

Produit de Massey et type d'homotopie des espaces de configuration

Réalisé par Lucien Grillet
Encadré par Hossein Abbaspour

Réalisé au laboratoire Jean Leray

Table des matières

1	Introduction	2
2	Notions de base	2
2.1	Algèbre homologique	2
2.2	Homologie Singulière	5
3	Autres concepts utiles	7
3.1	Revêtements et quotients	7
3.2	Homologie relative	9
3.3	Théorèmes des coefficients universels	9
3.4	Homologie des espaces produit	12
3.5	Cup-produit	13
3.6	Dualité de Poincaré	16
4	Espaces de configuration	16
4.1	Définition	16
4.2	Produit de Massey	17
4.3	Espaces lenticulaires	17
4.4	Produit de Massey nul sur $\tilde{F}_2(L_{7,1})$	18
4.5	Intersection et cup-produit	20
4.6	Produit de Massey non nul sur $\tilde{F}_2(L_{7,2})$	21

1 Introduction

L'espace de configuration $F_n(X)$ d'un espace topologique X correspond à l'espace de n points distincts évoluant dans l'espace X , il s'agit formellement de l'espace produit X^n privé des diagonales, c'est à dire du sous-espace formé des éléments de X^n ayant au moins deux coordonnées égales.

Le but de ce stage a été d'étudier le type d'homotopie de ces espaces de configurations en fonction du type d'homotopie de l'espace de départ. Plus précisément, nous nous demandons si le type d'homotopie de $F_n(X)$ ne dépend que de celui de X , dans le cas d'une variété lisse, compacte et sans bords.

Pour répondre à cette question, nous nous appuyerons essentiellement sur [6]. Cet article fournit un contre exemple à notre conjecture : les auteurs montrent que les revêtements universels des espaces de configuration des deux espaces lenticulaire $L_{7,1}$ et $L_{7,2}$ ont des produits de Massey différents. Ce raisonnement montre que les espaces de configuration de ces deux espaces (connus pour être des variétés homotopiquement équivalentes mais non homéomorphes) n'ont pas le même type d'homotopie.

2 Notions de base

2.1 Algèbre homologique

Nous commençons par introduire quelques notions d'algèbre homologique pour pouvoir définir le cadre de notre travail et pour introduire les principaux résultats.

Définition 1

Un **complexe de chaînes** (C_*, ∂) est la donnée d'une suite de groupes abéliens C_n et d'une suite de morphismes de groupes $\partial_n : C_n \rightarrow C_{n-1}$ tels que $\forall n, \partial_n \circ \partial_{n+1} \equiv 0$, c'est à dire $Im(\partial_{n+1}) \subset Ker(\partial_n)$.

$$\dots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \longrightarrow \dots$$

On définit également :

$Z_n(C) := Ker(\partial_n)$ l'ensemble des **n-cycles** de C_*

$B_n(C) := Im(\partial_{n+1})$ l'ensemble des **n-bords** de C_*

$H_n(C) := Z_n(C)/B_n(C)$ le **n-ème groupe d'homologie** de C_*

Définition 2

Un **complexe de cochaînes** (C^*, δ) est la donnée d'une suite de groupes abéliens C^n et d'une suite de morphismes de groupes $\delta^n : C^n \rightarrow C^{n+1}$ tels que $\forall n, \delta^n \circ \delta^{n-1} \equiv 0$, c'est à dire $Im(\delta^{n-1}) \subset Ker(\delta^n)$.

$$\dots \longleftarrow C^{n+1} \xleftarrow{\delta^n} C^n \xleftarrow{\delta^{n-1}} C^{n-1} \longleftarrow \dots$$

On définit également :

$Z^n(C) := Ker(\delta^n)$ l'ensemble des **n-cocycles** de C^*

$B^n(C) := Im(\delta^{n-1})$ l'ensemble des **n-cobords** de C^*

$H^n(C) := Z^n(C)/B^n(C)$ le **n-ème groupe de cohomologie** de C^*

Définition 3

Un complexe de chaînes est appelé une **suite exacte** si on a : $\forall n, H_n(C) = 0$, c'est à dire si $Im(\partial_{n+1}) = Ker(\partial_n)$.

Définition 4

Un **morphisme de chaînes** f entre deux complexes de chaînes (C_*, ∂) et (C'_*, ∂') est une famille de morphismes de groupes $f_n : C_n \rightarrow C'_n$ tels que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots & \longrightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & C_n & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1} & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow f_{n+1} & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} & & \\ \dots & \longrightarrow & C'_{n+1} & \xrightarrow{\partial'_{n+1}} & C'_n & \xrightarrow{\partial'_n} & C'_{n-1} & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

C'est à dire : $\forall n, f_{n-1} \circ \partial_n = \partial'_n \circ f_n$.

Proposition 1

Soit $f : (C_*, \partial) \rightarrow (C'_*, \partial')$ un morphisme de chaînes, alors :

$\partial_n(\text{Ker } f_n) \subset \text{Ker } f_{n-1}$ et $(\text{Ker } f_*, \partial)$ est un complexe de chaînes.

$\partial'_n(\text{Im } f_n) \subset \text{Im } f_{n-1}$ et $(\text{Im } f_*, \partial')$ est un complexe de chaînes.

Démonstration : Soit $\sigma \in \text{Ker } f_n$. $f_{n-1}(\partial_n(\sigma)) = \partial'_n(f_n(\sigma)) = \partial'_n(0) = 0$, donc $\partial_n(\sigma) \in \text{Ker } f_{n-1}$.

Soit $\sigma \in \text{Im } f_n$. Il existe $\omega \in C_n$ tel que $f_n(\omega) = \sigma$, et $\partial'_n(\sigma) = \partial'_n(f_n(\omega)) = f_{n-1}(\partial_n(\omega))$, donc $\partial'_n(\sigma) \in \text{Im } f_{n-1}$.

Les égalités $\partial_n \circ \partial_{n+1} \equiv 0$ et $\partial'_n \circ \partial'_{n+1} \equiv 0$ sont vraies dans C_* et C'_* , elles restent donc vraies dans $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$. ■

Lemme 1 (du serpent)

Soit le diagramme commutatif de groupes abéliens suivant, où les lignes sont supposées exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} & & A & \xrightarrow{a} & B & \xrightarrow{b} & C \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma \\ 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{a'} & B' & \xrightarrow{b'} & C' \end{array}$$

Il y a alors une suite exacte :

$$\text{Ker}(\alpha) \xrightarrow{a} \text{Ker}(\beta) \xrightarrow{b} \text{Ker}(\gamma) \xrightarrow{\partial} \text{Coker}(\alpha) \xrightarrow{a'} \text{Coker}(\beta) \xrightarrow{b'} \text{Coker}(\gamma)$$

où ∂ est induit par $a'^{-1} \circ \beta \circ b^{-1}$.

Démonstration : Une démonstration de ce lemme peut être trouvée dans [10]. ■

Définition 5

$$0 \longrightarrow C' \xrightarrow{f} C \xrightarrow{g} C'' \longrightarrow 0$$

est une **suite exacte de complexes de chaînes** si f et g sont des morphismes de chaînes et si, pour tout n :

$$0 \longrightarrow C'_n \xrightarrow{f_n} C_n \xrightarrow{g_n} C''_n \longrightarrow 0$$

est une suite exacte.

Proposition 2

Soit une suite exacte de complexes de chaînes :

$$0 \longrightarrow C' \xrightarrow{f} C \xrightarrow{g} C'' \longrightarrow 0$$

La suite

$$\dots \longrightarrow H_{n+1}(C'') \xrightarrow{\partial_{n+1}^*} H_n(C') \xrightarrow{f_*} H_n(C) \xrightarrow{g_*} H_n(C'') \xrightarrow{\partial_{n*}} H_{n-1}(C') \longrightarrow \dots$$

est exacte, où f_* , g_* et ∂_{n*} sont induites par f , g et $f_n^{-1} \circ \partial_n \circ g_n^{-1}$

Démonstration : ∂_n induit un morphisme $d_n : K_n = C_n/B_n \rightarrow Z_{n-1}$.

On a alors le diagramme commutatif suivant, avec des lignes exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} K'_n & \xrightarrow{f_n} & K_n & \xrightarrow{g_n} & K''_n & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow d'_n & & \downarrow d_n & & \downarrow d''_n & & \\ 0 & \longrightarrow & Z'_{n-1} & \xrightarrow{f_{n-1}} & Z_{n-1} & \xrightarrow{g_{n-1}} & Z''_{n-1} \end{array}$$

Le lemme du serpent donne alors l'exactitude de la suite

$$H_n(C') \xrightarrow{f_*} H_n(C) \xrightarrow{g_*} H_n(C'') \xrightarrow{\partial_{n*}} H_{n-1}(C') \xrightarrow{f_*} H_{n-1}(C) \xrightarrow{g_*} H_{n-1}(C'').$$

■

Proposition 3

De manière analogue, on définit les notions de **morphismes de cochaînes** et de **suites exactes de complexes de cochaînes** et on montre qu'une telle suite exacte

$$0 \longrightarrow C'' \xrightarrow{f} C \xrightarrow{g} C' \longrightarrow 0$$

induit une suite exacte :

$$\dots \longrightarrow H^{n-1}(C') \xrightarrow{\partial_{n+1}^*} H^n(C'') \xrightarrow{f_*} H^n(C) \xrightarrow{g_*} H^n(C') \xrightarrow{\partial_{n*}} H^{n+1}(C'') \longrightarrow \dots$$

Proposition 4

Soient (C_*, ∂) un complexe de chaînes et G un groupe abélien. Alors $(Hom(C_*, G), \delta_n)$ est un complexe de cochaînes,

où $\delta_n : \varphi \mapsto [\sigma \mapsto \varphi(\partial_{n+1}(\sigma))]$.

Démonstration : Soit $\sigma \in C_{n+1}$ et $\varphi \in Hom(C_{n-1}, G)$.

$$\delta^n(\delta^{n-1}(\varphi))(\sigma) = \delta^{n-1}(\varphi)(\partial_{n+1}(\sigma)) = \varphi(\partial^n(\partial_{n+1}(\sigma))) = \varphi(0) = 0.$$

■

Proposition 5

Soit S un groupe abélien libre. La suite exacte de groupes abéliens

$$0 \longrightarrow G_1 \xrightarrow{f} G_2 \xrightarrow{g} G_3 \longrightarrow 0$$

induit une suite exacte :

$$0 \longrightarrow Hom(S, G_1) \xrightarrow{f_*} Hom(S, G_2) \xrightarrow{g_*} Hom(S, G_3) \longrightarrow 0$$

Démonstration : Soit $\{x_i\}_{i \in I}$ une base de S .

(1) injectivité de f_* :

Soient $\varphi \in Hom(C, G_1)$ tel que $f_*(\varphi) \equiv 0$ et $\sigma \in S$.

$f(\varphi(\sigma)) = f_*(\varphi)(\sigma) = 0$, donc $\varphi(\sigma) = 0$ par injectivité de f . Donc $\varphi \equiv 0$.

(2) $Im f_* \subset Kerg_*$:

Soient $\varphi \in Im f_*$, ψ tel que $f_*(\psi) = \varphi$ et $\sigma \in S$.

$g_*(\varphi)(\sigma) = g(f_*(\psi)(\sigma)) = g(f(\psi(\sigma))) = 0$ car $Im f \subset Kerg$. Donc $g_*(\varphi) \equiv 0$.

(3) $Kerg_* \subset Im f_*$:

Soient $\varphi \in Kerg_*$ et $i \in I$.

$b(\varphi(x_i)) = b_*(\varphi)(x_i) = 0$ donc $\forall i, \exists y_i \in A/f(y_i) = \varphi(x_i)$ car $Kerg \subset Im f$.

Soit $\psi \in Hom(C, G_1) : x_i \mapsto y_i$ étendu par linéarité.

$f_*(\psi)(x_i) = f(\psi(x_i)) = f(y_i) = \varphi(x_i)$, donc $f_*(\psi) = \varphi$, car ils coïncident sur une base.

(4) surjectivité de g_* :

Soit $\varphi \in Hom(C, G_3)$.

Par surjectivité de g , $\forall i, \exists y_i/g(y_i) = \varphi(x_i)$.

Soit $\psi \in Hom(C, G_2) : x_i \mapsto y_i$ étendu par linéarité.

$g_*(\psi)(x_i) = g(\psi(x_i)) = g(y_i) = \varphi(x_i)$, donc $g_*(\psi) = \varphi$, car ils coïncident sur une base. ■

Définition 6 (Opérateur de Bockstein)

Soient (C_*, ∂) un complexe de chaînes formé de groupes abéliens libres et une suite exacte de groupes abéliens :

$$0 \longrightarrow G_1 \xrightarrow{f} G_2 \xrightarrow{g} G_3 \longrightarrow 0$$

La proposition 5 nous donne l'existence d'une suite exacte de complexes de cochaînes :

$$0 \longrightarrow Hom(C_n, G_1) \xrightarrow{f_*} Hom(C_n, G_2) \xrightarrow{g_*} Hom(C_n, G_3) \longrightarrow 0$$

et la proposition 3 nous donne alors un morphisme de groupe :

$\delta_{n*} : H^n(Hom(C_n, G_3)) \rightarrow H^{n+1}(Hom(C_n, G_1))$, appelé **opérateur de Bockstein**.

Exemple 1

Un exemple courant d'utilisation de l'opérateur de Bockstein est celui associé à la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \xrightarrow{g} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

où f est la multiplication par p et g est la projection modulo p .

2.2 Homologie Singulière

Dans cette section, nous allons construire un complexe de chaînes associé à un espace topologique.

Définition 7

Soient $\{p_0, p_1, \dots, p_m\}$ $m+1$ points affinement indépendants de \mathbb{R}^n (c'est à dire tels que $\{p_1 - p_0, p_2 - p_0, \dots, p_m - p_0\}$ soit une famille libre de \mathbb{R}^n). L'enveloppe convexe de $\{p_0, p_1, \dots, p_m\}$ est appelé le **m-simplexe** engendré par $\{p_0, p_1, \dots, p_m\}$.

Le **m-simplexe standard** Δ_m est le m-simplexe engendré par $\{e_0, e_1, \dots, e_m\}$, où $\{e_1, \dots, e_m\}$ est la base canonique de \mathbb{R}^n et $e_0 = 0$.

Notons ε_m^i l'application affine :

$\varepsilon_m^i : \Delta_m \rightarrow \Delta_{m+1} : e_j \mapsto e_j$ si $j < i$ et $e_j \mapsto e_{j+1}$ sinon.

Définition 8

Soit X un espace topologique. Les **n -chaînes singulières** de X sont les éléments de $C_n(X)$, le groupe abélien libre engendré par $\{\sigma \mid \sigma : \Delta_n \rightarrow X \text{ continue}\}$.

Définissons également le morphisme de groupes :

$$\partial_n : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X) : \sigma \mapsto \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma \circ \varepsilon_{n-1}^i$$

Proposition 6

(1) $(C_n(X), \partial_n)$ est un complexe de chaînes.

(2) Etant donné un anneau commutatif R , $(C^*(X), \delta) = (\text{Hom}(C_n(X), R), \delta_n)$ est un complexe de cochaînes.

Nous noterons $H_n(X)$ pour $H_n(C_*(X))$ et $H^n(X; R)$ pour $H^n(C^*(X))$.

Démonstration : Une démonstration du premier résultat (1) est donnée dans [8] et la proposition 4 montre (2). ■

Proposition 7

Soient X et Y deux espaces topologiques et $f : X \rightarrow Y$ une application continue.

Pour tout n , f induit alors un morphisme de groupe $f_{\#} : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$. De plus, si f et g sont deux applications linéaires homotopes de X dans Y , $f_{\#} = g_{\#}$.

Donc si X et Y sont homotopiquement équivalents, $\forall n$ $H_n(X) = H_n(Y)$ et $H^n(X) = H^n(Y)$.

Démonstration : De la même manière que dans la preuve de la proposition 1, on montre que l'application $f_{\#} : \bar{\sigma} \mapsto f \circ \sigma$ est bien définie. Le second résultat est démontré dans [8]. ■

Proposition 8

Si X est un espace topologique connexe par arcs, $H_0(X) = \mathbb{Z}$ et $H^0(X; R) = R$.

Démonstration :

• Soit $x_0 \in X$. Comme $\partial_0 \equiv 0$, $Z_0(X) = C_0(X)$ et comme X est connexe par arcs, $B_0(X)$ est engendré par les éléments de la forme $x - y$, $x, y \in X$. Tout élément de $H_0(X)$ peut donc se mettre sous la forme nx_0 , $n \in \mathbb{Z}$. Et comme $x_0 \in Z_0(X) \setminus B_0(X)$, $H_0(X) \cong \{nx_0 \mid n \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$.

• Soit $\varphi \in C^0(X; R)$, si φ n'est pas constante, comme X est connexe par arcs, il existe un chemin reliant deux points ayant une image différente, donc $\varphi \notin Z^0(X; R)$. Comme les fonctions constantes sont dans $Z^0(X; R)$ et comme $B^0(X; R) = 0$, $H^0(X; R) \cong \{\varphi \text{ constantes}\} \cong R$. ■

Théorème 1 (Axiome de dimension)

Si X est réduit à un point, alors $H_0(X) = \mathbb{Z}$ et $H_n(X) = 0 \forall n \geq 1$.

Démonstration : Pour chaque simplexe, il n'y a qu'une seule application σ_n à valeur dans X . Donc $C_n(X) = \langle \sigma_n \rangle$ et :

$$\partial_n \sigma_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma_n \varepsilon_i^n = \left(\sum_{i=0}^n (-1)^i \right) \sigma_{n-1} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ \sigma_{n-1} & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc $\partial_n = 0$ si n est impair et est un isomorphisme si n est pair et non nul.

Si n est impair, $Z_n(X) = \text{Ker } \partial_n = C_n(X)$ et $B_n(X) = C_n(X)$ car ∂_{n+1} est surjective, donc $H_n(X) = 0$.

Si n est pair et non nul, $Z_n(X) = \text{Ker } \partial_n = 0$ car ∂_n est injective, donc $H_n(X) = 0$.

Et $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$ car X est connexe par arcs. ■

Corollaire 1

Si X est contractile, alors $H_0(X) = \mathbb{Z}$ et $H_n(X) = 0 \forall n \geq 1$.

Démonstration : X est homotopiquement équivalent à un point, le résultat découle donc des propositions précédentes. ■

Proposition 9

Soient X un espace topologique et la suite exacte d'anneaux commutatifs :

$$0 \longrightarrow R_1 \xrightarrow{f} R_2 \xrightarrow{g} R_3 \longrightarrow 0$$

On peut définir l'opérateur de Bockstein : $\beta_n : H^n(X; R_3) \rightarrow H^{n+1}(X; R_1)$.

Démonstration : $(C^*(X), \partial)$ est un groupe abélien libre, la définition 6 peut donc s'appliquer. ■

Théorème 2 (Mayer-Vietoris)

Soient X_1 et X_2 deux parties de X telles que $X = \overset{\circ}{X}_1 \cup \overset{\circ}{X}_2$, on a une suite exacte :

$$\dots \longrightarrow H_n(X_1 \cap X_2) \longrightarrow H_n(X_1) \oplus H_n(X_2) \longrightarrow H_n(X) \longrightarrow H_{n-1}(X_1 \cap X_2) \longrightarrow \dots$$

Démonstration : Ce résultat est démontré dans [8] ■

Théorème 3 (de Hurewicz)

Si X est connexe par arcs, $H_1(X)$ est l'abélianisé de $\pi_1(X, x_0)$.

Démonstration : Une démonstration est donnée dans [9]. ■

3 Autres concepts utiles

3.1 Revêtements et quotients

Définition 9

Soit X un espace topologique, (\tilde{X}, p) est un **revêtement** de X si \tilde{X} est connexe par arc, $p : \tilde{X} \rightarrow X$ est continue et pour tout $x \in X$ il existe un ouvert U_x contenant x tel que $p^{-1}(U_x)$ est une union disjointe d'ouvert $S_i \subset \tilde{X}$ tels que $p : S_i \rightarrow U_x$ est un homéomorphisme pour tout i .

Définition 10

(\tilde{X}, p) est un **revêtement universel** de X si \tilde{X} est simplement connexe.

Remarque 1. Le revêtement universel d'un espace est unique à homéomorphisme près.

Définition 11

Soit G un groupe agissant sur un espace topologique X . On note X/G l'espace topologique quotient X/\sim , où :

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists g \in G/gx = y$$

Définition 12

Soit $(G, *)$ un groupe muni d'une topologie, G est appelé **groupe topologique** si $G^2 \rightarrow G : (x, y) \mapsto x * y^{-1}$ est continue.

Proposition 10

Soient G est un groupe topologique connexe par arc et H un sous-groupe distingué discret. Alors (G, p) est un revêtement de G/H , où p est la projection usuelle de G sur G/H .

Démonstration : Une démonstration est donnée dans [9]. ■

Définition 13

L'action d'un groupe G sur un espace X est dite **proprement discontinue** si pour tout x , il existe un voisinage V_x contenant x et tel que $V_x \cap gV_x = \emptyset$ pour tout g non nul dans G .

Théorème 4

Soient X un espace topologique connexe et localement connexe par arc et G un groupe agissant proprement discontinuement sur X , alors :

$$\pi_1(X/G) \cong G$$

Démonstration : Une démonstration est donnée dans [9]. ■

Proposition 11

Soient $n \geq 1$ et S^n la sphère de dimension n , alors :

$$H_i(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } i=0, n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Démonstration : S^n est connexe par arc pour tout n , donc $H_0(S^n) = \mathbb{Z}$ pour tout n . Nous procédons par récurrence sur n :

(1) $n = 1$:

Remarquons que $S^1 \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ où \mathbb{Z} agit sur \mathbb{R} par l'addition usuelle. L'action de \mathbb{Z} sur \mathbb{R} est proprement discontinue, en posant $V_x =]x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2}[$. Donc $\pi_1(S^1) = \pi_1(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$. D'où $H_1(S^1) = \mathbb{Z}$, d'après le théorème de Hurewicz.

(2) Récurrence :

Soient x et y deux points distincts de S^n . Notons $X_1 = S^n \setminus x$ et $X_2 = S^n \setminus y$.

• Si $i \geq 2$, le théorème de Mayer-Vietoris donne la suite exacte :

$$H_i(X_1) \oplus H_i(X_2) \rightarrow H_i(S^n) \rightarrow H_{i-1}(X_1 \cap X_2) \rightarrow H_{i-1}(X_1) \oplus H_{i-1}(X_2)$$

Comme X_1 et X_2 sont contractiles, cette suite devient :

$$0 \rightarrow H_i(S^n) \rightarrow H_{i-1}(X_1 \cap X_2) \rightarrow 0$$

Et comme $X_1 \cap X_2 \cong S^{n-1}$, $H_i(S^n) \cong H_{i-1}(S^n)$. Donc $H_n(S^n) = \mathbb{Z}$ par hypothèse de récurrence et $H_i(S^n) = 0$ si $i \neq n$.

• Si $i = 2$, le théorème de Mayer-Vietoris donne la suite exacte :

$$H_1(X_1) \oplus H_1(X_2) \rightarrow H_1(S^n) \rightarrow H_0(X_1 \cap X_2) \rightarrow H_0(X_1) \oplus H_0(X_2) \rightarrow H_0(S^n)$$

Par hypothèse de récurrence, et comme X_1 et X_2 sont contractiles, la suite devient :

$$0 \rightarrow H_1(S^n) \xrightarrow{a} \mathbb{Z} \xrightarrow{b} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{c} \mathbb{Z}$$

c ne peut pas être injective, donc $\text{Ker } c \neq 0$, donc $\text{Im } b \neq 0$. b est donc nécessairement injective (car $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ est sans torsion). Donc $\text{Im } a = 0$, et comme a est injective, $H_1(S^n) = 0$. ■

3.2 Homologie relative

Définition 14

Soit A une partie d'un espace topologique X , $C_*(A)$ est un sous-complexe de $C_*(X)$ et $C_*(X)/C_*(A)$ est un complexe de chaînes dont les groupes d'homologie sont appelés les **groupes d'homologie relative** :

$$H_n(X, A) = H_n(C_*(X)/C_*(A))$$

Proposition 12

Soit A une partie d'un espace topologique X , on a la suite exacte :

$$\dots \rightarrow H_n(A) \rightarrow H_n(X) \rightarrow H_n(X/A) \rightarrow H_{n-1}(A) \rightarrow \dots$$

Démonstration : On a la suite exacte :

$$0 \rightarrow C_*(A) \rightarrow C_*(X) \rightarrow C_*(X)/C_*(A) \rightarrow 0$$

Donc, d'après la proposition 2, on a le résultat. ■

3.3 Théorèmes des coefficients universels

Nous présentons dans cette partie des résultats montrant que l'homologie à coefficients dans un anneau quelconque et la cohomologie sont entièrement déterminés par l'homologie à coefficients dans \mathbb{Z} .

Proposition 13

Soient $0 \rightarrow C' \xrightarrow{f} C \xrightarrow{g} C'' \rightarrow 0$ une suite exacte et A un groupe abélien.

Alors $C' \otimes A \xrightarrow{f \otimes id} C \otimes A \xrightarrow{g \otimes id} C'' \otimes A \rightarrow 0$ est exacte, mais $f \otimes id$ n'est pas injective en général.

Démonstration : Une démonstration est donnée dans [8]. ■

Proposition 14

Tout groupe abélien H peut s'écrire comme un quotient G/R où G est un groupe abélien libre. Le couple (G, R) est alors appelé une **présentation** de H .

Démonstration : Posons G le groupe abélien libre ayant pour base l'ensemble H et $f : G \rightarrow H$ le morphisme de groupes envoyant chaque élément de la base de G sur son élément correspondant dans H . f est surjective donc d'après le premier théorème d'isomorphisme $H \cong G/\text{Ker } f$. ■

Définition 15 (*Tor*)

Soient A et B deux groupes abéliens et soient (G, R) une présentation de A .
On a alors la suite exacte $0 \rightarrow R \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} A \rightarrow 0$ qui induit la suite exacte :

$$R \otimes B \xrightarrow{i \otimes id} G \otimes A \xrightarrow{p \otimes id} A \otimes B \rightarrow 0$$

On note alors $Tor(A, B) = Ker(i \otimes id)$.

Une démonstration du fait que $Tor(A, B)$ ne dépend pas de la présentation de A peut être trouvée dans [9].

Proposition 15

Pour tout groupe abélien A , $Tor(A, -)$ et $Tor(-, A)$ sont des foncteurs covariants additifs vérifiant les propriétés suivantes pour tout B :

1. Toute suite exacte $0 \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow A'' \rightarrow 0$ induit une suite exacte :

$$0 \rightarrow Tor(A', B) \rightarrow Tor(A, B) \rightarrow Tor(A'', B) \rightarrow A' \otimes B \rightarrow A \otimes B \rightarrow A'' \otimes B \rightarrow 0$$

2. Si A est sans torsion, $Tor(A, B) = 0$.
3. $Tor(\sum A_i, B) \cong \sum Tor(A_i, B)$
4. $Tor(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, B) \cong B[m] = \{n \in B \mid mb = 0\}$
5. $Tor(A, B) \cong Tor(B, A)$

Proposition 16

Ces résultats sont montrés dans [9].

Théorème 5 (*des coefficients universels pour l'Homologie*)

Soient X un espace topologique, G un groupe abélien. La suite suivante est exacte :

$$0 \rightarrow H_n(X) \otimes G \xrightarrow{\alpha} H_n(X; G) \rightarrow Tor(H_{n-1}(X), G) \rightarrow 0$$

où $H_n(X; G) = H_n(C_n(X) \otimes G)$, l'homologie à coefficients dans G et où $\alpha : \bar{z} \otimes g \mapsto \overline{z \otimes g}$.
De plus, cette suite exacte est scindée, c'est à dire :

$$H_n(X; G) = (H_n(X) \otimes G) \oplus Tor(H_{n-1}(X), G)$$

Ce résultat montre que l'homologie à coefficients dans G est entièrement déterminée par l'homologie à coefficients dans \mathbb{Z} .

Démonstration : Une démonstration est donnée dans [8].

Proposition 17

Soient $0 \rightarrow C' \xrightarrow{f} C \xrightarrow{g} C'' \rightarrow 0$ une suite exacte et A un groupe abélien.

Alors $Hom(C', A) \xleftarrow{f^*} Hom(C, A) \xleftarrow{g^*} Hom(C'', A) \leftarrow 0$ est exacte, mais f^* n'est pas surjective en général.

Démonstration : Une démonstration est donnée dans [8].

Définition 16 (*Ext*)

Soient A et B deux groupes abéliens et soient (G, R) une présentation de A .

On a alors la suite exacte $0 \rightarrow R \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} A \rightarrow 0$ qui induit la suite exacte :

$$\text{Hom}(R, B) \xleftarrow{i^*} \text{Hom}(G, A) \xleftarrow{p^*} \text{Hom}(A, B) \leftarrow 0$$

On note alors $\text{Ext}(A, B) = \text{Coker } i^*$.

Une démonstration du fait que $\text{Ext}(A, B)$ ne dépend pas de la présentation de A peut être trouvée dans [9].

Proposition 18

Pour tout groupe abélien A , $\text{Ext}(A, -)$ et $\text{Ext}(-, A)$ sont des foncteur respectivement covariant et contravariant vérifiant les propriétés suivantes pour tout B :

1. Toute suite exacte $0 \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow A'' \rightarrow 0$ induit deux suites exactes :

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Hom}(A'', B) \rightarrow \text{Hom}(A, B) \rightarrow \text{Hom}(A', B) \\ \rightarrow \text{Ext}(A'', B) \rightarrow \text{Ext}(A, B) \rightarrow \text{Ext}(A', B) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Hom}(B, A') \rightarrow \text{Hom}(B, A) \rightarrow \text{Hom}(B, A'') \\ \rightarrow \text{Ext}(B, A') \rightarrow \text{Ext}(B, A) \rightarrow \text{Ext}(B, A'') \rightarrow 0 \end{aligned}$$

2. Si A est un groupe abélien libre, alors $\text{Ext}(A, B) = 0$.
Si B est divisible ($\forall x, \forall n \in \mathbb{Z}, \exists y/ny = x$), alors $\text{Ext}(A, B) = 0$
3. $\text{Ext}(\sum A_i, B) \cong \prod \text{Ext}(A_i, B)$
 $\text{Ext}(A, \prod B_i) \cong \prod \text{Ext}(A, B_i)$
4. $\text{Ext}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, G) \cong G/mG$

Proposition 19

Ces résultats sont montrés dans [9].

Théorème 6 (*des coefficients universels pour la Cohomologie*)

Soient X un espace topologique, G un groupe abélien. La suite suivante est exacte :

$$0 \longrightarrow \text{Ext}(H_{n-1}(X), G) \longrightarrow H^n(X; G) \xrightarrow{\beta} \text{Hom}(H_n(X), G) \longrightarrow 0$$

où $\beta : \bar{\varphi} \mapsto [z_n + B_n \mapsto \varphi(z_n)]$.

De plus, cette suite exacte est scindée, c'est à dire :

$$H^n(X; G) = \text{Hom}(H_n(X), G) \oplus \text{Ext}(H_{n-1}(X), G)$$

Ce résultat montre que la cohomologie à valeur dans G est entièrement déterminée par l'homologie à coefficients dans \mathbb{Z} .

Démonstration : Une démonstration est donnée dans [8].

■

3.4 Homologie des espaces produit

Nous présentons dans cette section les résultats permettant de déterminer l'homologie et la cohomologie des espaces produits.

Définition 17

Soient (C_*, ∂) et (C'_*, ∂') deux complexes de chaînes, on peut définir le complexe de chaîne $C_* \otimes C'_*$ comme :

$$(C_* \otimes C'_*)_n = \sum_{i+j=n} C_i \otimes C'_j \quad \text{et} \quad d_n = \sum_{i+j=n} \partial \otimes id + (-1)^i id \otimes \partial'$$

Théorème 7 (Eilenberg-Zilber)

Soient X et Y deux espaces topologiques. Il y a un isomorphisme :

$$H_n(X \times Y) \cong H_n(C_*(X) \otimes C_*(Y))$$

Démonstration : Ce théorème est démontré dans [8]. ■

Remarque 2. Il est possible d'expliciter les applications menant à cet isomorphisme :

- Application d'Eilenberg-Mac Lane :

$$\begin{aligned} \zeta : C_p(X) \otimes C_q(Y) &\rightarrow C_{p+q}(X \times Y) \\ \sigma \otimes \tau &\mapsto \sum_{\lambda \in \Sigma_{pq}} \varepsilon(\lambda) \cdot (\sigma \times \tau) \circ \lambda \end{aligned}$$

où Σ_{pq} est l'ensemble des (p, q) -shuffle et où ε est le signe de la permutation.

- Application d'Alexander Whitney :

$$\begin{aligned} \xi : C_{p+q}(X \times Y) &\rightarrow C_p(X) \otimes C_q(Y) \\ \sigma &\mapsto \sum_{i+j=n} \pi_X(\sigma) \alpha_i^n \otimes \pi_Y(\sigma) \omega_j^n \end{aligned}$$

où π_X et π_Y sont les projections sur X et Y .

Il nous reste alors à trouver une méthode de calcul pour $H_n(C_*(X) \otimes C_*(Y))$. Cette méthode est donnée par le théorème suivant.

Théorème 8 (Théorème de Künneth)

Si C_* et G_* sont deux complexes de chaînes positives ($C_n = G_n = 0$ pour $n < 0$), on a la suite exacte :

$$0 \rightarrow \sum_{i+j=n} H_i(C_*) \otimes H_j(G_*) \xrightarrow{\alpha} H_n(C_* \otimes G_*) \rightarrow \sum_{p+q=n-1} \text{Tor}(H_p(C_*), H_q(G_*)) \rightarrow 0$$

où $\alpha : \bar{z} \otimes \bar{z}' \mapsto \overline{z \otimes z'}$

Et cette suite est scindée, c'est à dire :

$$H_n(C_* \otimes G_*) \cong \sum_{i+j=n} H_i(C_*) \otimes H_j(G_*) \oplus \sum_{p+q=n-1} \text{Tor}(H_p(C_*), H_q(G_*))$$

Théorème 9 (Formules de Künneth)

Soient X et Y deux espaces topologiques, on a la suite exacte :

$$0 \rightarrow \sum_{i+j=n} H_i(X) \otimes H_j(Y) \xrightarrow{\alpha} H_n(X \times Y) \rightarrow \sum_{p+q=n-1} \text{Tor}(H_p(X), H_q(Y)) \rightarrow 0$$

où $\alpha : \bar{z} \otimes \bar{z}' \mapsto \overline{\zeta(z \otimes z')}$

Et cette suite est scindée, c'est à dire :

$$H_n(X \times Y) \cong \sum_{i+j=n} H_i(X) \otimes H_j(Y) \oplus \sum_{p+q=n-1} \text{Tor}(H_p(X), H_q(Y))$$

On a également la suite exacte :

$$0 \rightarrow \sum_{i+j=n} H^i(X) \otimes H^j(Y) \xrightarrow{\alpha} H^n(X \times Y) \rightarrow \sum_{p+q=n+1} \text{Tor}(H^p(X), H^q(Y)) \rightarrow 0$$

où $\alpha : \bar{z} \otimes \bar{z}' \mapsto \overline{\xi^\#(z \otimes z')}$

Et cette suite est scindée, c'est à dire :

$$H^n(X \times Y) \cong \sum_{i+j=n} H^i(X) \otimes H^j(Y) \oplus \sum_{p+q=n+1} \text{Tor}(H^p(X), H^q(Y))$$

Démonstration : Une démonstration des deux théorèmes précédents peut être trouvée dans [8]. ■

3.5 Cup-produit

Dans cette section, nous construisons un produit sur le groupes de cohomologie, le transformant en anneau.

Définition 18

Nous définissons les applications affines de **face avant** et de **face arrière** suivantes :

$$\begin{aligned} \alpha_n^m &= \varepsilon_{m-1}^0 \circ \dots \circ \varepsilon_{n+1}^0 \circ \varepsilon_n^0 : \Delta_n \rightarrow \Delta_m : e_j \mapsto e_j \\ \omega_n^m &= \varepsilon_{m-1}^m \circ \dots \circ \varepsilon_{n+1}^{n+2} \circ \varepsilon_n^{n+1} : \Delta_n \rightarrow \Delta_m : e_j \mapsto e_{j+m-n} \end{aligned}$$

Définition 19

$(C_*(X), \partial)$ peut se munir d'une structure de groupe abélien :
 $C_*(X) := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} C_n(X)$.

Définition 20

Nous définissons le coproduit suivant en donnant sa valeur sur une base de $C_*(X)$:
 Soit $\sigma : \Delta_n \rightarrow X$

$$\mu : C_* \rightarrow C_* \otimes C_* : \sigma \mapsto \sum_{i+j=n} \sigma \circ \alpha_i^n \otimes \sigma \circ \omega_j^n$$

Proposition 20

μ est un coproduit coassociatif sur $C_*(X)$.

Démonstration : Remarquons tout d'abord les relations suivantes entre les applications de face avant et de face arrière :

$$(1) \alpha_b^c \circ \alpha_a^b = \alpha_a^c, \quad (2) \omega_b^c \circ \omega_a^b = \omega_a^c \quad \text{et} \quad (3) \omega_{b+c}^{a+b+c} \circ \alpha_b^{b+c} = \alpha_{a+b}^{a+b+c} \circ \omega_b^{a+b}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} (id \otimes \mu)(\mu(\sigma)) &= \sum_{i+j=n} \sigma \alpha_i^n \otimes \left(\sum_{a+b=j} \sigma \omega_j^n \alpha_a^j \otimes \sigma \omega_j^n \omega_b^j \right) \\ &= \sum_{i+j=n} \sum_{a+b=j} \sigma \alpha_i^n \otimes \sigma \omega_j^n \alpha_a^j \otimes \sigma \omega_b^n \quad \text{par(2)} \\ &= \sum_{i+a+b=n} \sigma \alpha_i^n \otimes \sigma \omega_{a+b}^n \alpha_a^{a+b} \otimes \sigma \omega_b^n \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (\mu \otimes id)(\mu(\sigma)) &= \sum_{k+l=n} \left(\sum_{c+d=k} \sigma \alpha_c^n \alpha_d^k \otimes \sigma \alpha_k^n \omega_d^k \right) \otimes \sigma \omega_l^n \\ &= \sum_{k+l=n} \sum_{c+d=k} \sigma \alpha_c^n \otimes \sigma \alpha_k^n \omega_d^k \otimes \sigma \omega_l^n \quad \text{par(1)} \\ &= \sum_{c+d+l=n} \sigma \alpha_c^n \otimes \sigma \alpha_{c+d}^n \omega_d^{c+d} \otimes \sigma \omega_l^n \\ &= \sum_{c+d+l=n} \sigma \alpha_c^n \otimes \sigma \omega_{d+l}^n \alpha_d^{d+l} \otimes \sigma \omega_l^n \quad \text{par(3)} \end{aligned}$$

On retrouve la première expression en identifiant les variables muettes ($i = c, a = d, b = l$)

Proposition 21

μ induit un produit associatif sur $C^*(X)$. Ce produit est appelé **cup-produit** et est noté \smile .

Démonstration : Nous définissons \smile comme $\mu^* \circ \gamma$:

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\quad \smile \quad} & \\ Hom(C_*, R) \otimes Hom(C_*, R) & \xrightarrow{\gamma} Hom(C_* \otimes C_*, R) & \xrightarrow{\mu^*} Hom(C_*, R) \end{array}$$

où μ^* est l'application duale de μ et où :

$$\gamma(\varphi \otimes \theta)(x \otimes y) = \varphi(x) \cdot \theta(y)$$

où la dernière multiplication est celle de l'anneau R .

L'associativité du cup-produit découle de la coassociativité de μ . En effet :

$$(f \smile g) \smile h = t'(f \otimes g \otimes h) \circ (\mu \otimes id) \circ \mu$$

$$\text{et } f \smile (g \smile h) = t'(f \otimes g \otimes h) \circ (id \otimes \mu) \circ \mu$$

où $t'(f \otimes g \otimes h) = [x \otimes y \otimes z \mapsto f(x) \cdot g(y) \cdot h(z)]$. Donc $(f \smile g) \smile h = f \smile (g \smile h)$ car $\mu \otimes id = id \otimes \mu$. ■

Remarque 3. Il est possible de trouver une formule pour le cup-produit :

Soient $\varphi \in C^a(X, R)$, $\theta \in C^b(X, R)$ et $\sigma \in C_n(X)$.

$$\begin{aligned} (\varphi \smile \theta)(\sigma) &= \mu^*(\varphi \otimes \theta)(\sigma) \\ &= (\varphi \otimes \theta)(\mu\sigma) \\ &= (\varphi \otimes \theta) \left(\sum_{i+j=n} \sigma \alpha_i^n \otimes \sigma \omega_j^n \right) \\ &= \varphi(\sigma \alpha_a^n) \cdot \theta(\sigma \omega_b^n) \quad \text{si } a + b = n \\ &= 0 \quad \text{sinon} \end{aligned}$$

On remarque également que $\varphi \smile \theta \in C^{a+b}(X, R)$.

Proposition 22

Soient X et Y deux espaces topologiques, $f : X \rightarrow Y$ une application continue et φ et θ deux cochaines.

$$f^*(\varphi \smile \theta) = f^*\varphi \smile f^*\theta$$

Démonstration : Soient $\varphi \in C^a(X)$, $\theta \in C^b(X)$ et $\sigma \in C_{a+b}(X)$.

$$\begin{aligned} f^*(\varphi \smile \theta)(\sigma) &= (\varphi \smile \theta)(f\sigma) \\ &= \varphi(f\sigma\alpha_a^{a+b}) \cdot \theta(f\sigma\omega_b^{a+b}) \\ &= (f^*\varphi)(\sigma\alpha_a^{a+b}) \cdot (f^*\theta)(\sigma\omega_b^{a+b}) \\ &= (f^*\varphi \smile f^*\theta)(\sigma) \end{aligned}$$

■

Corollaire 2

Deux espaces homotopiquement équivalents ont la même structure d'anneau sur leur groupe de cohomologie.

Démonstration : Ce résultat découle directement du fait que deux espaces homotopiquement équivalents ont la même structure de groupe sur leur groupe de cohomologie et que les morphismes induits par des applications linéaires soient des morphismes d'anneaux.

■

Proposition 23

Soient $\phi \in C^a(X, R)$ et $\theta \in C^b(X, R)$.

$$\delta(\phi \smile \theta) = \delta\phi \smile \theta + (-1)^a \phi \smile \delta\theta$$

Démonstration : Une démonstration est donnée dans [8].

■

Proposition 24

Le cup-produit sur $C^*(X, R)$ induit un cup-produit sur $H^*(X; R)$.

Démonstration : Si $\phi \in Z^a$ et $\theta \in Z^b$, alors $\delta(\phi \smile \theta) = 0 \smile \theta + (-1)^a \phi \smile 0 = 0$. Donc $\phi \smile \theta \in Z^{a+b}$.
Et si $\phi \in B^a$ et $\theta \in Z^b$, alors

$$\begin{aligned} \phi \smile \theta &= \delta\psi \smile \theta \\ &= \delta(\psi \smile \theta) - (-1)^a \psi \smile \delta\theta \\ &= \delta(\psi \smile \theta) - (-1)^a \psi \smile 0 \quad \text{car } \theta \in Z^b \\ &= \delta(\psi \smile \theta) \end{aligned}$$

donc $\phi \smile \theta \in B^{a+b}$.

■

3.6 Dualité de Poincaré

Théorème 10 (Dualité de Poincaré)

Soit X une variété topologique compacte orientée de dimension n , il y a alors un lien très fort entre l'homologie et la cohomologie de X :

$$H^k(X; R) \cong H_{n-k}(X; R)$$

Pour tout anneau commutatif R .

Démonstration : Une démonstration est donnée dans [5]. ■

Corollaire 3

Soit X une variété topologique compacte, orientée et connexe par arc de dimension n , alors :

$$H_n(X; R) = H^n(X; R) = R$$

Démonstration : Si X est un espace topologique connexe par arc, $H_0(X; R) = H^0(X; R) = R$, le résultat découle alors de la dualité de Poincaré. ■

4 Espaces de configuration

4.1 Définition

Nous présentons ici une construction permettant d'associer à chaque espace topologique X l'espace correspondant à n points distincts dans X .

Définition 21

Soit X un espace topologique, l'**espace de configuration** de n points distincts ordonnés de X est l'espace :

$$F_n X = X^n \setminus \left(\bigcup_{i \neq j} \Delta_{i,j} \right)$$

où les $\Delta_{i,j} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i = x_j\}$ sont les diagonales.

Cette construction mène à énoncer la conjecture suivante :

Conjecture 1

Soient X et Y deux variétés lisses, compacts et sans bords. Si X et Y sont homotopiquement équivalents, alors $F_n(X)$ et $F_n(Y)$ sont également homotopiquement équivalents.

Nous allons voir par la suite que cette conjecture se révèle fausse. Nous montrerons ce fait en exhibant un contre-exemple grâce aux espaces lenticulaires.

4.2 Produit de Massey

Définition 22 (*Produit de Massey*)

Soient $\bar{u} \in H^p(X)$, $\bar{v} \in H^q(X)$ et $\bar{w} \in H^r(X)$ et u, v et w des cocycles les représentants.
Supposons également que $\bar{u} \smile \bar{v} = \bar{v} \smile \bar{w} = 0$. Il existe alors $U \in C^{p+q-1}$ et $W \in C^{q+r-1}$ tels que $\delta U = u \smile v$ et $\delta W = v \smile w$.

Remarquons que :

$$\delta(U \smile w - (-1)^p u \smile W) = (u \smile v \smile w - u \smile v \smile w) = 0$$

Nous pouvons alors définir le **produit de Massey** $\langle \bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \rangle \in H^{p+q+r-1}(X)$ comme la classe de cohomologie de $U \smile w - (-1)^p u \smile W$.

Cette classe dépendant du choix de U et W , le produit de Massey est en fait défini dans $H^{p+q+r-1}(X) / \langle \bar{u}, \bar{w} \rangle$ où :

$$\langle \bar{u}, \bar{w} \rangle = \bar{u} \smile H^{q+r-1}(X) + H^{p+q-1}(X) \smile \bar{w}$$

est l'idéal engendré par \bar{u} et \bar{w} .

Remarque 4. Il découle de la définition que le produit de Massey est invariant par homotopie.

4.3 Espaces lenticulaires

Nous introduisons les espaces lenticulaires qui nous permettrons de fournir un contre exemple à la conjecture de la partie précédente.

Définition 23

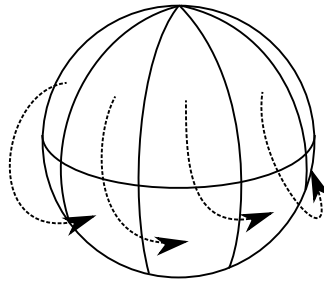
Soient p un nombre premier et q premier avec p .

Notons $\zeta = e^{2i\pi/p}$. L'espace lenticulaire $L_{(p,q)}$ est l'espace quotient $S^3 / (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ avec l'action de groupe engendrée par :

$$(z_1, z_2) \mapsto (\zeta z_1, \zeta^q z_2)$$

où $S^3 \subset \mathbb{R}^4 \cong \mathbb{C}^2$

Remarque 5. Il est également possible de construire l'espace $L_{(p,q)}$ en partant d'une boule de dimension 3 puis en découpant chaque hémisphère en p sections puis en identifiant la i -ème section supérieure avec la $(i+q)$ -ème section inférieure :



$L_{(7,1)}$

Proposition 25

Les groupes d'homologie de $X = L_{(p,q)}$ sont :

$$H_3(X) = \mathbb{Z} \quad H_2(X) = 0 \quad H_1(X) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \quad H_0(X) = \mathbb{Z}$$

Démonstration : $X = L_{(p,q)}$ est une variété compacte et connexe par arc de dimension 3, donc $H_3(X) = H_0(X) = \mathbb{Z}$.

$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ agit proprement discontinument sur S^3 , donc $\pi_1(X) \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, d'où $H_1(X) \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ d'après le théorème de Hurewicz.

D'après le théorème des coefficients universels et d'après la dualité de Poincaré :

$$H_2(X) = H^1(X, \mathbb{Z}) = \text{Hom}(H_1(X), \mathbb{Z}) \oplus \text{Ext}(H_0(X), \mathbb{Z}) = \text{Hom}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \oplus \text{Ext}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$$

Or, $\text{Hom}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = 0$ car \mathbb{Z} est sans torsion et $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un groupe de torsion. et $\text{Ext}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = 0$ car \mathbb{Z} est un groupe abélien libre. Donc $H_2(X) = 0$. ■

La classification des espaces lenticulaires en termes d'homéomorphisme de type d'homotopie est totalement connue :

Théorème 11

L_{p,q_1} et L_{p,q_2} sont :

- homotopiquement équivalents si et seulement si $q_1 q_2 \equiv n^2 \pmod{p}$ pour un certain n .
- homéomorphes si et seulement si $q_1 \equiv \pm q_2^{\pm 1} \pmod{p}$.

Démonstration : Le premier résultat est démontré dans [7] et le second dans [2]. ■

Nous nous intéressons désormais à $L_{7,1}$ et $L_{7,2}$ pour trouver un contre-exemple à la conjecture.

Corollaire 4

$L_{7,1}$ et $L_{7,2}$ sont homotopiquement équivalents mais non homéomorphes.

Démonstration :

$2 \equiv 3^2 \pmod{7}$ donc $L_{7,1}$ et $L_{7,2}$ sont homotopiquement équivalents.

$1 \not\equiv \pm 2^{\pm 1} \pmod{7}$ donc $L_{7,1}$ et $L_{7,2}$ ne sont pas homéomorphes. ■

Proposition 26

- (1) S^3 est le revêtement universel de $L_{p,q}$
- (2) $\{(x, y) \in (L_{p,q})^2 \mid x \neq gy \ \forall g \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\}$ est le revêtement universel de $F_2(L_{p,q})$

Démonstration :

(1) $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ est un groupe topologique simplement connexe (et donc connexe par arc) et $L_{p,q} = S^3/H$ où $H = \langle (\zeta, \zeta^q) \rangle$ est un sous-groupe distingué discret.

(2) Ce résultat est montré dans [3]. ■

4.4 Produit de Massey nul sur $\tilde{F}_2(L_{7,1})$

Nous montrons dans un premier temps que tout produit de Massey sur le revêtement universel de $F_2(L_{7,1})$ est nul. Pour cela, nous allons définir la notion d'espace formel - sur lesquels tout produit de Massey s'annule - et nous verrons que $\tilde{F}_2(L_{7,1})$ est formel.

Définition 24

Un morphisme de chaîne est appelé un **quasi-isomorphisme** s'il induit un isomorphisme sur les groupes d'homotopie.

Définition 25

Un espace topologique est dit **formel** si il existe un quasi-isomorphisme

$$\varphi : (H^*(X), 0) \rightarrow (C^*(X), \delta)$$

qui est également un morphisme d'anneaux.

Proposition 27

Sur un espace formel, tout produit de Massey est nul.

Démonstration : Soient \bar{u} , \bar{v} et \bar{w} tels que $\bar{u} \smile \bar{v} = \bar{v} \smile \bar{w} = 0$ et φ un quasi-isomorphisme de $H^*(X)$ dans $C^*(X)$.

$\varphi(\bar{u} \smile \bar{v}) = \varphi(0)$ donc $\varphi(\bar{u}) \smile \varphi(\bar{v}) = 0$ car φ est un morphisme d'anneaux, et $\varphi(\bar{u})$ et $\varphi(\bar{v})$ sont des représentants de \bar{u} et de \bar{v} car φ est un quasi-isomorphisme. Dans la définition du produit de Massey, on peut donc choisir $U = 0$, et, de même, $W = 0$.

Alors $U \smile w - (-1)^p u \smile W = 0$, d'où $\langle \bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \rangle = 0$. ■

Proposition 28

Les sphères sont des espaces formels. De plus, tout produit et tout bouquet d'espaces formels est formel.

Démonstration : Ce résultat est montré dans [4]. ■

Proposition 29

Le revêtement universel $\tilde{F}_2(L_{7,1})$ de $F_2(L_{7,1})$ est homotopiquement équivalent à $(\vee_6 S^2) \times S^3$.

Démonstration : Remarquons tout d'abord que l'action de $\langle (\zeta, \zeta) \rangle$ sur \mathbb{C}^2 est assimilable à l'action de $\langle \zeta \rangle$ sur \mathbb{H} . En effet :

dans \mathbb{H} :

$$(u + iv) \times (a + ib + jc + kd) = (ua - vb) + i(ub + va) + j(uc - vd) + k(ud + vc)$$

dans \mathbb{C}^2 :

$$(u + iv, u + iv) \times (a + ib, c + id) = ((ua - vb) + i(ub + va), (uc - vd) + i(ud + vc))$$

Nous définissons alors l'application suivante :

$$\tilde{F}_2(L_{7,1}) \rightarrow (S^3 \setminus (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})) \times S^3 : (x, y) \mapsto (xy^{-1}, y)$$

Cette application est un homéomorphisme car $(x, y) \in \tilde{F}_2(L_{7,1}) \Leftrightarrow xy^{-1} \notin (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$ par définitions.

On remarque finalement que S^3 privé d'un point est homéomorphe à \mathbb{R}^3 et que \mathbb{R}^3 privé de 6 points est homotopiquement équivalent à $\vee_6 S^2$, d'où le résultat. ■

Corollaire 5

$\tilde{F}_2(L_{7,1})$ est formel (comme bouquet et produit de sphères), donc tout produit de Massey sur $\tilde{F}_2(L_{7,1})$ est nul.

4.5 Intersection et cup-produit

Le raisonnement précédent ne peut pas s'appliquer dans le cas de $\tilde{F}_2(L_{7,2})$ car cet espace ne peut pas être formé par l'action discontinue d'un sous-groupe de $S^3 \times S^3$. $\tilde{F}_2(L_{7,2})$ ne peut donc pas s'écrire comme un produit simple produit cartésien (il s'agit en fait d'un espace fibré).

Pour montrer le résultat final, nous allons exhiber un produit de Massey non nul sur $\tilde{F}_2(L_{7,2})$. Pour cela, nous allons étudier le problème de manière géométrique en utilisant la théorie de l'intersection.

Proposition 30

Soit M Une variété compacte, connexe et orientable de dimension n , alors

$$H_n(M) \cong \mathbb{Z}$$

Démonstration : Une démonstration est donnée dans [10]. ■

Définition 26

Soient X une variété, M une sous-variété compacte, connexe et orientable de dimension n et i l'inclusion $M \subset X$.

$H_n(M) = \mathbb{Z}$, notons alors $[M]$ son générateur, appelé **classe fondamentale** de M . Nous confondrons alors M et $i_{\#}([M])$.

Définition 27

Soient X une variété et M et N deux sous-variétés de X . M et N sont dites transverses si pour tout point de $x \in M \cap N$, on a l'égalité des des espaces tangents :

$$T_x M + T_x N = T_x X$$

Proposition 31

Soient X une variété compacte orientée de dimension n , M et N deux sous-variétés compactes, connexes et orientables de dimension p et q et $D : H_i(X) \rightarrow H^{n-i}(X)$ l'application de dualité de Poincaré.

Si M et N sont transverses, $M \cap N$ est alors une sous variété de dimension $p + q - n$, et :

$$D(M \cap N) = D(M) \smile D(N)$$

L'intersection des sous-variété apparait alors comme l'opération duale du cup-produit.

Démonstration : Ce résultat est démontré dans [1]. ■

Proposition 32

Pour une variété à bords M de dimension n et de frontière B , la dualité de Poincaré donne un isomorphisme :

$$H^p(M \setminus B) \cong H_{n-p}(M, B)$$

Le produit de Massey en termes d'homologie peut alors se formuler comme suit : Soient A_1 , A_2 et A_3 trois sous-variétés d'une variété à bords X et a_1 , a_2 et a_3 leur classe de cohomologie associée par la dualité de Poincaré. Si A_2 et A_3 ne s'intersectent pas hors de la frontière de X , A_1 et A_2 sont transverses et $A_1 \cap A_2$ est le bord de X_{12} , qui est tranverse à A_3 , alors $A_3 \cap X_{12}$ s'identifie à $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ par la dualité de Poincaré.

4.6 Produit de Massey non nul sur $\tilde{F}_2(L_{7,2})$

Nous souhaitons montrer que le produit de Massey $\langle a_4, a_1, a_2 + a_6 \rangle$ est non nul. Nous allons voir que A_1 n'intersecte ni A_2 ni A_6 , il nous suffira alors de montrer que la sous variété dont $A_4 \cap A_1$ est la frontière intersecte $A_2 + A_6$ en une variété représentant une classe d'homologie non nulle.

Comme $\tilde{F}_2(L_{7,2}) = \{(x, y) \in (L_{7,2})^2 \mid x \neq gy \ \forall g \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\}$, on peut également écrire :

$$\tilde{F}_2(L_{7,2}) = (S^3 \times S^3) \setminus \left(\bigsqcup_{k=0}^6 \Delta_k \right)$$

où $\Delta_k = \{(z_1, z_2), (\zeta^k z_1, \zeta^{2k} z_2) \mid x \in S^3\}$.

Par la dualité de Poincaré nous avons également l'isomorphisme :

$$H^p \left((S^3 \times S^3) \setminus \left(\bigsqcup_{k=0}^6 \Delta_k \right) \right) \cong H_{6-p} \left((S^3 \times S^3), \left(\bigsqcup_{k=0}^6 \Delta_k \right) \right)$$

Proposition 33

Les applications $f_k : S^3 \rightarrow S^3 \times S^3 : (z_1, z_2) \mapsto ((z_1, z_2), (\zeta \cdot z_1, \zeta^2 \cdot z_2))$ sont homotopes et les images A_k des homotopies de f_{k-1} à f_k (où k est pris modulo 7) génèrent $H_4 \left((S^3 \times S^3), \left(\bigsqcup_{k=0}^6 \Delta_k \right) \right)$, leurs classes de cohomologie correspondantes a_k génèrent donc $H^2(\tilde{F}_2(L_{7,2}))$.

Démonstration : Définissons les homotopies de f_{k-1} à f_k :

$$\mathcal{H}_k : S^3 \times [0, 1] \rightarrow S^3 \times S^3$$

$$((z_1, z_2), t) \mapsto ((z_1, z_2), (\zeta^{k-1+t} z_1, \zeta^{2(k-1+t)} z_2))$$

Comme $\partial S^3 = 0$ et comme l'image de \mathcal{H}_k aux temps 0 et 1 est Δ_{k-1} et Δ_k , l'image de \mathcal{H}_k est bien au cycle dans $((S^3 \times S^3), \left(\bigsqcup_{k=0}^6 \Delta_k \right))$, elle représente donc bien un élément de $H_4 \left((S^3 \times S^3), \left(\bigsqcup_{k=0}^6 \Delta_k \right) \right)$. On a également la suite exacte suivante :

$$H_4(S^3 \times S^3) \rightarrow H_4 \left((S^3 \times S^3), \left(\bigsqcup_{k=0}^6 \Delta_k \right) \right) \xrightarrow{\partial} H_3 \left(\bigsqcup_{k=0}^6 \Delta_k \right) \xrightarrow{i} H_3(S^3 \times S^3)$$

Comme S^3 a des groupes d'homologie sans torsion, on a :

$$H_n(S^3 \times S^3) \cong \sum_{i+j=n} H_i(S^3) \otimes H_j(S^3)$$

Donc $H_4(S^3 \times S^3) = 0$ et $H_3(S^3 \times S^3) = \mathbb{Z}^2$.

∂ est donc injective, il nous suffit alors de calculer $\text{Ker } i$ pour déterminer $H_4 \left((S^3 \times S^3), \left(\bigsqcup_{k=0}^6 \Delta_k \right) \right)$. Comme Δ_k est de dimension 3, $H_3(\Delta_k) = \mathbb{Z}$, donc $H_3 \left(\bigsqcup_{k=0}^6 \Delta_k \right) = \mathbb{Z}^7$ et $i(\Delta_k) = i(\Delta_{k'})$ pour tout k et k' car les \mathcal{H}_k fournissent des homotopies entre ces inclusions.

Alors $\text{Ker } i = \{ \sum \lambda_i \Delta_i \mid \sum \lambda_i = 0 \} \cong \mathbb{Z}^6$.

De plus, les $\partial(A_k) = \Delta_k - \Delta_{k-1}$ engendrent $\text{Ker } i$, en effet :

$$\begin{aligned} \sum \lambda_i \Delta_i &= \lambda_6 \partial(A_6) \\ &+ (\lambda_5 + \lambda_6) \partial(A_5) \\ &+ (\lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6) \partial(A_4) \\ &+ (\lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6) \partial(A_3) \\ &+ (\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6) \partial(A_2) \\ &+ (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6) \partial(A_1) \\ &+ (\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6) \Delta_0 \end{aligned}$$

Donc, comme $\sum \lambda_i = 0$, les A_k génèrent $H_4((S^3 \times S^3), (\bigsqcup_{k=0}^6 \Delta_k))$ et les a_k génèrent alors $H^2(\tilde{F}_2(L_{7,2}))$ ■

Proposition 34

A_k n'intersecte que A_{k+3} et A_{k+4} hors de $\bigsqcup_{k=0}^6 \Delta_k$ (où k est pris modulo 7).

Démonstration : Si $\mathcal{H}_k((z_1, z_2), t) = \mathcal{H}_{k'}((z'_1, z'_2), t')$, alors $(z_1, z_2) = (z'_1, z'_2)$ donc :

- $\zeta^{k-1+t} z_1 = \zeta^{k'-1+t'} z_1$, ce qui n'a de solution que lorsque $z_1 = 0$
- $\zeta^{2(k-1+t)} z_2 = \zeta^{2(k'-1+t')} z_2$, ce qui a une solution pour $k' = k + 3$ et $t' = t + \frac{1}{2}$ si $t \in [0, \frac{1}{2}[$ et pour $k' = k + 4$ et $t' = t - \frac{1}{2}$ si $t \in]\frac{1}{2}, 1]$. ■

Proposition 35

A_1 et A_4 sont transverses.

Démonstration : D'après ce que nous venons de voir :

$$A_1 \cap A_4 = \{((0, z_2), (0, \zeta^\lambda z_2)) \mid |z_2| = 1, \lambda \in [0, 1]\}$$

Nous devons maintenant montrer que la somme des espaces tangents à A_1 et A_4 en ces points est de dimension 6.

L'espace tangent à S^3 au point $(0, z_2)$ est engendré par les vecteurs $(1, 0)$, $(i, 0)$ et $(0, iz_2)$.

Dans A_1 , le point $((0, z_2), (0, \zeta^\lambda z_2))$ correspond à $t = \lambda/2$, l'espace tangent à A_1 au point $((0, z_2), (0, \zeta^\lambda z_2))$ contient donc les vecteurs :

$$\begin{aligned} ((1, 0), (\zeta^{k-1+t}, 0)) &= ((1, 0), (\zeta^{\lambda/2}, 0)) \\ ((i, 0), (i\zeta^{k-1+t}, 0)) &= ((i, 0), (i\zeta^{\lambda/2}, 0)) \\ ((0, iz_2), (\zeta^{k-1+t}, 0)) &= ((0, iz_2), (i\zeta^\lambda z_2, 0)) \end{aligned}$$

De même, l'espace tangent à A_4 en ce point, avec la correspondance $t = \lambda/2 + \frac{1}{2}$ contient les vecteurs :

$$((1, 0), (-\zeta^{\lambda/2}, 0)) \quad ((i, 0), (-i\zeta^{\lambda/2}, 0)) \quad ((0, iz_2), (i\zeta^\lambda z_2, 0))$$

Considérons désormais le chemin $s \mapsto ((0, z_2), (0, \zeta^{\lambda+s} z_2))$.

La dérivée de ce chemin en $s = 0$ nous donne un nouveau vecteur de l'espace tangent à A_1 (et à A_4) : $((0, 0), (0, i\zeta^\lambda z_2))$.

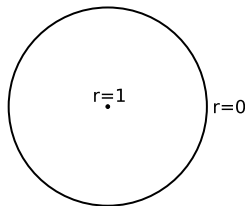
Nous avons bien trouvé 6 vecteur indépendants dans les espaces tangents à A_1 et A_4 en tout point de leur intersection, A_1 et A_4 sont donc bien transverses. ■

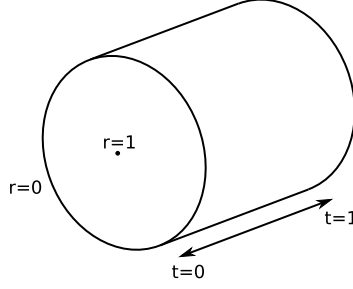
Proposition 36

$A_1 \cap A_4$ est la frontière (relative) d'une variété de dimension 3.

Démonstration : Définissons le disque (de dimension 2) :

$$D_2 = \{(r, x) \mid 0 \leq r \leq 1, r^2 + |x|^2 = 1, x \in \mathbb{C}\} \subset S^3$$





Puis le cylindre (de dimension 3) :

$$D_2 \times [0, 1] \cong X_{14} := \{(r, x), (\zeta^{4t}r, \zeta^t x) \mid (r, x) \in D_2, 0 \leq t \leq 1\}$$

Dans $S^3 \times S^3$, la frontière de X_{14} est composé de trois parties correspondant à $t = 0$, $t = 1$ et $r = 0$:

$$\begin{aligned} \partial_{t=0}X_{14} &= \{(r, x), (r, x) \mid (r, x) \in D_2\} \subset \Delta_0 \\ \partial_{t=1}X_{14} &= \{(r, x), (\zeta^4r, \zeta x) \mid (r, x) \in D_2\} = \{(r, x), (\zeta^4r, \zeta^8x) \mid (r, x) \in D_2\} \subset \Delta_4 \\ \partial_{r=0}X_{14} &= \{((0, x), (0, \zeta^t x)) \mid |x| = 1, t \in [0, 1]\} = A_1 \cap A_4 \end{aligned}$$

Donc, dans $((S^3 \times S^3), (\bigsqcup_{k=0}^6 \Delta_k))$, $\partial X_{14} = A_1 \cap A_4$. ■

Proposition 37

$$\left| X_{14} \cap A_6 = \emptyset \right.$$

Démonstration : L'intersection est donnée par l'équation :

$$((r, x), (\zeta^{4t}r, \zeta^t x)) = ((z_1, z_2), (\zeta^{6-1+s}z_1, \zeta^{2(6-1+s)}z_2))$$

Qui a une solution si $4t = 5 + s$ ou $t = 3 + 2s$ en ont. En effet, si une seule de ces équations a une solution, il est possible de choisir $r = 0$ ou $x = 0$ et ainsi d'avoir une solution. Hors, $t \in [0, 1]$ et $s \in [0, 1]$, ces équations n'ont donc pas de solution. ■

Proposition 38

$$\left| X_{14} \cap A_2 = \{((1, 0), (\zeta^{1+s}, 0)) \mid s \in [0, 1]\} \right.$$

Démonstration : De même, cette intersection se déduit des équations $4t = 1 + s$ et $t = 2 + 2s$. Hors, seule la première de ces équations a une solution, pour tout $s \in [0, 1]$. Donc $X_{14} \cap A_2 = \{((1, 0), (\zeta^{1+s}, 0)) \mid s \in [0, 1]\}$. ■

Proposition 39

$$\left| X_{14} \text{ et } A_2 \text{ sont transverses.} \right.$$

Démonstration : En raisonnant de la même manière que dans la proposition 35, on trouve les vecteurs suivants comme générateurs des espaces tangents à X_{14} et à A_2 au point $((1, 0), (\zeta^{1+s}, 0)) = ((1, 0), (\zeta^{4t}, 0))$:

$$((i, 0), (i\zeta^{1+s})), ((0, 1), (0, \zeta^{2+2s})), ((0, i), (0, i\zeta^{2+2s})) \text{ et } ((0, 0), (i\zeta^{1+s}, 0)) \text{ pour } A_2$$

$$((0, 1), (0, \zeta^t)), ((0, i), (0, i\zeta^t)) \text{ et } ((0, 0), (i\zeta^{4t}, 0)) \text{ pour } X_{14}$$

Ces vecteurs gènèrent bien un espace de dimension 6. ■

Proposition 40

Notons C_i l'image de la fonction $s \mapsto ((1, 0), (\zeta^{i+s}, 0))$.
 $H_1 \left((S^3 \times S^3), \left(\bigsqcup_{k=0}^6 \Delta_k \right) \right)$ est engendré par les C_i .

Démonstration : On a la suite exacte suivante :

$$H_1(S^3 \times S^3) \xrightarrow{p} H_1 \left((S^3 \times S^3), \left(\bigsqcup_{k=0}^6 \Delta_k \right) \right) \xrightarrow{\partial} H_0 \left(\bigsqcup_{k=0}^6 \Delta_k \right) \xrightarrow{i} H_0(S^3 \times S^3)$$

$H_1(S^3 \times S^3) = 0$ donc $H_1 \left((S^3 \times S^3), \left(\bigsqcup_{k=0}^6 \Delta_k \right) \right) \cong \text{Im} \partial = \text{Ker } i$.

De plus, $H_0(S^3 \times S^3) = \mathbb{Z}$ donc $\text{Ker } i = \{ \sum \lambda_i e_i \mid \sum \lambda_i = 0 \}$ où les e_i sont les gènérateurs de $H_0 \left(\bigsqcup_{k=0}^6 \Delta_k \right)$ correspondant aux composantes connexes Δ_i .

Comme C_i est un chemin reliant Δ_i à Δ_{i+1} , $\partial C_i = e_{i+1} - e_i$ donc, de la même manière que dans la proposition 33, les C_i gènèrent $H_1 \left((S^3 \times S^3), \left(\bigsqcup_{k=0}^6 \Delta_k \right) \right)$. ■

Proposition 41

Le produit de Massey $\langle a_4, a_1, a_2 + a_6 \rangle$ est non nul.

Démonstration : Tout d'abord :

- $a_4 \smile a_1 = 0$ car $A_4 \cap A_1$ est la frontière d'une certaine chaîne (X_{14}).
- $a_1 \smile a_2 + a_6 = 0$ car $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ et $A_1 \cap A_6 = \emptyset$ d'après la proposition 34.

Notons A^* la classe de cohomologie associée à une classe d'homologie A par la dualité de Poincaré.

$$\begin{aligned} \langle a_4, a_1, a_2 + a_6 \rangle &= X_{14}^* \smile (a_2 + a_6) - (-1)^{\text{deg}(a_4)} a_4 \smile \emptyset^* \\ &= X_{14}^* \smile (a_2 + a_6) \\ &= (X_{14}^* \smile a_2) + (X_{14}^* \smile a_6) \\ &= (X_{14} \cap A_2)^* + (X_{14} \cap A_6)^* \\ &= C_1^* + \emptyset^* \\ &= C_1^* \end{aligned}$$

Comme C_1 représente une classe d'homologie non nulle (par le théorème 40), C_1^* représente également une classe de cohomologie non nulle.

Finalement, il faut vérifier que C_1^* n'appartient pas à l'idéal $\langle a_4, a_2 + a_6 \rangle$:

Notons S l'image de l'application $S^3 \rightarrow S^3 \times S^3 : x \mapsto (1, x)$ et remarquons que $C_i = A_{i+1} \cap S$, donc $C_i^* = a_{i+1} \smile S^*$.

Donc $\langle a_4, a_1, a_2 + a_6 \rangle = C_1^* = a_2 \smile S^* \notin \langle a_4, a_2 + a_6 \rangle$. ■

Remarque 6. A_6 ne modifie pas la classe de cohomologie que nous trouvons en calculant le produit de Massey, mais il est important de l'inclure pour tomber sur un élément qui n'appartient pas à l'idéal considéré.

Références

- [1] Glen E. Bredon. *Topology and geometry*, volume 139 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1993.
- [2] E. J. Brody. The topological classification of the lens spaces. *Ann. of Math. (2)*, 71 :163–184, 1960.
- [3] Eva Maria Feichtner and Günter M. Ziegler. On orbit configuration spaces of spheres. *Topology Appl.*, 118(1-2) :85–102, 2002. Arrangements in Boston : a Conference on Hyperplane Arrangements (1999).
- [4] Yves Félix, Stephen Halperin, and Jean-Claude Thomas. *Rational homotopy theory*, volume 205 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2001.
- [5] Phillip Griffiths and Joseph Harris. *Principles of algebraic geometry*. Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 1978. Pure and Applied Mathematics.
- [6] Riccardo Longoni and Paolo Salvatore. Configuration spaces are not homotopy invariant. *Topology*, 44(2) :375–380, 2005.
- [7] James R. Munkres. *Elements of algebraic topology*. Addison-Wesley Publishing Company, Menlo Park, CA, 1984.
- [8] Joseph J. Rotman. *An introduction to algebraic topology*, volume 119 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1988.
- [9] Joseph J. Rotman. *An introduction to homological algebra*. Universitext. Springer, New York, second edition, 2009.
- [10] Tammo tom Dieck. *Algebraic topology*. EMS Textbooks in Mathematics. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2008.