formule intégrale pour travailler sur $\hat{K}_1$. Il est néanmoins possible de nous y ramener en nous souvenant que

$$K_1 \mathbb{1}_{B(0,R)} \underset{R \to +\infty}{\longrightarrow} K_1 \quad \text{dans } L^2.$$

La transformation de Fourier est une isométrie $L^2 \longrightarrow L^2$ *ergo*

$$\mathcal{F}\left[K_1 \mathbb{1}_{B(0,R)}\right] \underset{R \to +\infty}{\longrightarrow} \hat{K}_1 \quad \text{dans } L^2.$$

L'existence d'une suite extraite $(R_k)_{k \geq 1}$ telle que

$$\mathcal{F}\left[K_1 \mathbb{1}_{B(0,R_k)}\right](y) \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} \hat{K}_1(y) \quad \text{pour presque tout } y \in \mathbb{R}^n$$

assure que si les $\mathcal{F}\left[K_1 \mathbb{1}_{B(0,R)}\right]$ sont uniformément bornés, $\hat{K}_1$ sera (essentiellement) borné par la même constante uniforme. C'est ce que nous nous chargeons de montrer. La discussion qui suit repose sur un découpage judicieux de l'intégrale définissant $\mathcal{F}\left[K_1 \mathbb{1}_{B(0,R)}\right]$ en morceaux séparément majorables.

Fixons $y \neq 0$ et écrivons

$$\mathcal{F}\left[K_1 \mathbb{1}_{B(0,R)}\right](y) = I_1 + \int_{1/|y| < |x| \leq R} K_1(x) \exp\left(-2i\pi x \cdot y\right) \mathrm{d}x = I_1 + I_2$$

avec

$$I_1 = \begin{cases} 0 & \text{si } |y| < 1 \\ \int_{1 \leq |x| \leq 1/|y|} K_1(x) \exp\left(-2i\pi x \cdot y\right) \mathrm{d}x & \text{sinon.} \end{cases}$$

Puisque K_1 vérifie l'hypothèse *2.* du théorème,

$$I_1 = \int_{1 \leq |x| \leq 1/|y|} K_1(x) \left[\exp\left(-2i\pi x \cdot y\right) - 1\right] \mathrm{d}x$$

Ceci nous permet de majorer I_1 en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le fait que $t \longmapsto e^{it}$ est 1-lipschitzienne :

$$|I_1| \leq 2\pi |y| \int_{|x| \leq 1/|y|} |x| |K_1(x)| \mathrm{d}x \leq 2\pi |y| \int_{1 \leq |x| \leq 1/|y|} B' \frac{|x|}{|x|^n} \mathrm{d}x$$

Et, en utilisant les coordonnées polaires,

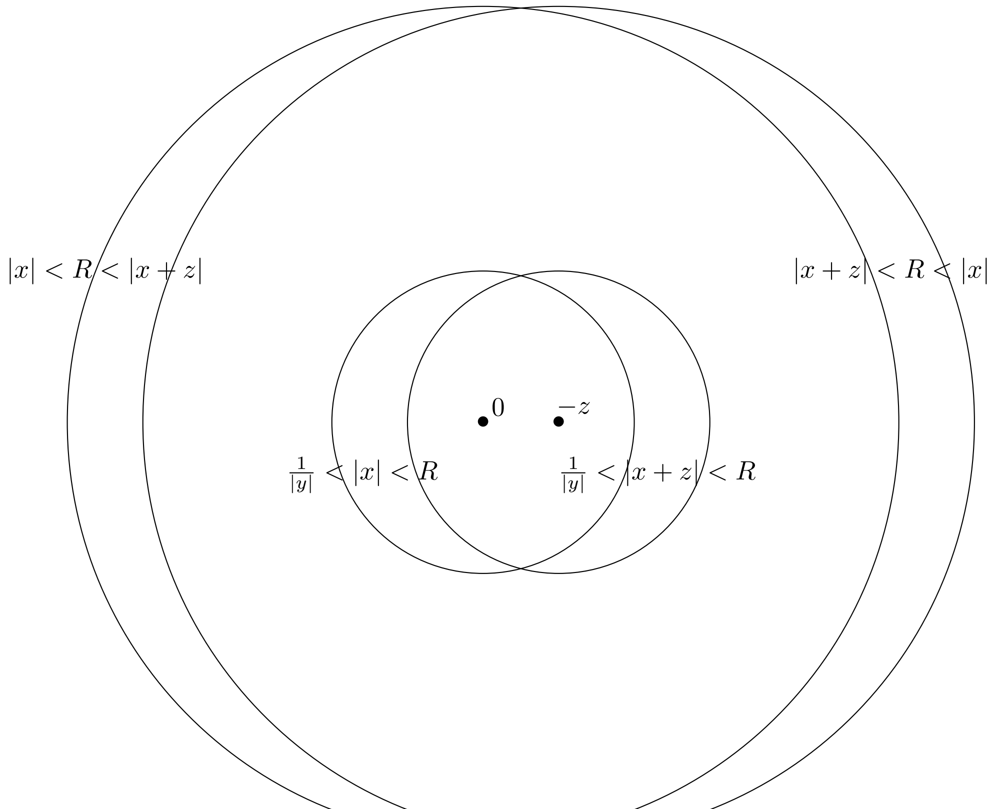
$$|I_1| \leq C_n B' |y| \int_{1 \leq r \leq 1/|y|} \frac{r r^{n-1}}{r^n} \mathrm{d}r \leq C_n B'$$

Nous obtenons donc pour I_1 la majoration $|I_1| \leq B' C_n$, où C_n est une constante qui ne dépend que de n.

Le traitement de I_2 est bien plus délicat. Pour chaque $y \neq 0$, posons $z = z(y) = \frac{y}{2|y|^2}$ de manière à avoir $\exp(-2i\pi y \cdot z(y)) = -1$ et écrivons

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2} I_2 - \frac{1}{2} \int_{1/|y|<|x|\leq R} K_1(x) e^{-2i\pi x\cdot y} e^{-2i\pi z\cdot y} \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2} \int_{1/|y|<|x|\leq R} K_1(x) e^{-2i\pi x\cdot y} \mathrm{d}x - \frac{1}{2} \int_{1/|y|<|x+z|\leq R} K_1(x-z) e^{-2i\pi x\cdot y} \mathrm{d}x \end{aligned}$$

Cherchons à regrouper ces deux intégrales afin de faire apparaître la différence $K_1(x) - K_1(x-z)$ comme dans (2.1). Il faut donc transformer le dernier terme en une intégrale portant sur $\left\{x \in \mathbb{R}^n | \frac{1}{|y|} < |x| \leq R\right\}$. Comparons pour ce faire les couronnes sphériques $\frac{1}{|y|} < |x| \leq R$ et $\frac{1}{|y|} < |x+z| \leq R$ en gardant à l'esprit que nous travaillons avec $R \to +\infty$. Le diagramme suivant représente la situation.



$$\left\{x \in \mathbb{R}^n | \frac{1}{|y|} < |x+z| \leq R\right\} = \left\{x \in \mathbb{R}^n | \frac{1}{|y|} < |x| \leq R\right\} \cup \{x \in \mathbb{R}^n | \ |x+z| < R < |x|\}$$
$$\cup \left\{x \in \mathbb{R}^n | \ |x| < \frac{1}{|y|} < |x+z|\right\} - \{x \in \mathbb{R}^n | \ |x| \leq R < |x+z|\} - \left\{x \in \mathbb{R}^n | \ |x+z| < \frac{1}{|y|} < |x|\right\}$$

Majorons les intégrales de $K_1(x-z)e^{-2i\pi x\cdot y}$ sur chacun des domaines $|x+z| < R < |x|$, $|x| < \frac{1}{|y|} < |x+z|$, $|x| \leq R < |x+z|$ et $|x+z| < \frac{1}{|y|} < |x|$.

1. Intégrale sur $|x+z| < R < |x|$.

$$\left|\int_{|x+z|<R<|x|} K_1(x-z)e^{-2i\pi x\cdot y}\mathrm{d}x\right| \leq B' \int_{|x+z|<R<|x|} \frac{\mathrm{d}x}{(R-1/|y|)^n}$$
$$\leq \frac{1}{(R-1/|y|)^n}\mathrm{mes}\left\{x\in\mathbb{R}^n|\ |x+z|<R<|x|\right\}$$

Comme $|z| = \frac{1}{2|y|}$, l'inégalité triangulaire assure que le domaine $|x+z| < R < |x|$ est contenu dans la couronne sphérique $R < |x| < R + \frac{1}{2|y|}$.

$$\mathrm{mes}\left\{x\in\mathbb{R}^n|\ |x+z|<R<|x|\right\} \leq \mathrm{mes}\left\{x\in\mathbb{R}^n|\ R<|x|<R+1\frac{1}{2|y|}\right\}$$
$$= C_n\left[\left(R+\frac{1}{2|y|}\right)^n - R^n\right] \underset{R\to+\infty}{=} O(R^{n-1})$$

On en déduit la majoration

$$\int_{|x+z|<R<|x|} K_1(x-z)e^{-2i\pi x\cdot y}\mathrm{d}x \underset{R\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{R}\right)$$

2. Intégrale sur $|x| < 1/|y| < |x+z|$,

$$\left|\int_{|x|<1/|y|<|x+z|} K_1(x-z)e^{-2i\pi x\cdot y}\mathrm{d}x\right| \leq B'|y|^n\mathrm{mes}\left\{x\in\mathbb{R}^n|\ |x|<\frac{1}{|y|}<|x+z|\right\}$$

De la même manière que ci-dessus, nous utilisons l'inégalité triangulaire pour établir l'inclusion du domaine $|x| < 1/|y| < |x+z|$ dans la couronne sphérique $\frac{1}{2|y|} < |x| < \frac{1}{|y|}$. Ceci fournit la majoration

$$\left|\int_{|x|<1/|y|<|x+z|} K_1(x-z)e^{-2i\pi x\cdot y}\mathrm{d}x\right| \leq B'C_n|y|^n\left[\frac{1}{|y|^n} - \frac{1}{2^n|y|^n}\right]$$

Cette dernière fonction de y est bornée sur $\mathbb{R}^n$ tout entier par une constante qui ne dépend *que* de B' et n. Posons

$$\psi_1(y) = \int_{|x|<1/|y|<|x+z|} K_1(x-z)e^{-2i\pi x\cdot y}\mathrm{d}x$$

avec $\|\psi_1\|_{L^\infty} < +\infty$ ne dépendant que de B' et n.

3. Intégrale sur $|x| < R < |x+z|$,

$$\left|\int_{|x|<R<|x+z|} K_1(x-z)e^{-2i\pi x\cdot y}\mathrm{d}x\right| \leq B'\frac{1}{R^n}\mathrm{mes}\left\{x\in\mathbb{R}^n|\ |x|<R<|x+z|\right\}$$

La majoration de la mesure du domaine $|x| < R < |x+z|$ se fait encore comme ci-dessus. L'inégalité triangulaire assure que le domaine d'intégration est contenu dans la couronne sphérique $R - \frac{1}{2|y|} < |x| < R$ de mesure $O(R^{n-1})$. Dès lors,

$$\int_{|x|<R<|x+z|} K_1(x-z)e^{-2i\pi x\cdot y}\mathrm{d}x \underset{R\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{R}\right)$$

4. Intégrale sur $|x+z| < 1/|y| < |x|$.

$$\left|\int_{|x+z|<1/|y|<|x|} K_1(x-z)e^{-2i\pi x\cdot y}\mathrm{d}x\right| \leq B' \int_{|x+z|<1/|y|<|x|} \frac{\mathrm{d}x}{|x-z|^n}$$

Nous usons[14] de l'inégalité triangulaire pour voir que $|x-z| > \frac{1}{2|y|}$ et que le domaine d'intégration est inclus dans la couronne sphérique $\frac{1}{|y|} < |x| < \frac{3}{2|y|}$. Nous aboutissons à

$$\left|\int_{|x+z|<1/|y|<|x|} K_1(x-z)e^{-2i\pi x\cdot y}\mathrm{d}x\right| \leq B'C_n \left[\left(\frac{3}{2|y|}\right)^n - \frac{1}{|y|^n}\right]$$

Cette dernière fonction de y est bornée sur $\mathbb{R}^n$ par une constante que ne dépend que de B' et n. Nous posons encore

$$\psi_2(y) = \int_{|x+z|<1/|y|<|x|} K_1(x-z)e^{-2i\pi x\cdot y}\mathrm{d}x$$

avec $\|\psi_2\|_{L^\infty} < +\infty$ qui ne dépend que de B' et n.

Le résultat de nos majorations successives est, en notant $\psi = \psi_1 + \psi_2 \in L^\infty$,

$$I_2 \underset{R\to+\infty}{=} \frac{1}{2}\int_{1/|y|<|x+z|<R} \left[K_1(x) - K_1(x-z)\right] e^{2i\pi x\cdot y}\mathrm{d}x + \psi(y) + O\left(\frac{1}{R}\right)$$

Enfin, la condition (2.1) assure que cette toute dernière intégrale est bornée :

$$\left|\int_{1/|y|<|x|<R} \left[K_1(x) - K_1(x-z)\right] e^{2i\pi x\cdot y}\mathrm{d}x\right| \leq \int_{2|z|\leq|x|} |K_1(x) - K_1(x-z)|\,\mathrm{d}x \leq B'$$

Donc $\|\hat{K}_1\|_{L^\infty} \leq CB$ où C est une constante qui ne dépend que de n.

Servons nous maintenant de dilatations pour mettre la main sur le résultat dans le cas général. Pour chaque $\epsilon > 0$, le noyau $x \longmapsto \frac{1}{\epsilon^n}K\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$ vérifie les hypothèses du théorème avec les mêmes constantes que K.

1. Pour chaque $x \neq 0$,

$$\left|\frac{1}{\epsilon^n}K\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\right| \leq B\frac{1}{\epsilon^n}\frac{1}{\left|\frac{x}{\epsilon^n}\right|} = \frac{B}{|x|^n}$$

2. Pour chaque $0 < R_1 < R_2 < +\infty$ on a aussi

$$\int_{R_1<|x|<R_2} \frac{1}{\epsilon^n}K\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\mathrm{d}x = 0$$

3. Pour $y \neq 0$,

$$\int_{|x|\geq 2|y|} \frac{1}{\epsilon^n}\left|K\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right) - K\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\right|\mathrm{d}x = \int_{|x|\geq 2|y/\epsilon|}\left|K\left(x-\frac{y}{\epsilon}\right) - K(x)\right|\mathrm{d}x \leq B$$

14. Et surtout abusons...

Il en va de même pour $K' : x \longmapsto \epsilon^n K(\epsilon x)$ (en prenant $\frac{1}{\epsilon} \to \epsilon$). D'après ce que nous avons dit sur le noyau tronqué K_1, la transformée de Fourier du noyau $K_1' : x \longmapsto \epsilon^n K(\epsilon x)\mathbb{1}_1(x)$ est (essentiellement) bornée par une constante qui ne dépend que de n et B.

Nous sommes prêts à conclure.

$$K_\epsilon(x) = K(x)\mathbb{1}_\epsilon(x) = K\left(\epsilon\frac{x}{\epsilon}\right)\mathbb{1}_{|x/\epsilon|\geq 1}$$

La transformée de Fourier de K_ϵ est (quitte à prendre une suite extraite $(R_k)_k$ qui assure la convergence pour presque tout $y \in \mathbb{R}^n$) :

$$\hat{K}_\epsilon(y) = \lim_{R\to+\infty}\int_{|x|\leq R} K\left(\epsilon\frac{x}{\epsilon}\right)\mathbb{1}_{|x/\epsilon|\geq 1}\exp\left(-2i\pi x\cdot y\right)\mathrm{d}x$$

Effectuons le changement de variable $x/\epsilon \to x$ dans cette intégrale.

$$\begin{aligned}\hat{K}_\epsilon(y) &= \lim_{R\to+\infty}\int_{\epsilon|x|\leq R} \epsilon^n K(\epsilon x)\mathbb{1}_1(x)\exp\left(-2i\pi x\cdot(\epsilon y)\right)\mathrm{d}x\\ &= \mathcal{F}\left[x\mapsto \epsilon^n K(\epsilon x)\mathbb{1}_1(x)\right](\epsilon y)\\ &= \hat{K}_1'(\epsilon y)\end{aligned}$$

On en déduit la majoration uniforme :

$$\forall\epsilon>0,\quad \|\hat{K}_\epsilon\|_{L^\infty} = \|\hat{K}_1'\|_{L^\infty} \leq CB$$

□

2.4 Conclusion

En guise de conclusion à ce chapitre, donnons un énoncé "pratique" du théorème de Calderòn-Zygmund sous forme d'un corollaire aux hypothèses facilement vérifiables résumant de façon efficace notre discussion.

Corollaire 2.8. *Soit $\Omega : \mathbb{R}^n\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction homogène bornée de degré zéro*[15] *telle que*

1. *Ω est en moyenne nulle sur S, la sphère unité de $\mathbb{R}^n$: si σ est la mesure induite par la mesure de Lebesgue mes sur S,*

$$\oint_S \Omega d\sigma = 0$$

2. *Ω vérifie la condition de régularité suivante : si l'on pose, pour $\delta > 0$,*

$$\omega(\delta) = \sup_{x,y\in S, |x-y|\leq\delta} |\Omega(x)-\Omega(y)|$$

alors,

$$\int_0^1 \frac{\omega(\delta)}{\delta}d\delta < +\infty$$

15. Une fonction homogène de degré 0 est une fonction constante sur toute droite vectorielle.

Cette condition est automatiquement satisfaite si Ω est lipschitzienne ou de classe C^1.

Si ces conditions sont réalisées, le théorème de Calderòn-Zygmund s'applique au noyau $K(x) = \frac{\Omega(x)}{|x|^n}$. Soit $1 < p < +\infty$, on définit, pour $f \in L^p$,

$$T_\epsilon f(x) = \int_{|y|\geq\epsilon} \frac{\Omega(y)}{|y|^n} f(x-y)dy$$

Alors, T_ϵ est un opérateur borné sur L^p et les $T_\epsilon f$ admettent une limite Tf dans L^p pour $\epsilon \longrightarrow 0$. L'opérateur T ainsi défini est aussi borné sur L^p et, en particulier, si $p \geq 2$, sa norme subordonnée satisfait à

$$\|T\|_{\mathcal{L}(L^p)} \underset{p\geq 2}{=} O(p)$$

Démonstration. Il nous suffit de vérifier que K remplit la condition *2.* du théorème de Calderòn-Zygmund. On se munit de $y \neq 0$ et $x \in \mathbb{R}^n$ avec $|x| \geq 2|y|$.

$$K(x-y) - K(x) = \frac{\Omega(x-y) - \Omega(x)}{|x-y|^n} + \Omega(x)\left(\frac{1}{|x-y|^n} - \frac{1}{|x|^n}\right)$$

Commençons par majorer le deuxième terme en nous servant d'une inégalité de Taylor-Lagrange : comme $|x| \geq 2|y|$, y est passablement "petit" devant x, ce qui nous encourage à développer $\frac{1}{|x-y|^n} - \frac{1}{|x|^n}$ en puissances de y. Pour $h \in \mathbb{R}^n$ avec $h \longrightarrow 0$,

$$|x+h| = |x| + \frac{x \cdot h}{|x|} + o(h)$$

$$\begin{aligned}|x+h|^{-n} &= \left[|x|^n + n|x|^{n-1}\frac{x\cdot h}{|x|} + o(h)\right]^{-1} = |x|^{-n}\left[1 + n\frac{x\cdot h}{|x|^2} + o(h)\right]^{-1} \\ &= \frac{1}{|x|^n} - n\frac{x\cdot h}{|x|^{n+2}} + o(h)\end{aligned}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwartz et l'inégalité de Taylor Lagrange appliquée à ce développement fournissent

$$\big||x-y|^{-n} - |x|^{-n}\big| \leq \mathrm{Cte}\frac{|y|}{|x|^{n+1}} \tag{2.2}$$

Il vient

$$\int_{|x|\geq 2|y|} \left|\Omega(x)\left(\frac{1}{|x-y|} - \frac{1}{|x|^n}\right)\right| \leq \|\Omega\|_{L^\infty}\mathrm{Cte}|y|\int_{|x|\geq 2|y|}\frac{\mathrm{d}x}{|x|^n}$$

et un passage en coordonnées polaires montre que ce dernier terme est borné indépendamment en y.

$$|y|\int_{|x|\geq 2|y|}\frac{\mathrm{d}x}{|x|^n} = C_n|y|\int_{2|y|}^{+\infty}\frac{r^{n-1}}{r^{n+1}}\mathrm{d}r = \mathrm{Cte}$$

Occupons nous du premier terme. Comme Ω est homogène de degré zéro,

$$|\Omega(x-y) - \Omega(x)| = \left|\Omega\left(\frac{x-y}{|x-y|}\right) - \Omega\left(\frac{x}{|x|}\right)\right|$$

Pour utiliser le contrôle que fournit ω, nous devons majorer la distance entre les deux points $\frac{x-y}{|x-y|}$ et $\frac{x}{|x|}$.

$$\left|\frac{x-y}{|x-y|} - \frac{x}{|x|}\right| = \left|\left(\frac{1}{|x-y|} - \frac{1}{|x|}\right)x - \frac{y}{|x-y|}\right|$$

D'une part, d'après (2.4) avec $n = 1$,

$$\left|\frac{1}{|x-y|} - \frac{1}{|x|}\right| \leq \mathrm{Cte}\frac{|y|}{|x|^2}$$

et d'autre part, comme $|x| \geq 2|y|$, on a aussi $|x-y| \geq \frac{1}{2}|x|$. Donc

$$\frac{|y|}{|x-y|} \leq \mathrm{Cte}\frac{|y|}{|x|}$$

et enfin,

$$\left|\frac{x-y}{|x-y|} - \frac{x}{|x|}\right| \leq \mathrm{Cte}\frac{|y|}{|x|}$$

Par définition de ω, il résulte de la majoration précédente que

$$|\Omega(x-y) - \Omega(x)| \leq \omega\left(C\frac{|y|}{|x|}\right)$$

pour une certaine constante $C > 0$, et

$$\begin{aligned}\int_{|x|\geq 2|y|}\left|\frac{\Omega(x-y)-\Omega(x)}{|x-y|^n}\right|\mathrm{d}x &\leq \mathrm{Cte}\int_{|x|\geq 2|y|}\frac{\omega\left(C\frac{|y|}{|x|}\right)}{|x|^n}\mathrm{d}x \\ &\leq \mathrm{Cte}\frac{1}{|y|^n}\int_{|x|\geq 2|y|}\omega\left(C\frac{|y|}{|x|}\right)\frac{|y|^n}{|x|^n}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

En posant $z = x/|y|$ dans cette dernière intégrale, puis en passant en coordonnées polaires, on a :

$$\begin{aligned}\int_{|x|\geq 2|y|}\left|\frac{\Omega(x-y)-\Omega(x)}{|x-y|^n}\right|\mathrm{d}x &\leq \mathrm{Cte}\int_{|z|\geq 2}\omega\left(\frac{C}{|z|}\right)\frac{1}{|z|^n}\mathrm{d}z \\ &= \mathrm{Cte}\int_2^{+\infty}\omega\left(\frac{C}{r}\right)\frac{\mathrm{d}r}{r} \\ &\underset{\delta=C/r}{=}\mathrm{Cte}\int_0^{C/2}\frac{\omega(\delta)}{\delta}\mathrm{d}\delta < +\infty\end{aligned}$$

$\square$

Signalons aussi que le théorème de Calderòn-Zygmund a des application importantes en Analyse Harmonique qui résultent du fait que les transformées (en dimension 1) du type

$$Tf(x) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{|y| \geq \epsilon} \frac{f(x-y)}{y} \mathrm{d}y$$

commutent avec les translations et les dilatations D_δ "positives" et anti-commutent avec les dilatations "négatives". En effet, si $\delta > 0$,

$$(T \circ D_\delta)f(x) = \lim_{\epsilon} \int_{|y| \geq \epsilon} \frac{f(\delta x - \delta y)}{y} \mathrm{d}y = \lim_{\epsilon} \int_{|y| \geq \delta\epsilon} \frac{f(\delta x)}{y} \mathrm{d}y = (D_\delta \circ T)f(x)$$

et de même $(T \circ D_{-\delta})f(x) = -(D_{-\delta} \circ T)f(x)$. Il est possible de montrer les transformations du type décrit par le corollaire 2.8 avec $\Omega_j(x) = \mathrm{Cte}\frac{x_j}{|x|}$ sont en fait les *seuls* opérateurs bornés sur L^2 qui commutent avec les translations et les dilatations et telles que pour toute rotation R, on ait $RT_jR^{-1}f = \sum_k R_{jkT_k} f$. Ces transformations sont les transformations dites de Riesz.

On pourra consulter le troisième chapitre de [4] pour plus d'informations.

Chapitre 3

Application aux Équations d'Euler pour un Fluide Incompressible

Nous allons dans ce chapitre (comme le lecteur perspicace pourra le déduire du titre) étudier les équations d'Euler pour un fluide incompressible bidimensionnel, d'abord dans le cadre de solutions lisses, puis dans le cadre plus général de solutions faibles.

Nous montrerons en particulier l'unicité des solutions de Yudovich des équations d'Euler, c'est à dire les solutions à tourbillon borné, en utilisant des propriétés du champ des vitesse héritées du théorème de Calderòn-Zygmund.

Le contenu de ce chapitre est une adaptation de celui des chapitres 1. 2. et 8. du livre [1] de A.J. Majda et A.L. Bertozzi.

3.1 Généralités sur les Équations d'Euler Incompressibles

L'objectif de cette première partie est de nous familiariser avec les équations d'Euler appliquées à un fluide incompressible en vue d'en extraire les grands principes qui nous guiderons ensuite lorsque seront évoquées les solutions de Yudovich. Toutes les fonctions considérées seront donc supposées aussi régulières [1] que nécessaire à la justification des calculs qui y sont exposés.

3.1.1 Introduction Physique

Établissons les équations d'Euler en utilisant un raisonnement tiré de la Physique. On considère un fluide parfait (sans viscosité) décrit par

1. Sa *pression* en chaque point $p : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
2. Un *champ de vitesses* $v : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$

1. Tant du point de vue de la différentiabilité que de la décroissance pour $|x| \to +\infty$. Vu le contexte, il serait de particulièrement mauvais goût de dire que nous restons délibérément vagues sur ce sujet.

3. Une *densité* constante ρ (que l'on supposera unitaire : $\rho \equiv 1$).

La constance de la densité fournit une première relation sur le champ des vitesses. En effet, l'équation de continuité $\partial_t \rho + \mathrm{div}(\rho v) = 0$ (qui traduit la conservation de la masse) se ramène à $\mathrm{div}(v) = 0$.

Effectuons un bilan de quantité de mouvement sur un domaine Ω suffisamment régulier de fluide pour obtenir une deuxième relation. Rappelons que l'on note $\mathrm{d}x$ la mesure de Lebesgue.

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \rho v \mathrm{d}x}_{\text{Variation de qté. de mvt. dans }\Omega} = \underbrace{-\oint_{\partial\Omega} p\eta \mathrm{d}\sigma}_{\text{Forces pressantes}} - \underbrace{\oint_{\partial\Omega} (v\cdot\eta)\rho v \mathrm{d}\sigma}_{\text{Flux sortant de qté. de mvt.}}$$

Le vecteur η est la normale sortante à Ω. On note $(e_i)_i$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on use de la "formule de Green-Ostrogradsky" pour exprimer les forces pressantes.

$$-\oint_{\partial\Omega} p\eta \mathrm{d}\sigma = -\sum_i \oint_{\partial\Omega} pe_i\cdot\eta \; \mathrm{d}\sigma e_i = -\sum_i \int_\Omega \mathrm{div}(pe_i)\mathrm{d}x = -\int_\Omega \nabla p \mathrm{d}x$$

On transforme de la même manière le flux sortant de quantité de mouvement :

$$\oint_{\partial\Omega} (v\cdot\eta)\rho v \mathrm{d}\sigma = \sum_i \oint_{\partial\Omega} v_i (v\cdot\eta)\mathrm{d}\sigma\cdot e_i = \sum_i \int_\Omega \mathrm{div}(v_i v)\mathrm{d}x\cdot e_i$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}\sum_i \mathrm{div}(v_i v)\cdot e_i &= \sum_{i,j}\partial_j(v_i v_j)e_i = \sum_{i,j}\left[v_i\partial_j v_j + v_j\partial_j v_i\right]e_i \\ &= \underbrace{(\mathrm{div}(v))}_{=0} v + \sum_{ij} v_j\partial_j v_i e_i\end{aligned}$$

L'introduction de l'opérateur $v\cdot\nabla = \sum_j v_j\partial_j$ permet d'écrire le bilan de quantité de mouvement sous la forme suivante :

$$\int_\Omega \left[\partial_t v + (v\cdot\nabla)v + \nabla p\right]\mathrm{d}x \equiv 0$$

Cette relation est valable pour tout élément de fluide Ω suffisamment régulier. On en déduit les équations d'Euler :

$$\begin{cases}\partial_t v + \sum_j v_j\partial_j v + \nabla p = 0\\ \mathrm{div}(v) = 0\end{cases}$$

Pour tenir compte de la viscosité (ce que nous ne ferons pas dans la suite de ce texte), on ajoute dans ces équations un terme de frottement $\nu\Delta v$ (avec la viscosité $\nu > 0$) qui deviennent les équations de Navier-Stokes pour un fluide incompressible :

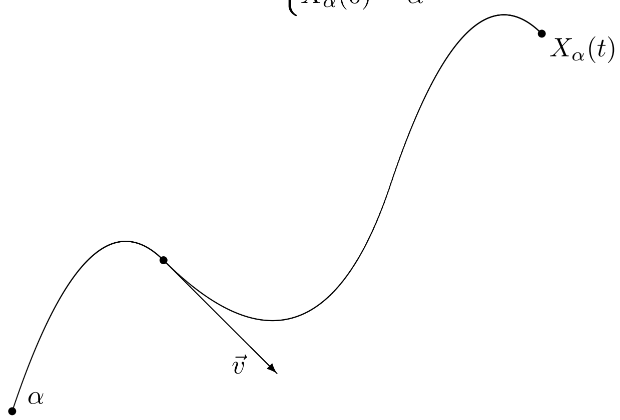
$$\begin{cases}\partial_t v + \sum_j v_j\partial_j v + \nabla p = \nu\Delta v\\ \mathrm{div}(v) = 0\end{cases}$$

Remarque 3.1. Dans un souci de concision, nous parlerons désormais des équations d'Euler pour évoquer les équations d'Euler appliquées à un fluide incompressible.

3.1.2 Trajectoires des Particules

On se munit d'un champ de vitesses $v : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ solution des équations d'Euler. Nous allons nous intéresser aux trajectoires des particules plongées dans le fluide et suivant le mouvement de celui-ci.
Le théorème de Cauchy-Lipschitz nous permet de considérer l'unique solution (maximale) du problème de Cauchy suivant : ($\alpha \in \mathbb{R}^n$ est un point fixé du fluide à l'instant initial)

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} X_\alpha(t) = v(X_\alpha(t), t) \\ X_\alpha(0) = \alpha \end{cases}$$



Les trajectoires X_α définissent naturellement la notion de *dérivée matérielle*. On considère une grandeur $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que l'on souhaite évaluer le long d'une trajectoire X_α. Alors,

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} h(X_\alpha(t), t) &= \nabla h(X_\alpha(t), t)(v(X_\alpha(t)), t) + \partial_t h(X_\alpha(t), t) \\ &= \partial_t h(X_\alpha(t), t) + \sum_i (v_i \partial_i h)(X_\alpha(t), t) \end{aligned}$$

Rappelons que nous notons ∇h la différentielle partielle de h suivant les variables "spatiales". On pose :

$$\frac{\mathrm{Dh}}{\mathrm{D}t}(X_\alpha(t)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} h(X_\alpha(t), t)$$

définissant l'opérateur de *dérivation matérielle* $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} = \partial_t + \sum_i v_i \partial_i$. Les équations d'Euler s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{D}t} + \nabla p = 0 \\ \mathrm{div}(v) = 0 \end{cases}$$

Notons que la première équation s'interprète naturellement comme étant la seconde loi de Newton appliquée à un élément de fluide (de densité unitaire).

3.1.3 Incompressibilité et Divergence

On se donne $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert (non vide) définissant un élément de fluide et on s'interroge sur le volume de $X(\Omega, t) = \{X(\alpha, t) | \alpha \in \Omega\}$, l'élément transporté. Le fluide est dit *incompressible* si ce volume de dépend pas du temps. Nous allons montrer la proposition suivante :

Proposition 3.2. *Le fluide est incompressible exactement si div*$(v) \equiv 0$.

Démonstration. Supposons d'abord $\operatorname{div}(v) = 0$ et introduisons la matrice jacobienne de l'application $X_t : \alpha \longmapsto X(\alpha, t)$,

$$J(\alpha, t) = \det(\nabla X_t)$$

Alors, la différentielle du déterminant étant donnée par

$$\forall M, H \in M_n(\mathbb{R}), \quad \mathrm{d}(\det)(M)(H) = \operatorname{Tr}({}^t\mathrm{Com}(M)H)$$

on a :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} J(\alpha, t) = \operatorname{Tr}\left({}^t\mathrm{Com}(\nabla X_t(\alpha)) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\nabla X_t(\alpha))\right)$$

On dispose d'une équation variationelle sur le flot d'une équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\nabla X_t(\alpha)) = \nabla v(X_t(\alpha), t) \cdot \nabla X_t(\alpha)$$

Ces deux relations se combinent pour donner :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} J(\alpha, t) = \operatorname{Tr}\left[\nabla v(X_t(\alpha)) \cdot \underbrace{\nabla X_t(\alpha) \cdot {}^t\mathrm{Com}(\nabla X_t(\alpha))}_{=\det(\nabla X_t(\alpha)) I_n = J(\alpha,t) I_n}\right] \tag{3.1}$$

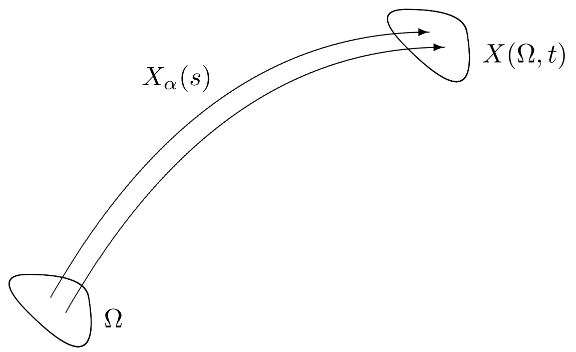
$$= (\operatorname{div}(v))(X_t(\alpha)) J(\alpha, t) = 0 \tag{3.2}$$

Tout cela donne une relation de conservation locale du volume :

$$\forall \alpha, t, \quad J(\alpha, t) \equiv 1$$

Rappelons que $X(., t)$ est, en tant que flot d'une équations différentielle, un C^1-difféomorphisme de Ω sur son image. On en déduit la formule de conservation du volume recherchée d'un changement de variable.

$$\forall t, \quad \operatorname{mes}(X(\Omega, t)) = \operatorname{mes}(\Omega)$$



Réciproquement, si le fluide est incompressible on écrit, pour chaque ouvert (non vide) Ω, la conservation du volume :

$$\int_\Omega \mathrm{d}\alpha = \int_{X_t(\Omega)} \mathrm{d}\alpha = \int_\Omega |J(\alpha, t)| \mathrm{d}\alpha$$

L'arbitraire sur le volume Ω fournit $J(\alpha, t) = 1$ et les équations (3.1) et (3.2) fournissent à leur tour

$$\operatorname{div}(v) = 0$$

$\square$

Terminons ce paragraphe en notant que pour chaque t, $X_t(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$. En effet, comme X_t est un C^1-difféomorphisme, $X(\mathbb{R}^n, t)$ est un ouvert fermé de $\mathbb{R}^n$, espace connexe.

3.1.4 Tourbillon et Loi de Biot-Savart

A partir de maintenant, nous travaillons en dimension $n = 2$. En vue d'éliminer la pression p de la première équation d'Euler

$$\partial_t v + v_1 \partial_1 v + v_2 \partial_2 v = -\nabla p$$

posons, pour $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\operatorname{rot}(f) = \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

le rotationnel de f. Alors, $\operatorname{rot}(\nabla p) = 0$. On définit le tourbillon $\omega = \operatorname{rot}(v)$. Prenons le rotationnel de la première équation d'Euler.

$$\partial_t \omega + \partial_1(v_1 \partial_1 v_2) - \partial_2(v_1 \partial_1 v_1) + \partial_1(v_2 \partial_2 v_2) - \partial_2(v_2 \partial_2 v_1) + \operatorname{rot}(\nabla p) = 0$$

Développons les dérivations et regroupons les termes de manière agréable.

$$\partial_t\omega+\partial_1 v_1\partial_1 v_2+v_1\partial_1^2 v_2-\partial_2 v_1\partial_1 v_1-v_1\partial_1\partial_2 v_1+\partial_1 v_2\partial_2 v_2+v_2\partial_1\partial_2 v_2-\partial_2 v_2\partial_2 v_1-v_2\partial_2^2 v_1 = 0$$

$$\partial_t\omega+\partial_1 v_2\underbrace{[\partial_1 v_1 + \partial_2 v_2]}_{=0}-\partial_2 v_1\underbrace{[\partial_1 v_1 + \partial_2 v_2]}_{=0}+v_1\partial_1^2 v_2-v_1\partial_1\partial_2 v_1+v_2\partial_1\partial_2 v_2-v_2\partial_2^2 v_1 = 0$$

$$\partial_t \omega + v_1\left[\partial_1^2 v_2 - \partial_1\partial_2 v_1\right] + v_2\left[\partial_1\partial_2 v_2 - \partial_2^2 v_2\right]$$

$$\partial_t \omega + v_1 \partial_1(\partial_1 v_2 - \partial_2 v_1) + v_2 \partial_2(\partial_1 v_2 - \partial_1 v_2) = 0$$

On en déduit l'équation sur le tourbillon :

$$\frac{\mathrm{D}\omega}{\mathrm{D}t} = \partial_t \omega + v_1 \partial_1 \omega + v_2 \partial_2 \omega = 0$$

Tentons de récupérer le champ des vitesses à partir du tourbillon. Pour ce faire, nous définissons *la fonction courant* $\psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $v = \nabla^\perp \psi$, où $\nabla^\perp$ est l'opérateur "gradient orthogonal" défini par

$$\nabla^\perp = \begin{pmatrix} -\partial_2 \\ \partial_1 \end{pmatrix}$$

C'est chose possible grâce au *lemme de Poincaré* qui assure l'existence (et l'unicité à une constante additive près) d'un fonction ψ telle que :

$$\begin{cases} \partial_1 \psi = v_2 \\ \partial_2 \psi = -v_1 \end{cases}$$

En effet, la relation de continuité $\partial_1 v_1 + \partial_2 v_2 = \mathrm{div}(v) = 0$ assure que v satisfait aux hypothèses du lemme 1.9 (de Poincaré).

On obtient alors une équation de Poisson :

$$\omega = \mathrm{rot}(v) = \mathrm{rot}(\nabla^{\perp}\psi) = \partial_1^2\psi + \partial_2^2\psi = \Delta\psi$$

Le théorème 1.8 fournit la solution à cette équation sous la forme d'un produit de convolution :

$$\psi(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int \log|y|\omega(x-y,t)\mathrm{d}y$$

et la dérivation de cette relation donne une expression du champ des vitesses :

$$v(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int \frac{y^{\perp}}{|y|^2}\omega(x-y,t)\mathrm{d}y$$

On pose $K(x) = \frac{x^{\perp}}{2\pi|x|^2} \in L^1_{\mathrm{loc}}$ pour obtenir

$$v = K * \omega$$

Cette équation est connue sous le nom de *loi de Biot et Savart* en référence à la relation analogue qui fonde la magnétostatique.

L'équation à laquelle satisfait le tourbillon implique en particulier que le tourbillon est propagé par les lignes de courant.

$$\forall \alpha, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\omega(X_\alpha(t),t) = \frac{\mathrm{D}\omega}{\mathrm{D}t}(X_\alpha(t),t) = 0$$

D'où

$$\forall \alpha, \forall t, \quad \omega(X_\alpha(t),t) = \omega(\alpha,0)$$

Cela a plusieurs conséquences importantes.

Conservation du tourbillon total. Le tourbillon total est conservé :

$$\forall t, \quad \int \omega(x,t)\mathrm{d}x = \int \omega(x,0)\mathrm{d}x$$

Conservation des normes L^p. On remarque de même que pour chaque $1 \leq p \leq +\infty$,

$$\forall t, \quad \|\omega(.,t)\|_{L^p} = \left[\int |\omega(x,t)|^p\mathrm{d}x\right]^{1/p} = \left[\int |\omega(x,0)|^p\mathrm{d}x\right]^{1/p} = \|\omega(.,0)\|_{L^p}$$

Propagation du support. Supposons le tourbillon initial $\omega(.,0)$ à support compact. Alors le tourbillon est à chaque instant à support compact puisque le tourbillon est transporté par les lignes de courant qui sont de vitesses finies. Il existe une fonction croissante $r : t \longmapsto r(t)$ telle que $\mathrm{supp}(\omega(.,t)) \subset B(0,r(t))$.

Corollaire 3.3. *Le champ de vitesse admet le développement suivant pour* $|x| \longrightarrow +\infty$ *:*

$$v(x,t) = \frac{x^\perp}{2\pi|x|^2}\int \omega(y,0)\,dy + O\left(\frac{1}{|x|^2}\right)$$

Démonstration. Développons le noyau K en puissances de $\frac{1}{|x|}$. Le tourbillon $\omega(.,t)$ étant à support borné, nous pouvons écrire, pour $|x| \longrightarrow +\infty$,

$$\frac{x-y}{|x-y|^2} = \frac{x+O(1)}{|x|^2+O(|x|)} = \frac{x}{|x|^2} + O\left(\frac{1}{|x|^2}\right)$$

où y est confiné dans un compact. La constante dans le $O(.)$ peut donc être prise indépendante de y, ce qui assure que

$$v(x,t) = \frac{x^\perp}{2\pi|x|^2}\int \omega(y,t)\mathrm{d}y + O\left(\frac{1}{|x|^2}\right)$$

Ce que nous avons dit plus haut sur la conservation du tourbillon total termine la preuve. □

3.2 Une Estimation de ∇v à l'Aide d'Intégrales Singulières

Ayant pris connaissance de quelques propriétés élémentaires des équations d'Euler, nous faisons l'abandon des hypothèses de régularité dont nous avons bénéficié dans la section précédente. Il nous faudra dorénavant préciser systématiquement la régularité des objets que nous évoquons. En particulier, dans le restant du texte, *toutes les dérivation seront prises au sens des distributions*[2].

Proposition 3.4. *On se donne* $1 < p < +\infty$ *et un tourbillon borné à support compact*[3] $\omega \in L^\infty_0$. *On considère encore le champ des vitesses associé*

$$v(x) = \frac{1}{2\pi}\int \frac{y^\perp}{|y|^2}\omega(x-y)\,dy$$

Alors le "gradient" $\nabla v = (\partial_j v_i)_{ij}$ *du champ des vitesses est une fonction* L^p *et l'opérateur* $\omega \longmapsto \nabla v$ *est une application continue* $(L^\infty_0, \|.\|_{L^p}) \longrightarrow (L^p, \|.\|_{L^p})$.
La densité de L^∞_0 *dans* L^p *permet de prolonger cette application en un opérateur continu* $L^p \longmapsto L^p$.
De plus, il existe une constante numérique $C > 0$ *telle que si en particulier* $p \geq 2$,

$$\|\nabla v\|_{L^p} \leq pC\|\omega\|_{L^p}$$

2. Qui ne coincide pas, est-il besoin de le rappeler, avec la notion de dérivation presque partout des fonctions presque partout dérivables. Un contre-exemple de taille est fourni par la fonction "en escalier" de Cantor qui est continue, croissante, nulle en 0 et valant 1 en 1, dérivable presque partout et de dérivée (définie presque partout) nulle.

3. Ou un tourbillon C^∞ à support compact, peu importe, du moment que le champ des vitesses est bien défini.

Démonstration. Il est extrêmement tentant de dériver sans plus de réfléxion le produit de convolution qui définit v

$$\nabla v(x) \overset{?}{\underset{?}{=}} \int \nabla K(y)\omega(x-y)\mathrm{d}y$$

si ce n'est que ∇K n'est (hélas !) pas intégrable. En effet,

$$\forall x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \quad \nabla K(x_1, x_2) = \frac{1}{(x_1^2+x_2^2)^2} \begin{pmatrix} -2x_1x_2 & x_1^1 - x_2^2 \\ x_2^2 - x_1^2 & 2x_1x_2 \end{pmatrix}$$

si bien que ∇K est, hors de 0, une fonction homogène de degré -2. Mais cette singularité en $1/r^2$ fait de ∇K un “noyau singulier” et nous allons pouvoir exprimer ∇v en fonction d'une intégrale singulière.

Le noyau $\nabla K : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ vérifie bien les hypothèses du corollaire 2.8, puisque, pour $0 < R_1 < R_2 < +\infty$, l'intégrale

$$\int_{R_1 < |x| < R_2} \nabla K(x)\mathrm{d}x$$

est nulle, en raison de la symétrie des coefficients de la matrice. Appliquons le théorème de Calderòn-Zygmund. Celui-ci nous dit que pour chaque $1 < p < +\infty$ et chaque $f \in L^p$ on définit un opérateur borné T sur L^p en écrivant

$$T_\epsilon f := (\mathbb{1}_\epsilon \nabla K) * f \underset{\epsilon \to 0}{\longrightarrow} Tf \qquad \text{dans } L^p.$$

Pour expliciter les liens existant entre ∇v et $T\omega$, nous effectuons une intégration par parties. Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$. Pour $i, j \in \{1, 2\}$,

$$\begin{aligned} \langle \partial_j v, \phi \rangle &= -\langle v, \partial_j \phi \rangle \\ &= -\iint \partial_j \phi(x) K(x-y) \omega(y) \mathrm{d}y\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Pour pouvoir faire notre intégration par parties, nous nous isolons de 0, endroit où la singularité de K est quelque peu gênante. On se munit de $\epsilon > 0$ destiné à tendre vers 0.

$$\begin{aligned} \langle \partial_j v, \phi \rangle &= -\lim_{\epsilon \to 0} \int \omega(y) \left[\int_{|x-y| \geq \epsilon} \partial_j \phi(x) K(x-y) \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}y \\ &= -\lim_{\epsilon \to 0} \int \omega(y) \left[\int_{|x| \geq \epsilon} \partial_j \phi(y-x) K(-x) \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}y \end{aligned}$$

L'intégrale impliquant des dérivations par rapport à la première variable est, après une intégration par parties comme décrit dans le corollaire 1.7,

$$\begin{aligned} \int_{|x| \geq \epsilon} \partial_1 \phi(y-x) K(-x) \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\theta) \phi \left[y - \epsilon \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \sin(\theta) \\ -\cos(\theta) \end{pmatrix} \mathrm{d}\theta \\ - \int_{|x| \geq \epsilon} \phi(x-y) \partial_1 K(-x) \mathrm{d}x \end{aligned}$$

Le terme de bord est, lorsque l'on laisse tendre ϵ vers 0,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(\theta)\phi\left[y-\epsilon\begin{pmatrix}\cos(\theta)\\ \sin(\theta)\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}\sin(\theta)\\ -\cos(\theta)\end{pmatrix}\mathrm{d}\theta=\phi(y)\begin{pmatrix}0\\ -1/2\end{pmatrix}+O(\epsilon)$$

La fonction ϕ étant continue et à support compact, la théorème de Heine garantit son uniforme continuité. La constante dans le reste $O(\epsilon)$ est donc une constante uniforme.

Les mêmes manipulations sont effectuées sur l'intégrale impliquant des dérivations par rapport à la seconde variable.

$$\begin{aligned}\int_{|x|\geq\epsilon}\partial_2\phi(y-x)K(-x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(\theta)\phi\left[y-\epsilon\begin{pmatrix}\cos(\theta)\\ \sin(\theta)\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}\sin(\theta)\\ -\cos(\theta)\end{pmatrix}\mathrm{d}\theta\\ -\int_{|x|\geq\epsilon}\phi(x-y)\partial_2K(-x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

et le terme de bord est

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(\theta)\phi\left[y-\epsilon\begin{pmatrix}\cos(\theta)\\ \sin(\theta)\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}\sin(\theta)\\ -\cos(\theta)\end{pmatrix}\mathrm{d}\theta=\phi(y)\begin{pmatrix}1/2\\ 0\end{pmatrix}+O(\epsilon)$$

Comme $\omega\in L^1$, on déduit de tout cela que, pour $i,j\in\{1,2\}$,

$$\begin{aligned}\langle\partial_jv_i,\phi\rangle&=-\int_y\left[\phi(y)a_{ij}-\int_{|x|\leq\epsilon}\partial_jK_i(-x)\phi(y-x)\mathrm{d}x\right]\omega(y)\mathrm{d}y+O(\epsilon)\\ &=-a_{ij}\langle\omega,\phi\rangle+\int_y\omega(y)\int_{|x-y|\geq\epsilon}\phi(x)\partial_jK_i(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+O(\epsilon)\\ &=-a_{ij}\langle\omega,\phi\rangle+\int_x\phi(x)\int_{|x-y|\geq\epsilon}\partial_jK_i(x-y)\omega(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x+O(\epsilon)\\ &=\langle-a_{ij}\omega+(T_\epsilon\omega)_{ij},\phi\rangle+o(1)\end{aligned}$$

Ici, A est une matrice dont la valeur est

$$A=(a_{ij})_{ij}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1\\ -1&0\end{pmatrix}$$

et qui sera sans importance dans la suite. On en déduit la convergence

$$T_\epsilon\omega-\omega A\underset{\epsilon\to0}{\longrightarrow}\nabla v\quad\text{dans }\mathcal{D}'.$$

L'unicité de la limite dans $\mathcal{D}'$ assure que

$$\nabla v=T\omega-\omega A\in L^p$$

et la majoration fournie par le théorème de Calderòn-Zygmund donne

$$\forall p\geq2,\quad\|\nabla v\|_{L^p}\leq C\cdot p\|\omega\|_{L^p}$$

où $C>0$ est une constante numérique. □

On terminons cette section avec une estimation du champ des vitesses.

Proposition 3.5. *Considérons un tourbillon $\omega \in L^1 \cap L^\infty$. On pose encore*

$$v(x) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{y^\perp}{|y|^2} \omega(x-y)\, dy$$

Alors le champ v ainsi défini est borné $v \in L^\infty$ et $v \in L^4$

Démonstration. Le noyau K est localement intégrable et borné loin de 0, ce qui nous pousse à couper l'intégrale en deux morceaux pour obtenir une majoration.

$$\begin{aligned}
|v(x)| &\le \int |K(y)\omega(x-y)|\, \mathrm{d}y \\
&\le \|\omega\|_{L^\infty} \int_{|y|\le 1} |K(y)| \mathrm{d}y + \|K(y)\|_{L^\infty(|y|\ge 1)} \int |\omega(x-y)| \mathrm{d}y \\
&\le \|\omega\|_{L^\infty} \|K(y)\|_{L^1(|y|\le 1)} + \|K(y)\|_{L^\infty(|y|\ge 1)} \|\omega\|_{L^1} < +\infty
\end{aligned}$$

Pour montrer que $v \in L^4$, on découpe l'intégrale de la même manière.

$$v(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{|y|\le 1} \frac{y^\perp}{|y|^2} \omega(x-y) \mathrm{d}y + \frac{1}{2\pi} \int_{|y|>1} \frac{y^\perp}{|y|^2} \omega(x-y) \mathrm{d}y$$

Le premier morceau est le produit de convolution de $\frac{y}{|y|^2} \mathbb{1}_{|y|\le 1} \in L^1$ avec $\omega \in L^4$ qui est une fonction L^4, d'après l'inégalité de Hausdorff-Young. Le deuxième morceau est le produit de convolution de $\frac{y}{|y|^2} \mathbb{1}_{|y|\ge 1} \in L^4$ avec $\omega \in L^1$ qui est de même une fonction L^4. □

Remarque 3.6. On montre exactement de la même manière (mais ce ne sera pas utile dans la suite) que $v \in L^p$ dès que $p > 2$.

3.3 Unicité des Solutions de Yudovich

Les solutions de Yudivich des équations d'Euler sont les solutions pour lesquelles le tourbillon ω est une fonction bornée à support compact. L'objectif de cette section est de montrer le résultat suivant

Théorème 3.7 (Yudovich-1963)**.** *Les solutions à tourbillons bornés et à supports compacts $\omega \in L^\infty_0$ des équations d'Euler (pour un fluide incompressible) sont uniques.*

3.3.1 Idée de la Preuve

Montrons d'abord le théorème dans un cadre informel. Nous laissons (provisoirement !) de coté toute rigueur et nous conduisons nos calculs de manière essentiellement symbolique. Ceux-ci seront correctement justifiés dans la section suivante. Soit v et v' deux solutions de Yudovich des équations d'Euler satisfaisant à la même donnée initiale v_0 ainsi que ω et ω' les tourbillons associés. L'objectif de cette section est de montrer que $v \equiv v'$. On se donne un intervalle de temps $[0,T]$ sur lequel nous travaillerons. Posons $W = v - v' = \bar{v} - \bar{v}' \in L^2$ la différence des solutions et posons enfin

$$E(t) = \int |W(x,t)|^2 \mathrm{d}x$$

Nous allons montrer une inégalité différentielle sur E et en déduire le résultat. Comme v et v' vérifient les équations d'Euler, W vérifie

$$\partial_t W = -(v \cdot \nabla)W - (W \cdot \nabla)v' + \nabla(p - p')$$

En prenant le produit scalaire de cette relation avec W et en intégrant sur $\mathbb{R}^2$, on obtient pour $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$ l'expression suivante :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} &= -\int W \cdot \nabla(p-p') - \int W \cdot [(v \cdot \nabla)W] - \int W \cdot [(W \cdot \nabla)v'] \\ &= I_1 + I_2 + I_3\end{aligned}$$

Des intégrations par parties montrent que les deux premières intégrales de cette somme sont nulles. En effet,

$$I_1 = -\sum_i \int W_i \partial_i (p - p') = \int (p-p') \sum_i \partial_i W_i = 0$$

et

$$I_2 = -\sum_{ij} \int W_i v_j \partial_j W_i = \sum_{ij} \int W_i \partial_j (W_i v_j) = \underbrace{\int \sum_{ij} W_i^2 \partial_j v_j}_{=0} + \frac{1}{2} \sum_j \int v_j \partial_j |W|^2$$

$$= -\frac{1}{2} \int \sum_j |W|^2 \partial_j v_j = 0$$

Donc :

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 2I_3 = -2\int W \cdot [(W \cdot \nabla)v'] \leq 2 \int |W|^2 |\nabla v'| \tag{3.3}$$

En vue de séparer les termes dans le membre de droite de cette inégalité et avoir une facteur $\int |W|^2$, utilisons l'inégalité de Hölder qui donne, pour chaque instant $t \geq 0$ et pour $p > 2$,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} &\leq 2\|\nabla v'\|_{L^p} \left[\int |W|^{\frac{2p}{p-1}}\right]^{\frac{p-1}{p}} \\ &\leq 2\|\nabla v'\|_{L^p} \left[\|W\|_{L^\infty}^{\frac{2}{p-1}} \int |W|^2\right]^{\frac{p-1}{p}}\end{aligned}$$

En effet, d'après la proposition 3.5, W est une fonction bornée sur $\mathbb{R}^2 \times [0,T]$.

Nous faisons intervenir ici la majoration de $\|\nabla v'\|_{L^p}$ que nous donne le théorème de Calderòn-Zygmund (par le biais de la proposition 3.4).

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} \leq pC \left(\|\omega'\|_{L^p} \|W\|_{L^\infty}^{2/p}\right) E^{1-\frac{1}{p}}$$

Il convient de remarquer que $\|\omega'\|_{L^p}$ se laisse majorer par une constante indépendante de p et t. En effet, puisque les normes L^p du tourbillon sont conservés (on consultera la section 3.1.4), on a

$$\begin{aligned}\|\omega'(.,t)\|_{L^p} = \|\omega'(.,0)\|_{L^p} = \left[\int |\omega_0|^p\right]^{1/p} &\leq [\text{mesure}\,(\text{supp}(\omega_0))]^{1/p}\,\|\omega_0\|_{L^\infty}\\ &\leq \text{mesure}\,(\text{supp}(\omega_0))\,\|\omega_0\|_{L^\infty}\end{aligned}$$

Notons que c'est à cet endroit qu'intervient de façon cruciale l'hypothèse sur le tourbillon $\omega' \in L^\infty_0$.
On obtient donc l'inégalité différentielle recherchée : pour p suffisamment grand et pour une certaine constante $M > 0$,

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} \leq pME^{1-\frac{1}{p}}$$

Cette inégalité différentielle implique une majoration de E. En divisant par E, on a :

$$\frac{1}{pE^{1-\frac{1}{p}}}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} \leq M$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(E^{1/p}\right) \leq M$$

Nous aboutissons, en intégrant cette équation, à

$$E(t)^{1/p} = E(t)^{1/p} - E(0)^{1/p} \leq Mt$$

Le fruit de nos efforts est la majoration suivante :

$$E(t) \leq (Mt)^p \tag{3.4}$$

En prenant $t < \frac{1}{M}$ et en faisant tendre p vers $+\infty$, on obtient $E(t) = 0$. Comme E est continue, on s'assure la nullité de E sur le segment $\left[0, \frac{1}{M}\right]$. En recommençant avec comme instant initial le temps $t = \frac{1}{M}$, on trouve que $E \equiv 0$ sur l'intervalle de temps $[\frac{1}{M}, \frac{2}{M}]$. L'itération de cette opération assure la nullité de E à chaque instant $t \geq 0$.

3.3.2 Démonstration Rigoureuse

Occupons nous maintenant de démontrer rigoureusement le résultat. Nous commençons par donner une définition plus précise de la notion de solution en nous appuyant sur les observations des parties précédentes.

Définition 3.8. (Solution de Yudovich) Un champ de vitesses $v : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est une *solution de Yudovich* des équations d'Euler incompressibles munies de la condition initiale $v(t = 0) = v_0$ si *pour chaque* $T > 0$ sont remplies les conditions suivantes :

1. *On suppose que le tourbillon est à chaque instant borné et à support compact* (c'est à dire $\omega \in L^\infty_0$) et qu'il existe une fonction croissante [4] $r : t \longmapsto r(t)$ telle que pour chaque t on ait $\text{supp}(\omega(.,t)) \subset B(0, r(t))$.

4. Nécessairement bornée puisque $T < +\infty$.

2. Le tourbillon total ainsi que les normes L^p du tourbillon [5] sont conservées : pour $t \geq 0$ et $1 < p \leq +\infty$,

$$\int \omega(x,t)\mathrm{d}x = \int \omega(x,0)\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad \|\omega(.,t)\|_{L^p} = \|\omega(.,0)\|_{L^p}$$

3. Le champ des vitesses admet le développement suivant :

$$v(x,t) = \frac{x^\perp}{2\pi(|x|^2+1)} \int \omega(y,t)\mathrm{d}y + \bar{v}(x,t)$$

où $\bar{v} \in L^2$ et l'application

$$\bar{v} : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \longrightarrow L^2 \\ t \longmapsto v(.,t) \end{array}$$

est une fonction continue, ce que l'on note $\bar{v} \in C_t^0(L_x^2)$. On suppose en outre que $\partial_t \bar{v}, \nabla \bar{v} \in L^2(\mathbb{R}^2 \times [0,T])$.

4. Le champ des vitesses v vérifie la formulation faible des équations d'Euler : pour chaque fonction "test" $\phi \in C_t^0(L_x^2)$ de divergence nulle telle que $\partial_t \phi, \nabla \phi \in L^2(\mathbb{R}^2 \times [0,T])$,

$$\begin{aligned} &-\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \bar{v}(x,t) \cdot \partial_t \phi(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_{\mathbb{R}^2} \bar{v}(x,T) \cdot \phi(x,T)\mathrm{d}x \\ &- \int_{\mathbb{R}^2} \bar{v}(x,0) \cdot \phi(x,0)\mathrm{d}x - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} v(x,t) \cdot \left[(v\cdot\nabla)\phi(x,t)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0 \quad (3.5) \end{aligned}$$

Comme $\bar{v} \in L^2$, les trois premières intégrales sont convergentes. Pour nous assurer la convergence de la dernière intégrale, souvenons nous que, d'après la proposition 3.5, $v \in L^4$, d'où $v \cdot [(v\cdot\nabla)\phi] \in L^1$.

Remarque 3.9. Les hypothèses *1.* *2.* et *3.* que l'on fait sur les solutions sont particulièrement naturelles si l'on se remémore la discussion menée à la fin de la section 3.1.4.

Remarque 3.10. Commentons un peu le quatrième et dernier point de la définition. Il n'est pas totalement évident que la formulation faible (3.5) des équations d'Euler soit cohérente avec la version usuelle des équations. Soit v une solution régulière [6] des équations d'Euler et ϕ une fonction "test" comme décrite ci-dessus. De la première équation d'Euler $\partial_t v + (v\cdot\nabla)v = -\nabla p$ on déduit

$$\begin{aligned} \int_0^T \int \partial_t v(x,t) \cdot \phi(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_0^T \int \phi(x,t) \cdot \left[(v\cdot\nabla)v(x,t)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}t& \\ = -\int_0^T \int \nabla p(x,t) \cdot \phi(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t& \end{aligned}$$

Une intégration par parties en espace sur l'intégrale dans laquelle intervient la pression montre la nullité du membre de droite. On observe ensuite que $\partial_t v = \partial_t \bar{v}$ puisque

$$v(x,t) - \bar{v}(x,t) = \frac{x^\perp}{2\pi(|x|^2+1)} \int \omega(y,t)\mathrm{d}y = \frac{x^\perp}{2\pi(|x|^2+1)} \int \omega(y,0)\mathrm{d}y$$

5. L'existence de ces intégrales est garantie par la condition $\omega \in L_0^\infty$.
6. Tant du point de vue de la différentiabilité que de l'intégrabilité.

est une quantité indépendante du temps. Une intégration par parties selon la variable temporelle de

$$\int_0^T \int \partial_t v(x,t) \cdot \phi(x,t) \mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

et une dernière intégration par parties suivant les variables spatiales de

$$\int_0^T \int \phi(x,t) \cdot [(v \cdot \nabla) v(x,t)] \, \mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

permet d'aboutir à la formulation faible des équations. Réciproquement, le même calcul montre qu'une solution de Yudovich qui bénéficie de propriétés de régularité confortables est aussi une solution des équations d'Euler usuelles.

Remarque 3.11. La formulation intégrale en (3.5) des équations d'Euler peut sembler être plus forte que leur formulation faible usuelle où les fonctions test ϕ sont des fonctions C^∞ à supports compacts. Il n'en est pourtant rien en raison de la densité de $\mathcal{D}([0,T] \times \mathbb{R}^2)$ dans $C_t^0(L^2)$.

La preuve suivante montre l'unicité des solutions à tourbillons bornés soumises aux conditions de la définition 3.8. Il s'agit d'une variante rigoureuse du raisonnement exposé ci-dessus qui en contient toutes les idées.

Démonstration du théorème de Yudovich. Inspirons nous de ce qui a été dit à la section précédente pour démontrer notre résultat. À défaut d'une inégalité *différentielle*[7], nous utiliserons la formulation faible des équations d'Euler pour obtenir une inégalité *intégrale* sur E. On pose encore $W = v - v' = \bar{v} - \bar{v}' \in C_t^0(L_x^2)$ et on définit une application continue en posant

$$E(t) = \int |W(x,t)|^2 \mathrm{d}x$$

Commençons par montrer que $E(T)$ est donné par

$$E(T) = 2 \int_0^T \int W(x,t) \cdot \partial_t W(x,t) \mathrm{d}x\mathrm{d}t \tag{3.6}$$

On se munit pour cela d'une suite $(W_n)_n$ de fonctions régulières telle que

$$\begin{cases} W_n \longrightarrow W \quad \text{dans } C_t^0(L_x^2) \\ \partial_t W_n \longrightarrow \partial_t W \quad \text{dans } L^2(\mathbb{R}^2 \times [0,T]) \end{cases}$$

Cela peut être fait en prenant par exemple le produit de convolution de W avec une suite de fonctions régularisantes en temps et en espace. Alors d'une part,

$$2 \int_0^T \int W_n(x,t) \cdot \partial_t W_n(x,t) \mathrm{d}x\mathrm{d}t \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 2 \int_0^T \int W(x,t) \cdot \partial_t W(x,t) \mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

7. Qui a l'inconvénient majeur de mettre en jeu des objets dont l'existence et la régularité n'est pas évidente.

et d'autre part,

$$2\int_0^T \int W_n(x,t)\cdot\partial_t W_n(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_0^T \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int |W_n(x,t)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$
$$= \int |W_n(x,T)|^2\mathrm{d}x - \int |W_n(x,0)|^2\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} E(T)$$

L'unicité de la limite permet de conclure à (3.6). Servons nous de $W \in C_t^0(L_x^2)$ comme fonction "test" dans la formulation faible (3.5) des équations. C'est légitime puisque W est de divergence nulle et ses dérivées vérifient $\partial_t W \in L^2(\mathbb{R}^2\times[0,T])$ et $\nabla W \in L^2(\mathbb{R}^2\times[0,T])$. Nous retranchons l'équation (3.5) appliquée à v' (avec $\phi = W$) à la même équation appliquée à v pour obtenir

$$\frac{1}{2}E(T) = \int_0^T (v-v')(x,t)\cdot\partial_t W(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$
$$= \left[\int \bar{v}(x,T)\cdot W(x,T)\mathrm{d}x - \int \bar{v}(x,0)\cdot W(x,0)\mathrm{d}x - \int_0^T\int v(x,t)\cdot\left[(v\cdot\nabla)W(x,t)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right]$$
$$- \left[\int \bar{v}'(x,T)\cdot W(x,T)\mathrm{d}x - \int \bar{v}'(x,0)\cdot W(x,0)\mathrm{d}x - \int_0^T\int v'(x,t)\cdot\left[(v'\cdot\nabla)W(x,t)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right]$$

Regroupons les termes pour lesquels le temps est fixé à T et 0 et arrangeons les de manière similaire à (3.3.1).

$$\frac{1}{2}E(T) = \underbrace{\int W(x,T)\cdot W(x,T)\mathrm{d}x - \int W(x,0)\cdot W(x,0)\mathrm{d}x}_{=E(T)} - \int_0^T\int v(x,t)\cdot\left[(v\cdot\nabla)W(x,t)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$
$$+ \int_0^T\int v'(x,t)\cdot\left[(v'\cdot\nabla)W(x,t)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

$$\frac{1}{2}E(T) = \int_0^T\int W(x,t)\cdot\left[(v\cdot\nabla)W(x,t)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_0^T\int v'(x,t)\cdot\left[(W\cdot\nabla)W(x,t)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

Nous devons maintenant procéder à des intégrations par parties dans les intégrales spatiales. Nous sommes autorisés à faire cela, quitte à remplacer v et v' par des suites approchantes (à savoir encore des produits de convolution avec des fonctions régularisantes en espace seulement). Les calculs se font exactement de la même manière que dans le paragraphe précédent et nous aboutissons (presque) au même résultat :

$$\frac{1}{2}E(T) = -\int_0^T\int W(x,t)\cdot\left[(W\cdot\nabla)v'(x,t)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

Et

$$E(T) = \int_0^T\int W(x,t)\cdot\left[(W\cdot\nabla)v'(x,t)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}t \leq 2\int_0^T\int |W(x,t)|^2|\nabla v'(x,t)|\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

Nous avons retrouvé une version intégrée en temps de la majoration (3.3) de l'énergie dans l'argumentation formelle de la partie précédente. Nous déployons exactement les même arguments pour aboutir à l'inégalité intégrale que nous recherchons.

$$E(T) \leq pM \int_0^T E(t)^{1-\frac{1}{p}} \mathrm{d}t := F(T) \in C^1$$

Il s'ensuit une inégalité différentielle sur $F \geq 0$.

$$\frac{F'(T)}{Mp} \leq F(T)^{1-\frac{1}{p}}.$$

Posons $F_\epsilon = \epsilon + F > 0$ et divisons les membres de cette équation par F_ϵ.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(F_\epsilon(t)^{1/p}\right) \leq F_\epsilon' F_\epsilon^{\frac{1}{p}-1}\frac{1}{p} \leq M$$

En intégrant cette inégalité et en laissant tendre $\epsilon \longrightarrow 0$, nous arrivons à l'inégalité :

$$F(t) \leq (Mt)^p$$

La nullité de F est acquise de la même manière que celle de E en (3.4), ce qui à son tour assure la nullité de E et, *in fine*,

$$v \equiv v'$$

□

Bibliographie

[1] Andrea L. Bertozzi et Andrew J. Majda : *Vorticity and Incompressible Flow*, Cambridge Texts in Applied Mathematics, 2002.

[2] A. P. Calderòn et A. Zygmund, *On the Existence of Certain Singular Integrals*, Acta Mathematica 88, 1952, pp. 85-139

[3] F. Golse : *Distributions, Analyse de Fourier, Équations aux Dérivées Partielles*, polycopié de cours pour l'École Polytechnique, Octobre 2012.

[4] Elias M. Stein : *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton University Press, 1970.

[5] V. I. Yudovich, *Non-Stationary Flow of an Incompressible Liquid*, Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. 3, 1032 1066, 1963

[6] A. Zygmund *Trigonometrical Series*, Cambridge University Press, 1959