Homotopie et revêtements topologiques

Louis Garénaux

ENS Rennes

Compte rendu de stage
$1^{\text{ère}}$ année magistère

KU Leuven

Encadrant : Johannes Huisman
Departement Wiskunde

2015-2016

Sommaire

Introduction **2**

1 Homotopie **4**
1.1 Équivalence entre espaces topologiques 4
1.2 Groupe fondamental 5
1.3 Résultats liés au groupe fondamental 7
1.4 Groupes d'homotopie supérieurs 10

2 Théorie des catégories **12**
2.1 Catégorie 12
2.2 Foncteurs 14
2.3 Quelques résultats 15

3 Classification des revêtements **17**
3.1 Revêtements 17
3.2 Action de monodromie 19
3.3 Revêtement universel 20
Définition 20
Représentabilité 22
3.4 Revêtement galoisien 24
Définition 24
Quelques résultats 25
3.5 Résultat d'équivalence entre catégories 26

Annexes **28**
A Connexités 28
B Groupe topologique 29
C Autres résultats 30

Introduction

Durant ce stage, je me suis d'abord intéressé à la topologie algébrique dans le but d'aborder les groupes d'homotopie et d'homologie. Je n'ai finalement pas étudié ces derniers, pour me concentrer sur les revêtements et plus particulièrement sur un résultat trouvé dans le [Sza08] abordé à la fin de ce rapport. L'objectif premier était de découvrir les revêtements galoisiens et éventuellement de faire un parallèle avec la théorie galoisienne des extensions de corps. Ce dernier aspect n'a cependant pas été traité.

Notations

Dans tout le rapport, on notera :

$I := [0, 1]$ comme ensemble de départ de nos chemins ;

$\mathcal{C}$ pour désigner l'ensemble des chemins à valeurs dans l'espace topologique avec lequel on travaillera ;

$\mathbb{N},\ \mathbb{Z},\ \mathbb{Q},\ \mathbb{R},\ \mathbb{C}$, les espaces habituels ;

$\mathbb{S}^n$ et $\mathbb{D}^n$ respectivement la sphère de centre 0 et de rayon 1, et le disque (boule) de centre 0 et de rayon 1 ;

ssi comme abréviation de si et seulement si.

$[\gamma]$ pour désigner la classe d'homotopie de γ.

On notera la différences entre ensembles $A - B$ plutôt que $A\backslash B$, comme il est courant de le faire. Ceci nous permet de différencier plus simplement les actions à gauches et à droites. Ainsi, X/G est l'ensemble des orbites d'une action à droite de G sur X, et $G\backslash X$ l'ensemble des orbites d'une action à gauche de G sur X.

Sauf mention contraire, les voisinages seront toujours pris ouverts.

On suppose connus les notions de groupes, espaces topologique, application continue, ainsi que les notions élémentaires qui gravitent autour.

Remerciements

Je remercie la KU Leuven pour m'avoir accepté dans ses locaux sur toute la durée de mon stage ;

Je remercie tout particulièrement Johannes Huissman pour m'avoir encadré pendant ce stage, pour avoir élargi ma culture mathématique et pour avoir fait le lien avec la KU Leuven.

Chapitre 1

Homotopie

Notre motivation première sera la classification des espace topologique. Une première idée serait d'utiliser les **homéomorphismes** (bijection bicontinue). Cependant ceux-ci induisent une relation d'équivalence trop exigeante. On parlera donc plutôt d'**homotopie** entre espaces.

1.1 Équivalence entre espaces topologiques

Commençons par définir l'homotopie entre fonctions.

Définition 1.1.1 (Homotopie de fonction). Soient X, Y espaces topologiques, soit $A \subset X$, et soient $f, g : X \longrightarrow Y$ continues.
On dit que f et g sont homotopes relativement à A, et on note $f \sim g$ rel A, s'il existe $H : I \times X \longrightarrow Y$ telle que :

(*i*) H est continue ;

(*ii*) $H(0, \cdot) = f(\cdot)$ et $H(1, \cdot) = g(\cdot)$;

(*iii*) les points de A sont fixes durant la transformation :

$$\forall a \in A, \forall t \in I,\ H(t, a) = H(0, a).$$

Si seuls les deux premiers points sont satisfaits, on dit simplement que f et g sont homotopes, et on note $f \sim g$.

Proposition 1.1.2. L'homotopie relative est une relation d'équivalence.

Démonstration. Soit $A \subset X$. La réflexivité est immédiate, il suffit de prendre $H(t, x) := f(x)$ pour obtenir $f \sim f$ rel A. La symétrie l'est tout autant : on suppose $f \sim g$ rel A, et on choisit H qui vérifie les conditions de la définition. Alors

$$\bar{H} : \begin{array}{ccc} I \times X & \longrightarrow & Y \\ t\ ,\ x & \longmapsto & H(1-t, x) \end{array}$$

nous donne $g \sim f$ rel A.

Montrons désormais la transitivité : soient $f, g, h : X \longrightarrow Y$ continues, et soient H_1, H_2 qui nous donnent respectivement $f \sim g$ rel A et $g \sim h$ rel A. On pose alors :

$$H : \begin{array}{ccc} I \times X & \longrightarrow & Y \\ t \leq \frac{1}{2}, x & \longmapsto & H_1(2t, x) \\ t > \frac{1}{2}, x & \longmapsto & H_2(2t-1, x) \end{array},$$

qui donne $f \sim h$ rel A. □

On notera dans la suite $[f]$ pour désigner la classe d'équivalence de f. Après avoir introduit la notion d'homotopie de fonction, nous pouvons nous intéresser aux espaces topologiques.

Définition 1.1.3. Soient X, Y deux espaces topologiques. On dit que X et Y sont homotopes, et on notera $X \sim Y$, s'il existe $f : X \longrightarrow Y$, et $g : Y \longrightarrow X$, telles que $f \circ g \sim \mathrm{id}_Y$ et $g \circ f \sim \mathrm{id}_X$.

Remarque 1.1.4. De la proposition 1.1.2, on déduit aisément que l'homotopie entre espaces topologiques est également une relation d'équivalence.

Montrer brutalement que deux espaces ne sont pas équivalent n'est pas évident. On construit donc dans les sections suivantes des invariants topologiques : les groupes d'homotopie. Deux espaces équivalents topologiquement ont ainsi les mêmes groupes d'homotopie. Il existe d'autres invariants topologiques, comme les groupes d'homologie, dont on ne parlera pas ici.

1.2 Groupe fondamental

On construit ici le premier groupe d'homotopie, qui permet déjà de différencier de nombreux espaces. Dans toute la section X désigne un espace topologique, et on note $\mathcal{C}$ l'ensemble des **chemins** de X : les applications $I \longrightarrow X$ continues.

Définition 1.2.1. Soient $x, y \in X$. On note

$$\mathcal{C}_{x,y} := \{\gamma \in \mathcal{C} \mid \gamma(0) = x,\ \gamma(1) = y\},$$

l'ensemble des chemins de x à y.
Si $x = y$, on note plus simplement $\mathcal{C}_x$, et on appelle **boucle** de point de base x un de ses éléments.

On définit alors une loi de composition interne, définie sur une partie de $\mathcal{C}^2$:

Définition 1.2.2. Soient $x, y, z \in X$. Pour $f \in \mathcal{C}_{x,y}$ et $g \in \mathcal{C}_{y,z}$, on note $f \cdot g$ l'élément de

$\mathcal{C}_{x,z}$ définit par :

$$\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & X \\ t \leq \frac{1}{2} & \longmapsto & f(2t) \\ t < \frac{1}{2} & \longmapsto & g(2t-1) \end{array}.$$

Remarque 1.2.3. Ceci est en fait la concaténation de deux chemins. On commence par suivre le chemin formé par f puis celui formé par g. Attention à la notation, on peut avoir tendance à inverser l'ordre, à cause de notre habitude d'utiliser la composition. Dans la suite, on notera toujours $\cdot$, mais on sous-entendra parfois la composition. Ainsi, fg désignera $f \circ g$.

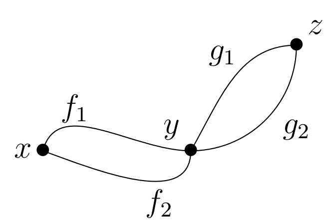
Après avoir défini l'homotopie entre fonctions dans un cadre général, on se restreindra à partir de maintenant à des homotopies entre chemins. On introduit pour cela une nouvelle définition, légérement différente de l'ancienne :

Définition 1.2.4 (Homotopie entre chemins). On dit que deux chemins $f, g : I \longrightarrow X$ sont homotopes si $f \sim g \text{ rel } \{0,1\}$. On le note $f \sim g$.

Définition 1.2.5 (Groupe fondamental). Soit X espace topologique, soit $x \in X$. On appelle groupe fondamental de X associé au point de base x, et on note $\pi_1(X,x)$, l'ensemble des boucles de X de base x, que l'on quotiente par la relation d'homotopie entre chemins.

Proposition 1.2.6. Le groupe fondamental $\pi_1(X,x)$ est un groupe pour la loi $\cdot$.

Démonstration. On étend ici la concaténation de chemin aux classe d'homotopie, en effet la loi $\cdot$ et la relation $\sim$ sont compatible : pour $f_1 \sim f_2 \in \mathcal{C}_{x,y}$ et $g_1 \sim g_2 \in \mathcal{C}_{y,z}$, on a $f_1 \cdot g_1 \sim f_2 \cdot g_2$. Pour obtenir cette équivalence, considérons F homotopie entre les f_i et G



homotopie entre les g_i. On pose alors

$$\begin{array}{cccc} & I^2 & \longrightarrow & X \\ H : & \left(s, t \leq \frac{1}{2}\right) & \longmapsto & F(s,2t) \\ & \left(s, t > \frac{1}{2}\right) & \longmapsto & G(s,2t-1) \end{array}$$

qui donne l'homotopie voulue. On peut donc définir pour $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(X,x)$:

$$[\alpha] \cdot [\beta] := [\alpha \cdot \beta],$$

qui est bien une loi de composition interne, de neutre $[x]$ la classe d'homotopie du chemin constant égal à x.

$[\alpha] \in \pi_1(X,x)$ a alors naturellement pour inverse la classe de

$$\bar{\alpha} : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & X \\ t & \longmapsto & \alpha(1-t) \end{array},$$

l'homotopie $\alpha \cdot \bar{\alpha} \sim x$ étant donnée par

$$\begin{array}{ccc} I^2 & \longrightarrow & X \\ (s, t \leq \frac{1}{2}) & \longmapsto & \alpha(2st) \\ (s, t > \frac{1}{2}) & \longmapsto & \alpha(2s(1-t)) \end{array},$$

et qui revient à parcourir le début de α jusqu'au temps s, puis à faire demi-tour. □

Définition 1.2.7 (Simple connexité). X est dit simplement connexe s'il est connexe par arcs, et si son groupe fondamental est trivial *i.e.* réduit à un seul élément.

Un premier exemple d'espace non simplement connexe est le cercle $\mathbb{S}^1$. On montrera qu'il a pour groupe fondamental $\mathbb{Z}$.

Exemple 1.2.8. Les boules, et plus généralement tout espace convexe de $\mathbb{R}^n$ est simplement connexe. En effet, soit X un tel espace, $x \in X$ un point de base et $\gamma \in \mathcal{C}_x$. Alors la famille $(\gamma_s)_{s \in I}$ définie par :

$$\gamma_s : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & X \\ t & \longmapsto & (1-s)\,\gamma(t) + s\,x \end{array}$$

nous donne une homotopie entre γ et le chemin constant égal à x. Ceci montre que $\pi_1(X,x)$ est réduit à un unique élément.

Proposition 1.2.9. Si X est connexe par arc, son groupe fondamental ne dépend pas du point de base.

Démonstration. Soient $x_1, x_2 \in X$ que l'on suppose connexe par arcs, montrons que $\pi_1(X,x_1)$ et $\pi_1(X,x_2)$ sont isomorphes. Soit f chemin de x_1 à x_2. On note

$$f^* : \begin{array}{ccc} \pi_1(X,x_1) & \longrightarrow & \pi_1(X,x_2) \\ [\alpha] & \longmapsto & [\bar{f} \cdot \alpha \cdot f] \end{array}.$$

On vérifie rapidement que cette application est un isomorphisme de groupe, l'inverse étant donné par $\bar{f}^*$. □

1.3 Résultats liés au groupe fondamental

On présente ici, sans forcément les démontrer, des résultats que l'on peut rapidement obtenir après avoir introduit le groupe fondamental. Des preuves explicites peuvent être trouvées dans [Hat01].

Proposition 1.3.1. $\pi_1(\mathbb{S}^1)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$ (en tant que groupes).

Il n'est pas évident de montrer que la sphère n'est pas simplement connexe, la preuve suivante utilise la notion de revêtement, que l'on étudiera dans le chapitre 3.

Démonstration. Montrons que $\pi_1(\mathbb{S}^1)$ est cyclique d'ordre infini, généré par $[\omega] := [\omega_1]$, où on note pour $n \in \mathbb{Z}$

$$\omega_n : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{S}^1 \\ t & \longmapsto & (\cos 2n\pi t, \sin 2n\pi t) \end{array}$$

(on considère $\mathbb{S}^1$ comme sous ensemble de $\mathbb{R}^2$).

Soit $[\alpha] \in \pi_1(\mathbb{S}^1)$, montrons qu'il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\alpha \sim \omega_n$. En effet : si un tel n existe, cela nous donnera que $\pi_1(\mathbb{S}^1)$ est exactement l'ensemble des $[\omega_n]$ (n parcourant $\mathbb{Z}$), *i.e.* un groupe cyclique ($[\omega_n] = [\omega]^n$) ; s'il est unique, cela nous assurera que notre groupe est d'ordre infini.

Pour ceci, on introduit la notion de revêtement. Notons

$$\phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ x & \longmapsto & (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x, x) \end{array}$$

qui représente une hélicoïde, et $\Omega := \phi(\mathbb{R})$.

Alors p la projection sur les deux premières coordonnées de Ω est appelé un revêtement de $\mathbb{S}^1$. On appelle alors relèvement de α tout chemin $\tilde{\alpha}$ de Ω tel que $p \circ \tilde{\alpha} = \alpha$. Le fait qu'il existe un unique relèvement de α peut se voir intuitivement : si on regarde l'hélicoïde du dessus, les points $\alpha(t)$ et $\tilde{\alpha}(t)$ doivent être confondus, avec comme contrainte que $\tilde{\alpha}(t)$ doit rester sur l'hélicoïde.

L'existence et l'unicité d'un tel relèvement est postulée au lemme 3.2.1 dans un cadre plus général.

Comme α est une boucle, $\tilde{\alpha}(1)$ est de la forme $(1, 0, n)$, car $p^{-1}(x) = \{1\} \times \{0\} \times \mathbb{Z}$.

On introduit

$$h : \begin{array}{ccc} I^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (s,t) & \longmapsto & (1-s)\,\pi_3 \circ \tilde{\alpha}(t) + s\,\pi_3 \circ \tilde{\omega}_n(t) \end{array},$$

où π_3 est la projection sur la troisième coordonné. Alors $H = \phi \circ h$ est une homotopie de $\tilde{\alpha}$ à $\tilde{\omega}_n$. En composant de plus par p, on obtient $[\alpha] = [\omega_n]$.

Supposons de plus que $[\alpha] = [\omega_m]$. Alors par lemme 3.2.1, $\tilde{\omega}_n(1) = \tilde{\omega}_m(1)$, et donc $n = m$. □

Théorème 1.3.2 (Théorème fondamental de l'algèbre). Tout polynôme non constant à coefficients complexes admet une racine dans $\mathbb{C}$.

Démonstration. Ce théorème bien connu peut être montré en utilisant le résultat précédent, via un raisonnement par l'absurde : si le polynôme P ne s'annule pas, il est possible de créer dans $\mathbb{C}^*$ une boucle de la forme $P \circ f$ qui s'enroule autant de fois autour de l'origine que le degré de P (pour f chemin de $\mathbb{C}$ prenant des valeurs de module suffisamment grand).

Cependant, on peut montrer en parallèle qu'une telle boucle est homotopiquement nulle. □

Théorème 1.3.3 (Point fixe de Brouwer). Soit $h : \mathbb{D}^2 \longrightarrow \mathbb{D}^2$ continue. Alors h admet un point fixe.

Démonstration. Ce résultat n'est pas constructif puisqu'il repose lui aussi sur une démonstration par l'absurde. Il se généralise en dimension supérieure (bien que plus compliqué à prouver). □

Théorème 1.3.4 (Borsuk-Ulam). Soit $f : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ continue. Alors il existe $x \in \mathbb{S}^2$ tel que $f(x) = f(-x)$.

Démonstration. Cette démonstration utilise pleinement le calcul de $\pi_1\left(\mathbb{S}^1\right)$, et l'utilisation des revêtements. Il se généralise également en dimension supérieure pour des applications $\mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$. □

Théorème 1.3.5 (Sandwich au jambon). Soient A_1, A_2 deux sous-ensembles mesurables de $\mathbb{R}^2$ (pour la mesure de Lebesgue). Alors il existe h hyperplan affine de $\mathbb{R}^2$ séparant chaque A_i en deux parties de mesures égales.

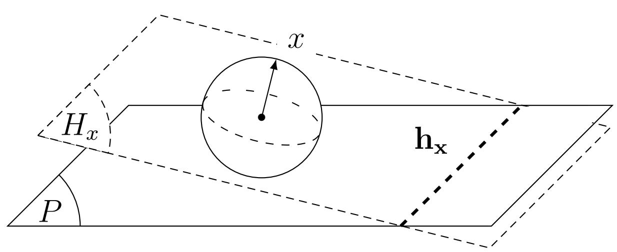
Démonstration. Ce théorème se déduit de celui de Borsuk-Ulam. On se place dans $\mathbb{R}^3$, et pour $x \in \mathbb{S}^2$, on note H_x l'hyperplan de normale x

$$H_x := \left\{y \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x, y\rangle = 0\right\}.$$

On définit également

$$H_x^+ := \left\{y \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x, y\rangle > 0\right\}$$

la moitié d'espace au dessus de H_x. On considère les A_i comme objets de $P := \mathbb{R}^2 \times \{-1\}$. On obtient alors pour tout x de $\mathbb{S}^2$ qui ne soit pas $\pm\vec{e}_3$ (troisième vecteur de la base cannonique), que H_x coupe P en une droite affine h_x.



On applique alors 1.3.4 à l'application

$$f : \begin{array}{ccccc} \mathbb{S}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \times & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lambda_2(A_1 \cap H_x^+) & , & \lambda_2(A_2 \cap H_x^+) \end{array},$$

pour obtenir $x \in \mathbb{S}^2$ tel que $f(-x) = f(x)$. Supposons que A_1 et A_2 ne sont pas tout deux de mesure nulle (sinon, n'importe quel hyperplan h convient), alors $f(\vec{e}_3) = (0, 0)$, et $f(-\vec{e}_3)$ est non nul, donc x n'est pas un des pôles, ce qui conclut. □

Remarque 1.3.6. Cette démonstration s'adapte pour des dimensions supérieures, car le théorème de Borsuk-Ulam est toujours valable. On peut ainsi partager 3 parties mesurables de $\mathbb{R}^3$. Ceci montre par exemple qu'il existe toujours un plan séparant équitablement un sandwich jambon-beurre, quelque soit sa forme.

1.4 Groupes d'homotopie supérieurs

On a construit dans les sections précédente le groupe fondamental, ou premier groupe d'homotopie. Cependant, il ne permet pas de différencier tout les espaces non équivalents topologiquement. On peut par exemple montrer que $\mathbb{S}^2$ a un groupe fondamental trivial tout comme $\mathbb{R}^2$. Pour différencier de tels espaces, on introduit les groupes d'homotopie supérieurs : au lieu de travailler avec des chemins $I \longrightarrow X$, on utilise des surfaces $I^2 \longrightarrow X$, puis des volumes *etc.*

Définition 1.4.1. Soit X espace topologique, $n \in \mathbb{N}$ et $x \in X$. On note

$$\mathcal{C}_x^n := \{f : I^n \longrightarrow X \mid f(\partial I^n) = \{x\}\}.$$

Pour rappel, ∂I^n désigne le bord de I^n, soit l'ensemble des points de I^n dont au moins une des composantes vaut 0 ou 1.

Construction 1.4.2 (Groupes d'homotopie). Soit X espace topologique, $n \in \mathbb{N}$ et $x \in X$ fixé. On appelle n-ème groupe d'homotopie de X, de point de base x, $\mathcal{C}_x^n$ que l'on quotiente par la relation d'homotopie relativement à ∂I_n. On le note $\pi_n(X, x)$.

De même qu'on avait défini une opération de concaténation dans le cas $n = 1$, on définit pour $f, g \in \mathcal{C}_x^n$:

$$\begin{array}{rccc} & I^n & \longrightarrow & X \\ f \cdot g : & (t_1 \leq \frac{1}{2}, t_2, \cdots, t_n) & \longmapsto & f(2t_1, t_2, \cdots, t_n) \\ & (t_1 > \frac{1}{2}, t_2, \cdots, t_n) & \longmapsto & g(2t_1 - 1, t_2, \cdots, t_n) \end{array}$$

Ce qui revient à coller deux I^n côte à côte suivant la première coordonée. En réutilisant le raisonnement effectué dans le cas $n = 1$, on obtient que $\pi_n(X, x)$ est un groupe pour la loi étendue aux classe d'homotopie.

Proposition 1.4.3. Pour $n \geq 2$, $\pi_n(X, x)$ est abélien.

Démonstration. Ce résultat découle directement de l'argument d'Eckmann-Hilton (voir ci-après), que l'on peut appliquer à $\pi_n(X, x)$ dès $n = 2$, en utilisant comme deuxième opération un recollement suivant n'importe quelle autre coordonée que la première. □

Lemme 1.4.4 (Argument de Eckmann-Hilton). Soit M monoïde, muni de lois de composition interne + et $\times$ admettant chacune un élément neutre, respectivement 0 et 1, et telles que pour tout a, b, c et $d \in M$,

$$(a + b) \times (c + d) = (a \times c) + (b \times d). \tag{$*$}$$

Alors + et $\times$ sont les mêmes lois (en particulier 0=1). De plus cette loi est commutative et associative.

Démonstration. On utilise pour cette démonstration uniquement $(*)$ ainsi que les neutres. Commençons par montrer que 0=1 :

$$0 = 0 + 0 = (0 \times 1) + (1 \times 0) \overset{(*)}{=} (0 + 1) \times (1 + 0) = 1 \times 1 = 1.$$

On note donc dans la suite e le neutre pour ces deux lois. Soit $a, b \in M$, on peut parcourir le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
a \times b \arrow[r, dash] & (a + e) \times (e + b) \arrow[r, dash, "(*)"] & (a \times e) + (e \times b) \arrow[r, dash] & a + b \arrow[dl, dash, bend left] \\
b \times a \arrow[r, dash] & (e + b) \times (a + e) \arrow[r, dash, "(*)"] & (e \times a) + (b \times e) &
\end{tikzcd}$$

qui nous donne l'égalité des lois, et la commutativité de $\times$. On en déduit l'associativité :

$$(a \times b) \times c = (a + b) \times (e + c) \overset{(*)}{=} (a \times e) + (b \times c) = a \times (b \times c).$$

$\square$

Chapitre 2

Théorie des catégories

On présente ici quelques bases et premiers résultats de théorie des catégories. Elle permet de décrire formellement les liens entre différents objets mathématiques. Cette approche sera succincte : quelques définitions et propriétés, qui seront utiles pour parler de revêtements dans le chapitre suivant.

2.1 Catégorie

Une première intuition est de penser à une catégorie comme à un graphe. On se donne un ensemble de points (potentiellement non fini), et on y accroche des arrêtes orientées (on parle donc de "morphismes"). On s'autorise les arrêtes bouclant sur un même sommet, ainsi que plusieurs arrête distinctes ayant les mêmes but et source, et on demande quelques axiomes sur ces arrêtes.

Donnons une définition plus formelle :

Définition 2.1.1. Une catégorie $\mathbf{C}$ est la donnée d'une collection (ou classe) d'objets, et d'une collection de morphismes définis sur les objets de la catégorie. On note Obj la collection des objets de $\mathbf{C}$, et pour $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$, on note $\mathrm{Hom}(A, B)$ la classe des morphismes de A vers B.

On demande de plus quelques propriétés sur ces morphismes :

(*i*) Pour tout $A \in \mathbf{C}$, on a existence d'un élément identité id_A dans $\mathrm{Hom}(A, A)$;

(*ii*) Pour $\phi \in \mathrm{Hom}(A, B)$ et $\psi \in \mathrm{Hom}(B, C)$, il existe un élément noté $\psi \circ \phi \in \mathrm{Hom}(A, C)$, tel que la composition ainsi définie vérifie les deux axiomes suivants.

- $\star$ id est neutre : pour $\phi \in \mathrm{Hom}(A, B)$ on a $\mathrm{id}_B \circ \phi = \phi \circ \mathrm{id}_A = \phi$,
- $\star$ la composition est associative : pour $\phi \in \mathrm{Hom}(A, B)$, $\psi \in \mathrm{Hom}(B, C)$ et $\chi \in \mathrm{Hom}(C, D)$, $\chi \circ (\psi \circ \phi) = (\chi \circ \psi) \circ \phi$.

Exemple 2.1.2. Un premier exemple de catégorie, que l'on réutilisera souvent par la suite, est la catégorie des espaces topologiques. Ses objets sont tous les espaces topologiques, et ses morphismes sont les applications continues entre espaces topologiques. On note $\mathbf{Top}$ cette catégorie.

Exemple 2.1.3. On peut également parler de $\mathbf{Grp}$ la catégorie des groupes : ses objets sont les groupes, ses morphismes sont les morphismes de groupes.

On disposera toujours de morphisme, on peut donc donner une définition simple d'un isomorphisme.

Définition 2.1.4 (Isomorphisme). On dit que $\phi \in \mathrm{Hom}(A, B)$ est un isomorphisme de $\mathbf{C}$, s'il existe $\psi \in \mathrm{Hom}(B, A)$ tel que $\psi \circ \phi = \mathrm{id}_A$ et $\phi \circ \psi = \mathrm{id}_B$. Dans ce cas, A et B sont dits isomorphes.

Exemple 2.1.5. Soit G un groupe de loi $*$. On peut réaliser G comme une catégorie contenant un seul objet, et un morphisme pour chaque élément de G. Pour g, h des éléments de G, vu comme des morphismes dans la catégorie, $g \circ h$ est naturellement défini comme le morphisme représentant $g * h \in G$.

On peut utiliser le même procédé pour faire d'un monoïde une catégorie. La seule différence sera alors que pour un groupe, tout les morphismes seront des isomorphismes. Ce qui ne sera pas forcément le cas pour un monoïde. Ceci se retrouve dans $\mathbf{Top}$: il n'y a pas de raison que tout ses morphismes soit des applications bijectives bicontinues.

Si on voit une catégorie comme un graphe orienté, on peut se rendre compte sur des exemples qu'en changeant le sens de toutes les flèches, on obtient de nouveau une catégorie, les axiomes sont préservés.

Définition 2.1.6 (Catégorie duale). Soit $\mathbf{C}$ une catégorie. On note $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$, et on appelle catégorie duale (ou catégorie opposée) de $\mathbf{C}$, la catégorie formée des mêmes objets, et en posant pour $A, B \in \mathbf{C}$: $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}(A, B) := \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(B, A)$

Par exemple pour G un groupe vu comme une catégorie, la catégorie $\mathbf{G}^{\mathrm{op}}$ associée est celle des inverses des éléments de G. On associe donc à $g \in G$ le morphisme g^{-1}, et à l'élément $g * h$ le morphisme $h^{-1} \circ g^{-1}$.

Définition 2.1.7 (Sous-catégorie). On appelle sous-catégorie de $\mathbf{C}$ toute catégorie $\mathbf{D}$ dont les morphismes et objets sont des morphismes et objets de $\mathbf{C}$.
Une sous-catégorie $\mathbf{D}$ de $\mathbf{C}$ est dite **pleine** si pour tout $A, B \in \mathbf{D}$, les morphismes de A vers B sont les mêmes dans $\mathbf{C}$ et dans $\mathbf{D}$. C'est à dire que $\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(A, B) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B)$.

Exemple 2.1.8. On peut par exemple s'intéresser à la catégorie des entiers ordonnés. Son ensemble d'objet est $\mathbb{Z}$, et l'ensemble des morphismes représente la relation d'ordre total $\leq$: pour tout $n, m \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{Hom}(n, m)$ contient un seul élément si $n \leq m$, et est vide sinon.
Si on définie par analogie la catégorie des entiers *naturels* ordonnés, on obtient une sous-catégorie pleine de la première.

On peut par analogie avec le produit cartésien définir un produit sur les topologies. Pour

$\mathbf{C}_1$ et $\mathbf{C}_2$ des catégories, les objets de $\mathbf{C}_1 \times \mathbf{C}_2$ sont les $C_1 \times C_2$, où C_i parcourt $\mathbf{C}_i$. De même les morphismes sont les (ϕ_1, ϕ_2).

2.2 Foncteurs

Une notion importante en théorie des catégories est celle de foncteur. Un foncteur joue le rôle de morphisme entre les catégories. Certains foncteurs permettent ainsi de transporter une structure intéressante d'une catégorie à une autre.
Par exemple, on sait que les matrices et les applications linéaires entre espaces vectorielles de dimension finie sont intimement liées. On peut exprimer ce résultat sous forme d'un foncteur, voir [Hat01], p28.

Définition 2.2.1 (Foncteur). Soient $\mathbf{C}_1$ et $\mathbf{C}_2$ des catégories. Un foncteur covariant F de $\mathbf{C}_1$ vers $\mathbf{C}_2$ est un procédé, qui à tout objet A de $\mathbf{C}_1$ associe $F(A) \in \mathbf{C}_2$, et qui à un morphisme de $\mathbf{C}_1$ $\phi \in \mathrm{Hom}(A, B)$ associe $F(\phi) \in \mathrm{Hom}(F(A), F(B))$ morphisme de $\mathbf{C}_2$, de telle sorte que F envoie l'identité sur l'identité, et que la composition soit préservée.
On appelle foncteur contravariant de $\mathbf{C}_1$ vers $\mathbf{C}_2$, un foncteur de $\mathbf{C}_1$ vers ${\mathbf{C}_2}^{\mathrm{op}}$.

Exemple 2.2.2. Parmis les foncteurs, on a par exemple le foncteur id, qui envoie une catégorie sur elle même. On peut également citer le foncteur d'oubli, qui envoie une catégorie dans une autre, en "oubliant" certaines propriétés de la catégorie de départ.
On a ainsi un foncteur d'oubli de **Top** vers **Ens** la catégorie des ensembles (ses foncteurs sont les application entre ensembles), qui à un espace topologique associe l'espace, en oubliant la topologie.

Exemple 2.2.3 (Foncteur Hom). Soit $\mathbf{C}$ une catégorie dont chaque collection de morphismes est un ensemble. Le foncteur Hom est un autre exemple de foncteur dont on se servira par la suite : soit $A \in \mathbf{C}$, on défini $\mathrm{Hom}(A, \cdot) : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{Ens}$ le procédé qui à $B \in \mathbf{C}$ associe $\mathrm{Hom}(A, B)$, et qui à $\phi \in \mathrm{Hom}(B, C)$ associe

$$\mathrm{Hom}(A, \phi) : \begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(A, B) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(A, C) \\ f & \longmapsto & \phi \circ f \end{array}.$$

Ce foncteur est covariant, on définit de la même manière $\mathrm{Hom}(\cdot, A)$ un foncteur contravariant.

Les foncteurs étant des morphismes pour une certaine catégorie (celle des catégories), on peut parler de foncteurs isomorphes.

Définition 2.2.4. Soient $\mathbf{C}_1$ et $\mathbf{C}_2$ deux catégories. On dit que $\mathbf{C}_1$ et $\mathbf{C}_2$ sont isomorphes s'il existe F et G foncteurs, respectivement $\mathbf{C}_1 \to \mathbf{C}_2$ et $\mathbf{C}_2 \to \mathbf{C}_1$, tels que $F \circ G = \mathrm{id}_{\mathbf{C}_2}$ et $G \circ F = \mathrm{id}_{\mathbf{C}_1}$.

On définit de façon évidente la composition $F \circ G$ comme le foncteur qui procède à l'action de G puis à celle de F.

Définition 2.2.5 (Morphisme de foncteur). Soient $\mathbf{C}_1$ et $\mathbf{C}_2$ deux catégories. Soient $F, G : \mathbf{C}_1 \to \mathbf{C}_2$ deux foncteurs. Un morphisme de foncteurs (aussi appelé transformation naturelle), entre F et G est une collection de morphismes $\Phi_X : F(X) \to G(X)$ pour X objet de $\mathbf{C}_1$, telle que pour tout $\phi \in \mathrm{Hom}(A, B)$ le diagramme a commute.

$$(a) \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{F(A)} \arrow[r, "\Phi_A"] \arrow[d, "F(\phi)"] & \mathrm{G(A)} \arrow[d, "G(\phi)"] \\ \mathrm{F(B)} \arrow[r, "\Phi_B"'] & \mathrm{G(B)} \end{tikzcd}$$

On note alors $\Phi : F \to G$.
On dit de plus que Φ est un isomorphisme si pour tout $A \in \mathbf{C}_1$, Φ_A est un isomorphisme. Dans ce cas, on notera plutôt $F \cong G$

On utilise ces morphismes de foncteurs pour introduire deux notions importantes, l'équivalence entre catégories, ainsi que les foncteurs représentables. La première ressemble à l'homotopie entre espaces topologiques de par sa construction (voir définition 1.1.3).

Définition 2.2.6 (Équivalence entre catégories). Soient $\mathbf{C}_1$ et $\mathbf{C}_2$ deux catégories. On dit que $\mathbf{C}_1$ et $\mathbf{C}_2$ sont équivalentes s'il existe $F : \mathbf{C}_1 \to \mathbf{C}_2$ et $G : \mathbf{C}_2 \to \mathbf{C}_1$ deux foncteurs, tels que $F \circ G \cong \mathrm{id}_{\mathbf{C}_2}$ et $G \circ F \cong \mathrm{id}_{\mathbf{C}_1}$.

Définition 2.2.7 (Foncteur représentable). Soit $\mathbf{C}$ une catégorie, et $\mathrm{F} : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{Ens}$ un foncteur. S'il existe $A \in \mathbf{C}$ tel que $\mathrm{F} \cong \mathrm{Hom}(A, \cdot)$, on dit que F est représentable par A.

2.3 Quelques résultats

On énonce, sans les prouver, des résultats utilisés dans le chapitre 3. Des preuves peuvent être trouvées dans [Sza08]. Commençons par introduire quelques définitions.

Définition 2.3.1. Soit $F : \mathbf{C}_1 \longrightarrow \mathbf{C}_2$ foncteur. On dit que F est :

- ⋆ Fidèle si pour tout $A, B \in \mathbf{C}_1$, l'application $\mathrm{F}_{A,B} : \mathrm{Hom}(A, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathrm{F}(A), \mathrm{F}(B))$ induite par F est injective ;
- ⋆ Pleinement fidèle si les $\mathrm{F}_{A,B}$ sont bijectives ;
- ⋆ Essentiellement surjectif si pour tout $C \in \mathbf{C}_2$, il existe $A \in \mathbf{C}_1$ tel que C soit isomorphe à $\mathrm{F}(A)$.

Lemme 2.3.2. Soient $\mathbf{C}_1$ et $\mathbf{C}_2$ deux catégories. Elles sont équivalentes *ssi* il existe $F : \mathbf{C}_1 \longrightarrow \mathbf{C}_2$ foncteur pleinement fidèle et essentiellement surjectif.

Soit $\phi : B \longrightarrow A$ morphisme. Alors il induit par composition à droite un morphisme de foncteur $\mathrm{Hom}(B, \cdot) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A, \cdot)$. On a une réciproque de cette construction :

Lemme 2.3.3 (Yoneda). Soit $\mathbf{C}$ catégorie, et soient $\mathrm{F}, \mathrm{G} : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{Ens}$ deux foncteurs représentables par A et B des objets de $\mathbf{C}$. Alors il existe un unique $\phi : B \longrightarrow A$ qui engendre le morphisme de foncteur $\mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{G}$ construit ci-dessus.

Chapitre 3

Classification des revêtements

On avait utilisé en 1.3.1 un revêtement, l'objectif de cette section est d'en étudier la théorie. On commence par donner une définition claire, puis on se concentre sur certains types de revêtements. Ceci permettra d'en faire une classification partielle, à l'aide de la théorie des catégories.

Dans tout ce chapitre, X, Y et Z désigneront des espaces topologiques.

3.1 Revêtements

Rappelons la définition d'un revêtement.

Définition 3.1.1 (Revêtement). Soit $p : Y \longrightarrow X$ Une application continue. On dit que p est un revêtement de X si :
Pour tout $x \in X$, il existe V voisinage ouvert de x dans X, et $(U_j)_{j \in J}$ une famille d'ouverts disjoints de Y tels que :

- ⋆ $p^{-1}(V) = \bigsqcup_{j \in J} U_j$;
- ⋆ Pour tout $j \in J$, l'application $U_j \longrightarrow V$ induite par p est un homéomorphisme.

On supposera dans la suite Y non vide, de telle sorte que p est automatiquement surjective. On peut remarquer également qu'un revêtement est automatiquement une application ouverte : il envoie un ouvert sur un ouvert, du fait qu'il soit un homéomorphisme local.

Remarque 3.1.2. On peut en fait construire, à X fixé, la catégorie des revêtements de X, que l'on note $\mathbf{Rev}(X)$. On écrira alors parfois Y pour désigner $p : Y \longrightarrow X$ un revêtement.

Les morphismes de p vers $q : Z \longrightarrow X$ sont les applications $f : Y \longrightarrow Z$ continues, telles que $q \circ f = p$. Cela revient à faire commuter le diagramme b :

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & Z \arrow[dl, "q"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

b

On dit alors que f préserve les revêtements.
La composition entre morphisme est définie comme composition en tant que fonctions, et l'élément neutre est bien évidement id_p.

Exemple 3.1.3. Soit J un espace topologique discret (*i.e.* muni de la topologie discrète). Si on munit $X \times J$ de la topologie produit, on obtient un revêtement de X (en projetant sur la première composante), appelé revêtement trivial. Pour $x \in X$, $p^{-1}(x)$, appelé **fibre** au dessus de x, est $\{x\} \times J$.

Les revêtements triviaux peuvent servir à caractériser localement les revêtements :

Proposition 3.1.4. Soit $p : Y \longrightarrow X$ continue. Alors p est un revêtement *ssi* pour tout $x \in X$, il existe V voisinage ouvert de x dans X tel que l'application continue $\tilde{p} : p^{-1}(V) \longrightarrow V$, induite par restriction de p, est isomorphe à un revêtement trivial.

Ici, l'isomorphisme est au sens des catégories. En effet, notons $\mathbf{Top}(X)$ la catégorie des applications continues à valeurs dans X. Les morphismes de cette catégorie étant les morphismes d'applications continues faisant commuter le même diagramme que celui de la remarque 3.1.2. On remarquera que $\mathbf{Rev}(X)$ est une sous-catégorie de $\mathbf{Top}(X)$.

Démonstration. Soit $p : Y \longrightarrow X$ continue.

Supposons que p est un revêtement, soit $x \in X$. Soient V et $(U_j)_{j \in J}$ satisfaisant la définition 3.1.1. On pose $f : \bigsqcup_{j \in J} U_j \longrightarrow V \times J$ qui envoie $x \in U_j$ sur (x, j). Ceci est défini car l'union est disjointe, et c'est un isomorphisme de revêtements entre p et π_1, la projection sur la première coordonnée. Voir diagramme c.

Sous la deuxième assertion, montrons réciproquement que p est un revêtement. Soit $x \in X$, et V qui satisfait la deuxième assertion. On a alors existence d'un f isomorphisme, et d'un J discret tels que le diagramme d commute. Pour $j \in J$, on note $U_j := f^{-1}(V \times \{j\})$. Alors par isomorphisme de f, $\tilde{p}^{-1}(V) = \bigsqcup_{j \in J} U_j$. Finalement, pour $j \in J$, l'application $U_j \longrightarrow V$ induite par $\tilde{p}$ est l'application induite par $\pi_1 \circ f$, qui est bien un homéomorphisme car π_1 revêtement et f homéomorphisme. Ceci est vrai pour tout x, et p est un revêtement.

$$\begin{tikzcd} \bigsqcup_{j \in J} U_j \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & V \times J \arrow[dl, "\pi_1"] \\ V & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \tilde{p}^{-1}(V) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\tilde{p}"'] & V \times J \arrow[dl, "\pi_1"] \\ V & \end{tikzcd}$$

c d

□

Proposition 3.1.5. Si G agit proprement discontinuement sur Y espace topologique connexe, alors la projection canonique $\pi_G : Y \longrightarrow G\backslash Y$ est un revêtement.

Voir B.3 en annexe pour la définition d'action proprement discontinue.

Démonstration. Voir [Sza08] p.39. □

On énonce ici un résultat sans le montrer, voir [Sza08] p.40 pour une démonstration.

Lemme 3.1.6. Soit $p : Y \longrightarrow X$ revêtement, et Z un espace topologique connexe. Soient de plus $f, g : Z \longrightarrow Y$ continues telles que $p \circ f = p \circ g$. S'il existe $z \in Z$ tel que $f(z) = g(z)$, alors $f = g$.

3.2 Action de monodromie

On construit ici quelques objets utiles pour les prochaines sections. Notamment l'action de monodromie et le foncteur fibre.

On va montrer ici que pour $p : Y \longrightarrow X$ un revêtement et x un point de base, le groupe fondamental $\pi_1(X, x)$ agit sur $p^{-1}(x)$ la fibre au-dessus de x. On commence par montrer un lemme utile.

Lemme 3.2.1. Soit $y \in p^{-1}(x)$, alors :

(*i*) Soit $f : I \longrightarrow X$ chemin tel que $f(0) = x$. Alors il existe un unique $\tilde{f} : I \longrightarrow Y$ relèvement de f tel que $\tilde{f}(0) = y$;

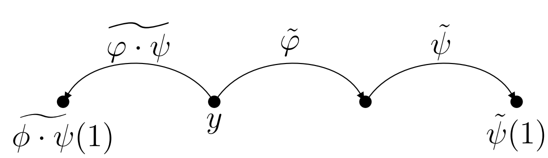
(*ii*) Si on se donne de plus g chemin homotope à f, alors l'unique $\tilde{g}$ donné par le point précédent est tel que : $\tilde{g}(1) = \tilde{f}(1)$.

Démonstration. On admet ce résultat dont la preuve est technique. Voir [Sza08]. □

Construction 3.2.2 (Action de monodromie). Soit $\Phi = [\varphi] \in \pi_1(X, x)$, et $y \in p^{-1}(x)$. On note $\Phi y := \tilde{\varphi}(1)$, où $\tilde{\varphi}$ désigne le relêvement défini au précédent lemme. Cette définition à du sens d'après le second point du lemme, le point d'arrivé ne dépendant pas du représentant de Φ choisi.

On a alors $\Phi y \in p^{-1}(x)$ (φ est une boucle). De plus si on se donne $\Psi = [\psi]$ un autre élément du groupe fondamental, on a $([\varphi] \cdot [\psi])y = [\psi]([\varphi]y)$, et on définit ainsi une action à droite de $\pi_1(X, x)$ sur $p^{-1}(x)$, appelée action de monodromie.

Remarque 3.2.3. Pour obtenir la dernière égalité, explicitons chacun des termes. $([\varphi] \cdot [\psi])y = \widetilde{\varphi \cdot \psi}(1)$, où $\widetilde{\varphi \cdot \psi}(0) = y$. D'autre part, $[\psi]([\varphi]y) = \tilde{\psi}(1)$, où $\tilde{\psi}(0) = \tilde{\varphi}(1)$ et où $\tilde{\varphi}(0) = y$.



On a alors deux relèvement de $\varphi \cdot \psi$ commençant en y : $\widetilde{\varphi \cdot \psi}$ (c'est trivial), et $\tilde{\varphi} \cdot \tilde{\psi}$. En effet appliquer p à la concaténation de deux chemins revient à concaténer les projections des deux chemins. D'après le lemme 3.2.1, on obtient $\tilde{\psi}(1) = \widetilde{\varphi \cdot \psi}$, soit l'égalité voulue.

On va à partir de maintenant énoncer la plupart des énoncés dans le langage des catégories. On introduit pour cela une définition simple :

Définition 3.2.4. Soit G un groupe, on note $\mathbf{Ens} - G$ la sous-catégorie de $\mathbf{Ens}$, constituée des ensembles munis d'une G-action à droite.

Définition 3.2.5 (Foncteur fibre). Soit X espace topologique et soit $x \in X$ fixé. On défini $\mathrm{Fib}_x : \mathbf{Rev}(X) \longrightarrow \mathbf{Ens} - \pi_1(X, x)$ le foncteur fibre de point de base x, le procédé qui à p un revêtement de X associe $p^{-1}(x)$ (muni de l'action de monodromie), et qui à $\phi \in \mathrm{Hom}(p, q)$ associe sa restriction sur les fibres au dessus de x.

3.3 Revêtement universel

Définition

Dans cette section, on supposera X connexe et localement simplement connexe. On construit puis étudie un revêtement de X, appelé revêtement universel.

Construction 3.3.1 (Revêtement universel). Soit $x \in X$ un point de base fixé. On note :

$$\tilde{X}_x := \{[\gamma] \mid \gamma \in \mathcal{C}, \gamma(0) = x\}.$$

C'est à dire l'ensemble des chemins partants de x, quotienté par la relation d'homotopie de chemins.

On définit ensuite

$$\pi_x : \begin{array}{ccc} \tilde{X}_x & \longrightarrow & X \\ [\gamma] & \longmapsto & \gamma(1) \end{array}.$$

Cette application est bien définie, car par définition de la classe d'homotopie, pour $[f] = [g]$, on a $f \sim g \text{ rel } \{0, 1\}$, et donc $f(1) = g(1)$. C'est cette application que l'on appellera revêtement universel.

Enfin, munissons $\tilde{X}_x$ d'une topologie, que l'on construit à partir de celle de X. Soit $[\gamma] \in \tilde{X}_x$, et soit U voisinage simplement connexe de $y := \gamma(1) = \pi_x([\gamma])$. On pose

$$\tilde{U}_{[\gamma]} := \{[\gamma \cdot \eta] \mid \eta \in \mathcal{C},\ \eta(0) = y,\ \eta(I) \subset U\}.$$

Ce procédé de construction induit une base de voisinages de $[\gamma]$: soit U, V voisinages simplement connexes de y, alors il existe $W \subset U \cap V$ un voisinage simplement connexe de y, qui nous fournit $\tilde{W}_{[\gamma]} \subset \tilde{U}_{[\gamma]} \cap \tilde{V}_{[\gamma]}$.

Proposition 3.3.2. $\pi_x : \tilde{X}_x \longrightarrow X$ défini ci-dessus est un revêtement.

Démonstration. Commençons par montrer que π_x est continue. Soit U ouvert de X, alors

$$\pi_x^{-1}(U) = \left\{[\gamma] \in \tilde{X}_x \mid \gamma(1) \in U\right\}.$$

Soit $[\gamma]$ un élément de cet ensemble, et $V \subset U$ voisinage ouvert de $y := \pi_x([\gamma])$. alors $[\gamma] \in \tilde{V}_{[\gamma]}$, donc $[\gamma]$ est dans l'intérieur de $\pi_x^{-1}(U)$, qui par conséquent est ouvert.

Montrons maintenant que π_x respecte les deux propriétées des revêtements :
Soit $y \in X$, et V voisinage ouvert simplement connexe de y dans X. On note $\left(U_{[\gamma]}\right)_{[\gamma]} := \left(\tilde{V}_{[\gamma]}\right)_{[\gamma]\in\pi_x^{-1}(y)}$.

- $\star$ On a bien $\pi_x^{-1}(V) = \bigsqcup_{[\gamma]} U_{[\gamma]}$. Le fait que l'union soit disjointe vient de la simple-connexité de V : soient $[\gamma_1] \neq [\gamma_2]$. Supposons par l'absurde que $U_{[\gamma_1]} \cap U_{[\gamma_2]} \neq \emptyset$. Il existe donc η_1 et η_2 deux chemins de V commençant en y et tels que :

  $$[\gamma_1 \cdot \eta_1] = [\gamma_2 \cdot \eta_2].$$

  Ceci implique immédiatement :

  $$[\bar{\gamma}_2 \cdot \gamma_1] = [\eta_2 \cdot \bar{\eta}_1],$$

  ce qui est absurde car le second terme est nul (V simplement connexe) tandis que le premier ne l'est pas.

  Pour l'égalité, on procède par double inclusion, $\subset$ s'obtient pour $[\gamma] \in \pi_x^{-1}(V)$ grâce à $[\gamma] \in U_{[\gamma]}$, et $\supset$ vient de $\pi_x(U_{[\gamma]}) \subset V$, qui découle lui-même de la définition de $U_{[\gamma]}$.

- $\star$ Pour $[\gamma]$ fixé, la restriction $\pi_x : U_{[\gamma]} \longrightarrow V$ est un homéomorphisme. Elle est tout d'abord injective car V est simplement connexe : si on a $\pi_x([\gamma \cdot \eta_1]) = \pi_x([\gamma \cdot \eta_2])$, alors $\eta_1(1) = \eta_2(1)$, ce qui donne que ces deux chemins ont même classe d'homotopie.

  Elle est également surjective car V connexe par arc (V simplement connexe). Pour $z \in V$, il existe donc η chemin de y à z dans V, et $[\gamma \cdot \eta]$ est un antécédent de z.

  On montre enfin que π_x est une application ouverte pour conclure. Soit $\tilde{U}$ ouvert de $\tilde{X}_x$. On note $U := \pi_x(\tilde{U})$, et soit $y \in U$. Il existe alors $[\beta] \in \tilde{U}$ antécédent de y, et $\tilde{V}$ un voisinage autour de $[\beta]$, et inclus dans $\tilde{U}$. Alors $\pi_x(\tilde{V})$ est un voisinage de y inclus dans U. Ceci fait de U un ouvert et permet de conclure.

$\square$

On appellera dans la suite **élément universel** et on notera $[x]$, la classe d'homotopie associé au chemin constant égal à x.

Proposition 3.3.3. $\tilde{X}_x$ est connexe par arcs.

Démonstration. On va simplement relier par un chemin chaque point de $\tilde{X}_x$ à $[x]$. Soit donc $[\gamma] \in \tilde{X}_x$. Notons pour $s \in I$

$$\gamma_s : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & X \\ t & \longmapsto & \gamma(ts) \end{array}$$

qui est continue car $(t,s) \in I^2 \mapsto ts$ l'est, puis

$$\phi : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \tilde{X}_x \\ s & \longmapsto & [\gamma_s] \end{array}.$$

On obtient alors $\phi(0) = [x]$ et $\phi(1) = [\gamma]$, il reste à montrer que ϕ est continue pour conclure.

Soit $\tilde{U}$ ouvert de $\tilde{X}_x$. Si $\forall s \in I, [\gamma_s] \notin \tilde{U}$, alors $\phi^{-1}(\tilde{U}) = \emptyset$. Sinon, soit $s \in \phi^{-1}(\tilde{U})$. Alors $[\gamma_s] \in \tilde{U}$, il existe donc $\tilde{V}_{[\gamma]}$ voisinage inclus dans $\tilde{U}$. Par continuité de γ, il existe $\eta > 0$ tel que pour $t \in]s-\eta, s+\eta[$, on a $\gamma(t) \in V$. Pour un tel t on a donc également $\phi(t) = [\gamma_t] \in \tilde{V}$

Ainsi, $]s-\eta, s+\eta[\subset \phi^{-1}(\tilde{U})$, et t est dans l'intérieur de $\phi^{-1}(U)$. □

Représentabilité

Proposition 3.3.4. Le foncteur fibre Fib_x défini en 3.2.5 est représentable par $\pi_x : \tilde{X}_x \longrightarrow X$ le revêtement universel.

Démonstration. On cherche Φ un isomorphisme de foncteur entre Fib_x et $\mathrm{Hom}(\tilde{X}_x, \cdot)$. Cette transformation naturelle doit tout d'abord vérifier que pour tout $p : Y \longrightarrow X$ et $q : Z \longrightarrow X$ des revêtement, et pour tout $f \in \mathrm{Hom}(p,q)$, le diagramme e commute.

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(x) \arrow[r, "\Phi_p"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "e"] & \mathrm{Hom}(\tilde{X}_x, Y) \arrow[d, "f \circ \cdot"] \\ q^{-1}(x) \arrow[r, "\Phi_q"'] & \mathrm{Hom}(\tilde{X}_x, Z) \end{tikzcd}$$

Pour cela, il suffit de montrer que pour tout $y \in p^{-1}(x)$, les diagrammes f, g et h commutent. En effet, f donne que $\Phi_p(y)$ est bien un morphisme de revêtement et h nous assure que e commute.

f On pose

$$\Phi_p(y) : \begin{array}{ccc} \tilde{X}_x & \longrightarrow & Y \\ [\gamma] & \longmapsto & \tilde{\gamma}(1) \end{array},$$

où $\tilde{\gamma}(1)$ est l'unique relèvement (dans Y) de γ tel que $\tilde{\gamma}(0) = y$ (voir lemme 3.2.1). Alors $p \circ \Phi_p(y)\left([\gamma]\right) = p\left(\tilde{\gamma}(1)\right) = \gamma(1) = \pi_x([\gamma])$, et f commute ;

g C'est la même preuve que le point précédent ;

$$
\begin{tikzcd}
Y \arrow[rr, bend left, "f"] \arrow[ddr, bend right, "p"'] \arrow[rr, phantom, "h"'] \arrow[ddr, phantom, "f"] & & Z \arrow[ddl, bend left, "q"] \arrow[ddl, phantom, "g"'] \\
& \tilde{X}_x \arrow[ul, "\Phi_p(y)"] \arrow[ur, "\Phi_q(f(y))"'] \arrow[d, "\pi_x"] & \\
& X &
\end{tikzcd}
$$

h Soit $[\gamma] \in \tilde{X}_x$. Alors $f \circ \Phi_p(y)([\gamma]) = f \circ \tilde{\gamma}(1)$, où $\tilde{\gamma}$ relèvement de γ dans Y tel que $\tilde{\gamma}(0) = y$. De plus, $\Phi_q(f(y))(\gamma) = \tilde{\tilde{\gamma}}(1)$, où $\tilde{\tilde{\gamma}}$ relèvement de γ dans Z tel que $\tilde{\tilde{\gamma}}(0) = y$. Or $f \circ \tilde{\gamma}$ et $\tilde{\tilde{\gamma}}$ sont deux relèvements de γ ($q \circ f \circ \tilde{\gamma} = p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ pour le premier), donc par lemme 3.2.1 ils coincident, et h commute.

Φ ainsi défini est donc un morphisme de foncteur, montrons que c'est un isomorphisme, en exhibant un inverse. Pour $p \in \mathbf{Rev}(X)$, on note

$$\Psi_p : \begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(\tilde{X}_x, Y) & \longrightarrow & p^{-1}(x) \\ \phi & \longmapsto & \phi([x]) \end{array}.$$

- ⋆ Soit $y \in p^{-1}(x)$, alors $\Psi_p \circ \Phi_p(y) = \phi([x])$, où

  $$\phi : \begin{array}{ccc} \tilde{X}_x & \longrightarrow & Y \\ [\gamma] & \longmapsto & \tilde{\gamma}(1) \end{array}.$$

  On a donc $\phi([x]) = \tilde{x}(1)$. Or $\tilde{x}$ est un relèvement de x de point de départ y, au même titre que le chemin constant égal à y (dans Y). Ainsi $\tilde{x}(1) = y(1) = y$;

- ⋆ Soit $\phi \in \mathrm{Hom}(\tilde{X}_x, Y)$, alors

  $$\Phi_p \circ \Psi_p(\phi) : \begin{array}{ccc} \tilde{X}_x & \longrightarrow & Y \\ [\gamma] & \longmapsto & \tilde{\gamma}(1) \end{array},$$

  où $\tilde{\gamma}$ relèvement de γ tel que $\tilde{\gamma}(0) = \phi([x])$. En construisant un chemin de $[x]$ à $[\gamma]$ comme celui utilisé dans la démonstration de 3.3.3, on obtient pour $s \in I$:

  $$p \circ \phi([\gamma_s]) = \pi_x(\gamma_s) = \gamma(s),$$

  car ϕ morphisme de revêtements. $s \mapsto \phi([\gamma_s])$ est alors un relèvement de γ de même point de base que $\tilde{\gamma}$, on en déduit que $\Phi_p \circ \Psi_p(\phi) = \phi$.

□

3.4 Revêtement galoisien

Dans toute cette section, on fixe X un espace topologique localement connexe.

Définition

On va ici s'intéresser aux automorphismes de la catégorie des revêtements, $p : Y \longrightarrow X$ désignera donc un revêtement. Pour rappel, un automorphisme de p est une application continue $\phi : Y \longrightarrow Y$ telle que $p \circ \phi = p$.

Dans toute la suite, on notera $\mathrm{Aut}(Y|X)$ l'ensemble des automorphismes de p, c'est un groupe pour la composition.

Remarque 3.4.1. De par la définition d'un automorphisme, $\mathrm{Aut}(Y|X)$ agit à gauche sur Y. On a donc une application de projection canonique $\pi : Y \longrightarrow \mathrm{Aut}(Y|X)\backslash Y$.

On a en fait un peu mieux, puisque $\mathrm{Aut}(Y|X)$ agit sur chaque fibre de p :

Proposition 3.4.2. Soit $x \in X$. Alors $\mathrm{Aut}(Y|X)$ est un sous-groupe du groupe des permutations de $p^{-1}(x)$.

Démonstration. Il suffit de vérifier que chaque $\phi \in \mathrm{Aut}(Y|X)$ est une permutation de $p^{-1}(x)$. Un tel ϕ étant d'ors et déjà bijectif sur Y, vérifier que $p^{-1}(x)$ est stable par ϕ est suffisant.

Soit $\tilde{y} \in p^{-1}(x)$, alors $p \circ \phi(\tilde{y}) = p(\tilde{y}) = x$. Ainsi $\phi(\tilde{y}) \in p^{-1}(x)$. $\square$

Remarque 3.4.3. En utilisant la projection canonique sur $\mathrm{Aut}(Y|X)\backslash Y$, on peut factoriser p. Soit $y \in Y$. Il est envoyé par π sur son orbite : $\{\phi(y) \mid \phi \in \mathrm{Aut}(Y|X)\}$. Or pour tout ϕ automorphisme de p, $p \circ \phi(y) = p(y)$. On en déduit que p envoie l'orbite de y sur $\{p(y)\}$. On note alors $\bar{p}$ l'application qui envoie l'orbite de y sur $p(y)$. On obtient alors $p = \bar{p} \circ \pi$.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "p"'] & \mathrm{Aut}(Y|X)\backslash Y \arrow[dl, "\bar{p}"] \\ X & \end{tikzcd}$$

Cette application induite est en fait toujours continue, car p est continue et p_H est un homéomorphisme localement (Lemme 3.1.5).

Définition 3.4.4 (Revêtement galoisien). Soit $p : Y \longrightarrow X$ revêtement. On dit que p est galoisien si Y est connexe, et si $\bar{p}$ l'application induite par p (Remarque 3.4.3) est un homéomorphisme.

Remarque 3.4.5. Il existe un parallèle entre les revêtements galoisiens et les extensions de corps galoisiennes. On a par exemple un analogue de la propriété 3.5.1. On ne développera pas cet aspect, voir [Sza08] p.42 et p.14.

Quelques résultats

Cette partie contient quelques résultats. Les deux premiers seront utiles dans la prochaine section.

Proposition 3.4.6. Soit $p : Y \longrightarrow X$ revêtement connexe. Alors p est galoisien *ssi* l'action de $\mathrm{Aut}(Y|X)$ sur chaque fibre de p est transitive.

Démonstration. Regardons quand $\bar{p}$ est bijective. Elle est toujours surjective du fait que $p = \bar{p} \circ \pi$ et car p est surjective (voir juste après 3.1.1), reste l'injectivité pour conclure, étant donné que $\bar{p}$ est ouverte. Soient O_1 et O_2 deux orbites de Y sous l'action de $\mathrm{Aut}(Y|X)$, engendrée par y_1 et y_2 et telles que $\bar{p}(O_1) = \bar{p}(O_2) =: x$.

Si $\bar{p}$ est injective, y_1 et y_2 appartiennent à la même orbite, et il existe un automorphisme permettant de passer de l'un à l'autre. On en déduit que l'action de $\mathrm{Aut}(Y|X)$ est transitive sur $p^{-1}(x)$.

Réciproquement si l'action est transitive sur les fibres, on avait tout d'abord que y_1 et y_2 sont dans la même fibre. On en déduit par transitivité qu'il existe $\phi \in \mathrm{Aut}(Y|X)$ tel que $y_2 = \phi(y_1)$ et les orbites sont égales : $\bar{p}$ est injective. $\square$

Lemme 3.4.7. On suppose disposer de $p : Y \longrightarrow X$ revêtement, de $q : Z : X$ revêtement connexe et de $f : Y \longrightarrow Z$ application continue. Si $q \circ f$ est un revêtement, alors f également.

Démonstration. On suppose donc $p := q \circ f$ revêtement. Soit $z \in Z$, on note $x := q(z)$, et on choisit V voisinage connexe de x qui satisfasse la définition 3.1.1 d'un revêtement pour p ainsi que pour q. On se munit donc de $(U_j)_{j \in J}$ et $(V_k)_{k \in K}$ respectivement des familles de Y et Z.

Soit $j \in J$ fixé, alors $f(U_j) \subset Z$ est envoyé par q sur V. Il existe donc $k \in K$ tel que $f(U_j) \subset V_k$. Cependant, ces deux ensembles sont envoyés par q sur V de façon bijective. Ils sont donc égaux.
Ceci donne rapidement que $f(Y)$ est ouvert dans Z : pour $z \in f(Y)$, il existe j tel que $z \in f(U_j)$ qui est ouvert.
Pour montrer que f est un revêtement, on peut voir avec les notations précédentes qu'il suffit que f soit surjective. Si c'est le cas, pour tout $z \in Z$, il existera j_0 tel que $z \in f(U_{j_0}) = V_{j_0}$, et on peut donc écrire $f^{-1}(V_{j_0})$ comme une union non vide de U_j : ceux envoyé sur V_{j_0}.
Montrons donc que $f(Y) = Z$, en utilisant la connexité de Z. On a montré que $f(Y)$ est ouvert, montrons que $Z - f(Y)$ est également ouvert. Soit $z \in Z - f(Y)$, on note comme précédemment $x := q(z)$, V un voisinage connexe de x et $(V_j)_{j \in J}$ famille de Z. Il existe $j_0 \in J$ tel que $z \in V_{j_0}$, on montre que cet ouvert est inclus dans $Z - f(Y)$ pour conclure : Si au contraire il existait $z' \in V_{j_0} \cap f(Y)$, on pourrait appliquer le tout premier raisonnement de cette démonstration à z' pour obtenir que $V_{j_0} \subset f(Y)$, ce qui est impossible. $\square$

Un autre résultat intéressant qu'on ne montrera pas ici (voir [Sza08]) :

Théorème 3.4.8. Pour $x \in X$, le revêtement universel $\tilde{X}_x$ est galoisien.

3.5 Résultat d'équivalence entre catégories

Le but de cette section est de montrer le théorème 3.5.2, en utilisant les notions et résultats des sections précédentes.

Résultat de bijection entre revêtement et $\pi_1(X, x)$ ensembles :

Théorème 3.5.1. Soit $p : Y \longrightarrow X$ revêtement galoisien. Alors :

(*i*) Pour H sous-groupe de $\mathrm{Aut}(Y|X)$, il existe $p_H : H\backslash Y \longrightarrow X$ revêtement induit par p ;

(*ii*) Réciproquement, si on dispose d'un revêtement intermédiaire $q : Z \longrightarrow X$ connexe tel que

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & Z \arrow[dl, "q"] \\ X & \end{tikzcd} \tag{j}$$

(où f application continue) commute, alors f est un revêtement galoisien, et Z est isomorphe à $\mathrm{Aut}(Y|Z)\backslash Y$;

(*iii*) Ces constructions sont inverses l'une de l'autre, et de plus, q est galoisien *ssi* H est normal dans $\mathrm{Aut}(Y|X)$.

On ne montre que les deux premiers points, voir [Sza08] pour une démonstration complète.

Démonstration. Soit $p : Y \longrightarrow X$ revêtement galoisien.

(*i*) Soit $H \leq \mathrm{Aut}(Y|X)$. On obtient de l'action de $\mathrm{Aut}(Y|X)$ une action de H sur Y, on note alors p_H la projection naturelle sur $H\backslash Y$. On en déduit l'application continue $\bar{p}_H$ qui fait commuter le diagramme suivant (voir Remarque 3.4.3) :

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "p_H"] \arrow[d, "p"'] & H\backslash Y \arrow[dl, "\bar{p}_H"] \\ X & \end{tikzcd}$$

Montrons que cette application respecte la définition d'un revêtement. Soit $x \in X$. d'après 3.1.4, il existe V voisinage de x tel que la restriction de p, $p^{-1}(V) \longrightarrow V$ soit isomorphe à un revêtement de la forme $V \times J \longrightarrow V$, ce qui implique en particulier que $V \times J$ homéomorphe à $p^{-1}(V)$. On peut de plus déduire de l'action de H sur $p^{-1}(x)$ (voir 3.4.2) une action de H sur J : à chaque $j \in J$ correspond un élément de la fibre $p^{-1}(x)$. $\bar{p}_H^{-1}$ est alors isomorphe au produit de V par l'ensemble des H-orbites de J. En lui appliquant de nouveau 3.1.4, on obtient que $\bar{p}_H$ est un revêtement.

(*ii*) Soit réciproquement $q : Z \longrightarrow Y$ revêtement connexe et f continue. D'après le Lemme 3.4.7, f est un revêtement. Elle est donc ouverte, ce qui implique que Y soit connexe. D'après $3.4.6$, il suffit pour obtenir que f est galoisien de montrer que $H := \mathrm{Aut}(Y|Z)$ agit transitivement sur les fibres de f. Soit donc $z \in Z$, et y_1, y_2 deux point de $f^{-1}(z) \subset p^{-1}(q(z))$. Or p est galoisien, donc il existe $\phi \in \mathrm{Aut}(Y|X)$, tel que $y_1 = \phi(y_2)$. On peut donc conclure en montrant que $\phi \in H$, soit en montrant que $f \circ \phi = f$. Ceci est immédiat en utilisant le lemme 3.1.6, avec $g = f \circ \phi$.

$$\begin{tikzcd}
y_2 \in Y \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "f"'] & Y \ni y_1 \arrow[dl, "f"] \\
z \in Z &
\end{tikzcd}$$

$\square$

On énonce ici le théorème principal, et on donne les grandes lignes de la démonstration.

Théorème 3.5.2. Soit X un espace topologique connexe et localement simplement connexe. On fixe $x \in X$ un point de base. Alors Fib_x induit une équivalence entre $\mathbf{Rev}(X)$ et $\mathbf{Ens} - \pi_1(X, x)$.
Il envoie les revêtements connexes sur les ensembles dont la $\pi_1(X, x)$-action est transitive, et envoie les revêtements galoisiens sur les $\pi_1(X, x)/H$, où H sous-groupe normal de $\pi_1(X, x)$.

Démonstration. On ne donne que l'idée de la démonstration, voir [Sza08] pour une preuve complète.

- ⋆ Pour obtenir l'équivalence, on montre que Fib_x est pleinement fidèle et essentiellement surjectif (voir Lemme 2.3.2). Pour cela, on utilise le résultat de représentabilité de Fib_x par le revêtement universel, ainsi que le fait que celui-ci soit galoisien ;

- ⋆ La deuxième partie de l'énoncé est obtenue par le théorème 3.5.1 du début de la section.

$\square$

Annexes

A Connexités

On rapelle ici différentes notions de connexité utilisée dans les autres chapitres. On étudie également de façon succincte leurs interactions.

On note dans la suite X un espace topologiqe.

Définition A.1. On dit que X est connexe si pour tout U, V ouverts et fermés de X, tels que $X = U \sqcup V$, on a $U = X$ ou $U = \emptyset$.

Définition A.2. X est dit connexe par arcs si pour tout $x, y \in X$, il existe un chemin de x à y.

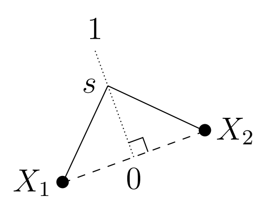
Remarque A.3. On appelle chemin de x à y toute application continue $\gamma : I \longrightarrow X$ telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(y) = 1$.

Cette seconde notion de connexité peut être affiné, en se restreignant sur les chemins autorisés :

Définition A.4. X est dit connexe par arcs $\mathcal{C}^\infty$ (respectivement par arcs polygonaux) si pour tout $x, y \in X$, il existe un chemin $\mathcal{C}^\infty$ (respectivement affine par morceaux) de x à y.

Exemple A.5. $\mathbb{R}^2 - \mathbb{Q}^2$ est connexe par arcs $\mathcal{C}^\infty$ et par arcs polygonaux.

Démonstration. Soient $X_1 \neq X_2 \in \mathbb{R}^2 - \mathbb{Q}^2$, que l'on note respectivement (x_1, y_1) et (x_2, y_2). Supposons par l'absurde que pour tout γ chemin de X_1 à X_2, il existe $t \in I$ tel que $\gamma(t) \in \mathbb{Q}^2$. Pour $s \in I$, on note γ_s le chemin affine par morceau de X_1 à X_2, et passant par un point situé sur la médiatrice de $[X_1X_2]$ et à distance s de ce segment.



Alors pour chaque $s \in I$, on obtient $\gamma_s(t_s)$ un point de $\mathbb{Q}^2$ (qui n'est donc ni X_1 ni X_2). Or les $\gamma_s(]0, 1[)$ sont disjoints, $(\gamma_s(t_s))_s \in I$ forme donc une famille non dénombrable de $\mathbb{Q}^2$, c'est absurde.

Pour le résultat avec des arcs $\mathcal{C}^\infty$, on peut utiliser des paraboles passant par les trois points. $\square$

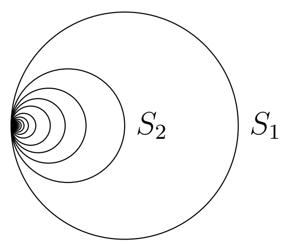
Définition A.6. X est dit simplement connexe si X est connexe par arcs, et si son groupe fondamental est trivial.

$\mathbb{S}^1$ n'est pas simplement connexe. Pourtant, il suffit de lui retirer un seul point pour la rendre simplement connexe. On introduit donc :

Définition A.7. X est dit localement simplement connexe si pour tout $x \in X$, il existe V voisinage simplement connexe de x dans X.

La sphère est donc localement simplement connexe. $\mathbb{R}^2 - \mathbb{Q}^2$, l'ensemble des points de coordonnées non rationnelles, est un exemple d'espace non localement simplement connexe. On peut étudier un autre exemple plus simple :

Exemple A.8. On se place dans $\mathbb{R}^2$, et on note (pour $n \in \mathbb{N}^*$) S_n la sphère de centre $(\frac{1}{n}, 0)$ et de rayon $\frac{1}{n}$, de sorte que les S_n se confondent toutes en l'origine. On note alors $S := \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} S_n$.



Si on se place au point $(0, 0)$, il est impossible de trouver un voisinage qui soit simplement connexe, puisqu'il contiendra tout les S_n pour n plus grand qu'un certain rang, et aura donc un groupe fondamental au moins aussi gros que celui de $\mathbb{S}^1$. Ainsi, S n'est pas simplement localement connexe.

B Groupe topologique

Définition B.1 (Groupe topologique). On appelle groupe topologique tout groupe muni d'une topologie telle la loi de composition et le passage à l'inverse soient continus pour cette topologie.

Définition B.2. Soit G groupe topologique, et soit Y espace topologique. On dite que G agit continuement sur Y si G agit sur Y (vus en tant qu'ensemble sans structure topologique), et si l'application $G \times Y \longrightarrow Y$ résultante est continue.

Définition B.3 (Action proprement discontinue). Soit G groupe topologique et Y espace topologique. On dit que G agit de façon proprement discontinue sur Y si G agit continuement sur Y, et si pour tout $y \in Y$ il existe U voisinage de y tel que les gU soient disjoint lorsque g parcourt G.

Remarque B.4. Cette dernière condition est encore équivalente à ce que pour tout $y \in Y$, il existe U voisinage de y tel que $gU \cap U \neq \emptyset$ implique $g = e$.

On définit de manière analogue les actions proprement discontinue à droite et à gauche.

C Autres résultats

On note ici deux résultats qui n'ont pas réussi à trouver leur place dans le texte.

Proposition C.1. Soit G groupe. Alors il existe X espace topologique connexe par arc tel que $\pi_1(X) = G$.

Démonstration. Ce résultat utilise les complexes cellulaires ainsi que le théorème de Van-Kampen. Une démonstration peut-être trouvée dans [Hat01]. □

Proposition C.2. Soit $n \in \mathbb{N}$, et soient $A_1, \cdots, A_n \in \mathbb{R}^{n+1}$ convexes tels que pour tout $i, j, k \in [\![1, n]\!]$ on a :

$$A_i \cap A_j \cap A_k \neq \emptyset.$$

Alors $\bigcup_i A_i$ est simplement connexe.

Bibliographie

[Hat01] Allen Hatcher. *Algebraic Topology*. 2001.

[Sza08] Tamás Szamuely. *Galois Groups and Fundamental Groups*. 2008.