

Représentations du groupe symétrique

Marie Derrien

Rapport de stage de fin de Licence 3

Université de Brest. Laboratoire de Mathématiques de Bretagne-Atlantique.

31 août 2016

Maître de stage : Eric Rannou

Sommaire

1	Le groupe symétrique	3
1.1	Définitions, générateurs et signature	3
1.2	Notations	4
1.3	Classes de conjugaison et partitions	4
2	Représentation complexe des groupes finis	4
2.1	Représentation linéaire et matricielle des groupes finis	4
2.2	Décomposition des représentations	8
2.3	Caractères	10
2.4	Représentations restreintes et induites	12
3	Représentations du groupe symétrique	13
3.1	Construction des S_n -modules M^λ	13
3.2	Construction des modules de Specht S^λ	16
3.3	Irréductibilité des modules de Specht S^λ	19
3.4	Base des modules de Specht S^λ	23
3.5	Représentation naturelle de Young	29
3.6	Règles de branchement	31
3.7	Décomposition de M^μ	34
4	Conclusion	40

Ce travail est consacré aux représentations du groupe symétrique (dans le cas fini) sur le corps des nombres complexes. Il débute sur deux parties, l'une consacrée au groupe symétrique, l'autre à la théorie de la représentation des groupes afin d'ancrer le sujet du stage. Seuls les résultats importants et utiles à notre travail y seront énoncés, les démonstrations seront omises. Le lecteur pourra se référer aux livres [Sag] et [Cal] pour des démonstrations complètes. Nous traiterons néanmoins, dans la deuxième partie, de nombreux exemples, en particulier ceux concernant le groupe symétrique, afin de faciliter la compréhension de la troisième partie, consacrée elle au cœur du sujet : les représentations du groupe symétrique.

1 Le groupe symétrique

Dans toute cette section, n désigne un entier naturel non nul.

1.1 Définitions, générateurs et signature

Définition 1.1.1. Soit E un ensemble. On note S_E l'ensemble des permutations de E .

Définition 1.1.2. Le *groupe symétrique d'indice n* est le groupe des permutations de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$. Il est noté S_n .

Proposition 1.1.3. S_n est un groupe fini d'ordre $n!$.

Le théorème suivant justifie la place importante des groupes symétriques parmi les groupes finis.

Théorème 1.1.4 (Théorème de Cayley). *Tout groupe est isomorphe à un sous-groupe du groupe de ses permutations.*

En particulier, tout groupe fini d'ordre n est isomorphe à un sous-groupe du groupe symétrique S_n .

Familles génératrices de S_n

Théorème 1.1.5. *Toute permutation $\sigma \in S_n$ peut s'écrire sous la forme*

$$\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \dots \circ \sigma_k$$

où $k \in \mathbb{N}$, $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$ sont des cycles disjoints, tous distincts de Id . Cette décomposition est unique à ordre des facteurs près.

Proposition 1.1.6. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le groupe S_n est engendré par l'ensemble de ses cycles.*

Proposition 1.1.7. *Pour tout entier $n \geq 2$, le groupe S_n est engendré par l'ensemble de ses transpositions.*

Proposition 1.1.8. *Pour tout entier $n \geq 2$, le groupe S_n est engendré par les $n - 1$ transpositions de la forme $(i \ i + 1)$ telles que $i \in \{1, \dots, n - 1\}$.*

Signature

Définition 1.1.9. Soit $\sigma \in S_n$. On appelle *signe* l'application

$$\begin{aligned} \text{sign} : S_n &\rightarrow \{-1, 1\} , \\ \sigma &\mapsto (-1)^k \end{aligned}$$

où $k \in \mathbb{N}$ est le nombre de transpositions dans une décomposition de σ en produit de transpositions.

Proposition 1.1.10. Pour tout entier $n \geq 2$, l'application sign est un morphisme de groupes surjectif.

Proposition 1.1.11. Soit $\sigma \in S_n$. Pour toute transposition $\tau \in S_n$,

$$\text{sign}(\sigma \circ \tau) = -\text{sign}(\sigma)$$

.

1.2 Notations

Soit $\sigma \in S_n$. Il existe plusieurs manières naturelles d'écrire la permutation σ .

1. Sous forme de lignes : $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$. Cette notation peut être intéressante pour calculer des compositions.
2. Sous forme de cycles : σ se décompose sous la forme $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \dots \circ \sigma_k$ où $k \in \mathbb{N}$, $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$ sont des cycles disjoints. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, il existe $j_i \in \{1, \dots, n\}$ tel que le cycle σ_i s'écrive $\sigma_i = (j_i \ \sigma(j_i) \ \dots \ \sigma^{p_i-1}(j_i))$ où $p_i \in \mathbb{N}$ vérifie $\sigma^{p_i}(j_i) = j_i$. Donc σ s'écrit

$$\sigma = (j_1 \ \sigma(j_1) \ \dots \ \sigma^{p_1-1}(j_1)) \circ \dots \circ (j_k \ \sigma(j_k) \ \dots \ \sigma^{p_k-1}(j_k)).$$

1.3 Classes de conjugaison et partitions

Définition 1.3.1. Une partition de n est un l -uplet

$$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$$

où les λ_i sont décroissants, non nuls et vérifient $\sum_{i=1}^l \lambda_i = n$. On note $\lambda \vdash n$.

Définition 1.3.2. Soit $\sigma \in S_n$. σ se décompose en produit de cycles disjoints $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \dots \circ \sigma_k$. On note n_i la longueur du cycle σ_i . Quitte à permuter les cycles, on peut supposer que $1 \leq n_1 \leq \dots \leq n_k$. On appelle *type de cycles* de σ la partition suivante de n :

$$\lambda = (n_1, \dots, n_l).$$

Rappelons la notion de classes de conjugaison pour des groupes quelconques.

Définition 1.3.3. Soit G un groupe. Deux éléments g et h de G sont dits *conjugués* s'il existe $k \in G$ tel que $g = khk^{-1}$. L'ensemble des éléments conjugués à un élément $g \in G$ est appelé *classe de conjugaison* de g .

Proposition 1.3.4. La conjugaison est une relation d'équivalence. Les classes de conjugaison distinctes de G forment une partition de G .

Proposition 1.3.5. Le nombre de classes de conjugaison de S_n est égal au nombre de partitions de n .

2 Représentation complexe des groupes finis

2.1 Représentation linéaire et matricielle des groupes finis

Notations :

· Pour tout $d \in \mathbb{N}$, $GL_d(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrices carrées de taille d , inversibles et à coefficients complexes.

· Pour tout espace vectoriel V de dimension finie, $GL(V)$ désigne l'ensemble des automorphismes de V .

· Pour tout $A \in M_n(\mathbb{C})$, $\text{Tr}(A)$ désigne la trace de la matrice A .

Dans toute cette section, on se placera sur le corps des nombres complexes \mathbb{C} .

Représentation linéaire

Définition 2.1.1 (Représentation linéaire). Soit G un groupe fini. On appelle *représentation linéaire* de G (sur le corps \mathbb{C}) la donnée d'un morphisme de groupes $\rho : G \rightarrow GL(V)$ où V est un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie.

De manière équivalente, une représentation linéaire de G est la donnée d'une action à gauche ρ de G sur un \mathbb{C} -espace vectoriel V telle que pour tout $g \in G$, $V \rightarrow V$ est \mathbb{C} -linéaire.
 $\mathbf{v} \mapsto \rho(g)\mathbf{v}$

Définition 2.1.2 (G -module). Soit $\rho : G \rightarrow GL(V)$ une représentation linéaire d'un groupe fini G . V est appelé G -module et $\dim V$ est le *degré* de la représentation.

En général, on écrit pour tout $(g, \mathbf{v}) \in (G, V)$, $g \cdot \mathbf{v}$ ou même $g\mathbf{v}$ à la place de $\rho(g)\mathbf{v}$. On parle souvent de la représentation V de G pour parler de $\rho : G \rightarrow GL(V)$.

Représentation matricielle

Définition 2.1.3 (Représentation matricielle). Une *représentation matricielle* d'un groupe G fini est un morphisme de groupe $X : G \rightarrow GL_d(\mathbb{C})$, où $d \in \mathbb{N}^*$. d est appelé le *degré* ou la *dimension* de la représentation, noté $\deg(X)$.

Proposition 2.1.4. Soit G un groupe d'élément neutre e .

$X : \begin{array}{l} G \rightarrow GL_d(\mathbb{C}) \\ g \mapsto X(g) \end{array}$ est une représentation matricielle de G si et seulement si $X(e) = I_d$ et pour tout $(g, h) \in G \times G$, $X(gh) = X(g)X(h)$.

Proposition 2.1.5. Soient G un groupe fini et $d \in \mathbb{N}^*$. G possède une représentation linéaire de degré d si et seulement si G possède une représentation matricielle de degré d .

Démonstration. Supposons que G possède une représentation V de degré d , de morphisme ρ . Soit \mathcal{B} une base de V . Considérons

$$X : \begin{array}{l} G \rightarrow M_d(\mathbb{C}) \\ g \mapsto \text{mat}_{\mathcal{B}}\rho(g) \end{array} .$$

Soit $(g, h) \in G$. $\rho(g) \circ \rho(h) = \rho(gh)$ donc $X(g)X(h) = X(gh)$. En notant e l'élément neutre de G , $\rho(e) = \text{Id}_V$ donc $X(e) = I_d$. Donc X est une représentation matricielle de G de degré d .

Réciproquement, supposons que G possède une représentation matricielle X de degré d . Pour tout $g \in G$, $X(g)$ peut être considérée comme la matrice d'une application linéaire $\rho(g) : \mathbb{C}^d \rightarrow \mathbb{C}^d$ dans la base canonique de \mathbb{C}^d . X étant un morphisme de groupes, l'application $\rho : G \rightarrow GL(\mathbb{C}^d)$ est un morphisme de groupes.

D'où le résultat. □

On peut alors poser $g\mathbf{v} = X(g)\mathbf{v}$. On utilisera la correspondance entre représentation linéaire et représentation matricielle dans le reste du rapport.

Exemples de représentations

Donnons à présent des exemples de représentations sur des groupes connus.

Exemple 2.1.6 (Représentation triviale). Pour tout groupe G ,

$$X : \begin{array}{l} G \rightarrow GL_1(\mathbb{C}) \\ g \mapsto (1) \end{array}$$

est une représentation matricielle de G de degré 1. On l'appelle *représentation triviale* de G , notée 1_G .

Exemple 2.1.7 (Représentation signature de S_n).

$$\begin{aligned} X : S_n &\rightarrow GL_1(\mathbb{C}) \\ \sigma &\mapsto (\text{sign}(\sigma)) \end{aligned}$$

est une représentation matricielle du groupe S_n de degré 1. En effet, pour tout $(\sigma, \pi) \in S_n^2$, $\text{sign}(\sigma\pi) = \text{sign}(\pi)\text{sign}(\sigma)$ et $\text{sign}(\text{Id}) = 1$. On l'appelle *représentation signature*.

Exemple 2.1.8 (Représentation définie de S_n).

$$\begin{aligned} X : S_n &\rightarrow GL_n(\mathbb{C}) \\ \sigma &\mapsto P_\sigma \end{aligned}$$

où $P_\sigma = (\delta_{\sigma(j),i})_{1 \leq i,j \leq n}$ (δ désigne le symbole de Kronecker) désigne la matrice de permutation associée à σ , est une représentation matricielle de S_n de degré n . En effet, pour tout $(\sigma, \pi) \in S_n^2$, $P_{\sigma\pi} = P_\sigma P_\pi$ et $P_{\text{Id}} = I_n$. On l'appelle *représentation définie*. De plus, pour tout $\sigma \in S_n$, P_σ contient uniquement des 0 et des 1 avec un seul 1 par ligne et par colonne.

Illustration. On considère le groupe

$$S_3 = \{\text{Id}, (1\ 2), (1\ 3), (2\ 3), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}.$$

La représentation signature est donnée par :

$$\begin{aligned} X(\text{Id}) &= X((1\ 2\ 3)) = X((1\ 3\ 2)) = 1, \\ X((1\ 2)) &= X((1\ 3)) = X((2\ 3)) = -1. \end{aligned}$$

La représentation de permutation est donnée par :

$$\begin{aligned} X(\text{Id}) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & X((1\ 2)) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & X((1\ 3)) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ X((2\ 3)) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & X((1\ 2\ 3)) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & X((1\ 3\ 2)) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exemple 2.1.9 (Représentation du groupe cyclique). Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit C_n un groupe cyclique d'ordre n , d'élément neutre e . On note g un générateur de C_n . Cherchons les représentations de degré 1 de C_n .

Soit X une représentation matricielle de C_n de degré 1. Il existe $\omega \in \mathbb{C}$ tel que $X(g) = (\omega)$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $X(g^k) = (\omega^k)$. Or $g^n = e$. Donc $X(g^n) = X(e) = (1) = (\omega^n)$. Donc ω est une racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité.

Réciproquement, pour tout racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité, $X : g^k \mapsto \omega^k$ est une représentation de C_n de degré 1.

On a donc trouvé n représentations de degré 1 de C_n . Le cas où $\omega = 1$ correspond à la représentation triviale. Nous verrons que toute représentation de C_n est somme directe de ces représentations de degré 1.

G-Module $\mathbb{C}[S]$ et représentations associées

Nous allons maintenant construire un G -module à partir d'un ensemble fini S sur lequel G agit. Cela définira ainsi de nouvelles représentations d'un groupe G fini.

Soit $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ un ensemble fini. On note

$$\mathbb{C}S = \mathbb{C}\{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_n\} = \{c_1\mathbf{s}_1 + c_2\mathbf{s}_2 + \dots + c_n\mathbf{s}_n \mid \forall i \in \{1 \dots n\} c_i \in \mathbb{C}\}$$

l'espace vectoriel de base S sur \mathbb{C} . Les éléments de S sont notés \mathbf{s} lorsqu'ils sont considérés comme des vecteurs de $\mathbb{C}S$. Les deux opérations sur $\mathbb{C}S$ sont les suivantes :

· L'addition vectorielle : pour tout $(c_1\mathbf{s}_1 + \dots + c_n\mathbf{s}_n, d_1\mathbf{s}_1 + \dots + d_n\mathbf{s}_n) \in \mathbb{C}S^2$,

$$(c_1\mathbf{s}_1 + \dots + c_n\mathbf{s}_n) + (d_1\mathbf{s}_1 + \dots + d_n\mathbf{s}_n) = (c_1 + d_1)\mathbf{s}_1 + \dots + (c_n + d_n)\mathbf{s}_n.$$

· La multiplication scalaire : pour tout $c_1\mathbf{s}_1 + \dots + c_n\mathbf{s}_n \in \mathbb{C}S$ et tout $c \in \mathbb{C}$,

$$c(c_1\mathbf{s}_1 + \dots + c_n\mathbf{s}_n) = (cc_1)\mathbf{s}_1 + \dots + (cc_n)\mathbf{s}_n.$$

Supposons que G agisse sur S . On peut étendre cette action par linéarité de sorte que $\mathbb{C}S$ définisse un G -module : pour tout $g \in G$ et tout $c_1\mathbf{s}_1 + \dots + c_n\mathbf{s}_n \in \mathbb{C}S$,

$$g(c_1\mathbf{s}_1 + \dots + c_n\mathbf{s}_n) = c_1(g\mathbf{s}_1) + \dots + c_n(g\mathbf{s}_n).$$

Vérifions que $\mathbb{C}S$ définit bien un G -module. $\mathbb{C}S$ est un espace vectoriel sur \mathbb{C} . Comme G agit sur S , pour tout $(g, h) \in G^2$, tout $(\mathbf{s}, \mathbf{t}) \in \mathbb{C}S^2$ et tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$, en notant $\mathbf{s} = c_1\mathbf{s}_1 + \dots + c_n\mathbf{s}_n$,

- $g\mathbf{s} = c_1(g\mathbf{s}_1) + \dots + c_n(g\mathbf{s}_n)$ et pour tout $i \in \{1..n\}$, $g\mathbf{s}_i = g\mathbf{s}_i \in S$ donc $g\mathbf{s} \in \mathbb{C}S$,
- $(gh)(\mathbf{s}) = g(h\mathbf{s})$,
- $e\mathbf{s} = \mathbf{s}$ où e désigne l'élément neutre de G ,
- $g(c\mathbf{s} + d\mathbf{t}) = c(g\mathbf{s}) + d(g\mathbf{t})$.

Définition-Proposition 2.1.10 (Représentation de permutation). Soit G un groupe agissant sur un ensemble fini $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$. $\mathbb{C}S$ est un G -module de dimension n . On l'appelle *représentation de permutation* associée à S . Les éléments de S forment une base de $\mathbb{C}S$, appelée *base canonique*.

Exemple 2.1.11. Soient S_n le groupe symétrique d'indice n et $S = \{1, 2, \dots, n\}$. S_n opère de façon naturelle sur S par

$$\begin{aligned} S_n \times S &\rightarrow S \\ (\sigma, i) &\mapsto \sigma(i) \end{aligned}$$

$\mathbb{C}S = \{c_1\mathbf{1} + \dots + c_n\mathbf{n} \mid \forall i \in \{1..n\} c_i \in \mathbb{C}\}$ est un S_n -module et $(\mathbf{1}, \dots, \mathbf{n})$ est la base canonique de $\mathbb{C}S$. En notant X la représentation matricielle associée à $\mathbb{C}S$, on peut alors calculer la matrice $X(\sigma)$ pour tout $\sigma \in S_n$ dans cette base. La $i^{\text{ème}}$ colonne de $X(\sigma)$ est donnée par la décomposition de $\sigma\mathbf{i}$ dans $(\mathbf{1}, \dots, \mathbf{n})$. $\mathbb{C}S$ est le module associé à la représentation définie de S_n , étudiée dans l'exemple 2.1.8.

Illustration. Considérons S_3 . Soit $\mathcal{B} = (\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3})$ la base canonique de $\mathbb{C}S$.

$$(1 \ 2 \ 3) \mathbf{1} = \mathbf{2}, \quad (1 \ 2 \ 3) \mathbf{2} = \mathbf{3} \text{ et } (1 \ 2 \ 3) \mathbf{3} = \mathbf{1}.$$

Donc

$$X((1 \ 2 \ 3)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = P_{(1 \ 2 \ 3)}$$

Exemple 2.1.12 (Représentation régulière). Soit $G = \{g_1, \dots, g_n\}$ un groupe fini.

$$\begin{aligned} G \times G &\rightarrow G \\ (g_i, g_j) &\mapsto g_i g_j \end{aligned}$$

définit une action de G sur lui-même. $\mathbb{C}[G] = \{c_1\mathbf{g}_1 + \dots + c_n\mathbf{g}_n \mid \forall i \in \{1..n\} c_i \in \mathbb{C}\}$ est un G -module, appelé *algèbre de groupe* de G . La multiplication est donnée par $\mathbf{g}_i \mathbf{g}_j = \mathbf{g}_k$ dans $\mathbb{C}[G]$ si $g_i g_j = g_k$ dans G et étendue linéairement. Ainsi, l'action de G sur $\mathbb{C}[G]$ est donnée par

$$g(c_1\mathbf{g}_1 + \dots + c_n\mathbf{g}_n) = c_1(g\mathbf{g}_1) + \dots + c_n(g\mathbf{g}_n).$$

Remarque. On utilise la notation $[]$ lorsque $\mathbb{C}[E]$ est une algèbre, pour tout ensemble E .

Exemple 2.1.13 (Représentation des classes à gauche). Soit G un groupe. Soit H un sous-groupe de G . Soit $\{g_1, \dots, g_k\}$ un système de représentants des classes à gauche de G modulo H . Posons $\mathcal{H} = \{g_1H, \dots, g_kH\}$ l'ensemble des classes. G agit sur \mathcal{H} par l'action

$$\begin{aligned} G \times \mathcal{H} &\rightarrow \mathcal{H} \\ (g, g_iH) &\mapsto (gg_i)H. \end{aligned}$$

Illustration. Prenons $G = S_3$ et $H = \{\text{Id}, (2 \ 3)\}$. On a $S_3 = H \sqcup (1 \ 2)H \sqcup (1 \ 3)H$. D'où, $\mathcal{H} = \{H, (1 \ 2)H, (1 \ 3)H\}$. Alors $\mathbb{C}\mathcal{H} = \{c_1\mathbf{H} + c_2(\mathbf{1 \ 2})\mathbf{H} + c_3(\mathbf{1 \ 3})\mathbf{H}, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}\}$. Calculons la matrice de $(1 \ 2)$ dans la base canonique.

$$(1 \ 2)\mathbf{H} = (\mathbf{1 \ 2})\mathbf{H}, \quad (1 \ 2)(\mathbf{1 \ 2})\mathbf{H} = \mathbf{H}, \quad (1 \ 2)(\mathbf{1 \ 3})\mathbf{H} = (\mathbf{1 \ 3 \ 2})\mathbf{H} = (\mathbf{1 \ 3})\mathbf{H}.$$

$$\text{Donc } X((1 \ 2)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.2 Décomposition des représentations

Nous allons voir que toute représentation d'un groupe fini G peut se décomposer en somme directe de représentations particulières, appelées représentations irréductibles. En particulier, toute représentation du groupe cyclique C_n s'écrit à partir des représentations de degré 1, données dans l'exemple 2.1.9.

Définition 2.2.1 (G -sous-module). Soit G un groupe fini. Soit V un G -module. Un *sous-module* de V est un sous-espace vectoriel W sur \mathbb{C} stable sous l'action de G , c'est-à-dire, pour tout $g \in G$, si $\mathbf{w} \in W$ alors $g\mathbf{w} \in W$.

Exemple 2.2.2 (Modules triviaux). Tout G -module V admet V et $\{0\}$ comme sous-modules. Ces sous-modules sont appelés *modules triviaux*.

Définition 2.2.3 (Réductibilité). Soit G un groupe fini. Un G -module V est dit *réductible* s'il admet un sous-module non trivial W . Sinon, V est dit *irréductible*.

Définition 2.2.4 (Représentation irréductible). Une représentation matricielle de G est dite *irréductible* si le G -module associé est irréductible.

Proposition 2.2.5. Soit G un groupe fini. Soit V un G -module de degré d . V est réductible si et seulement s'il existe une base \mathcal{B} et $n \in \{1, \dots, d-1\}$ tels que pour tout $g \in G$, il existe $A(g) \in M_n(\mathbb{C})$, $B(g) \in M_{n, d-n}(\mathbb{C})$ et $C(g) \in M_{d-n, d-n}(\mathbb{C})$ tels que

$$X(g) = \left(\begin{array}{c|c} A(g) & B(g) \\ \hline 0_{d-n, n} & C(g) \end{array} \right).$$

Définition 2.2.6. Soit G un groupe fini. Soit V un G -module. Soient U et W des G -sous-modules de V . On dit que U et W sont complémentaires dans G si V est la somme directe de U et W en tant qu'espaces vectoriels. On note $V = U \oplus W$.

Proposition 2.2.7. Soit G un groupe fini. Soit V un G -module de degré d . S'il existe U et W des G -sous-modules de V de dimensions respectives p et $d-p$ tels que $V = U \oplus W$ alors il existe une base \mathcal{B} de V telle que pour tout $g \in G$, il existe $A(g) \in M_p(\mathbb{C})$ et $B(g) \in M_q(\mathbb{C})$ tels que

$$X(g) = \left(\begin{array}{c|c} A(g) & 0_{p, d-p} \\ \hline 0_{d-p, p} & B(g) \end{array} \right)$$

Définition 2.2.8. Soit $X \in M_d(\mathbb{C})$. On dit que X est la *somme directe* des matrices A et B si $X = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array} \right)$. On note $X = A \oplus B$.

A partir d'un G -sous-module et d'un produit hermitien invariant sous l'action de G , il est possible de décomposer le G -module de départ.

Proposition 2.2.9. Soit G un groupe fini. Soient V un G -module et W un G -sous-module de V . Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit hermitien sur V , stable sous l'action de G (c'est-à-dire, pour tout $g \in G$ et tout $(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \in V^2$, $\langle g\mathbf{v}, g\mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$). Le complémentaire orthogonal de W dans V défini par

$$W^\perp = \{v \in V \mid \forall \vec{w} \in W \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0\}$$

est un G -sous-module de V et $V = W \oplus W^\perp$.

On peut alors décrire toutes les représentations d'un groupe G à partir des représentations irréductibles.

Théorème 2.2.10 (Théorème de Maschke). Soient G un groupe fini et V un G -module non nul. Alors il existe $W^{(1)}, \dots, W^{(n)}$ des G -sous-modules irréductibles de V tels que

$$V = W^{(1)} \oplus \dots \oplus W^{(n)}.$$

Corollaire 2.2.11. Soit G un groupe fini et X une représentation matricielle de G de dimension $d \in \mathbb{N}^*$. Alors il existe $T \in GL_d(\mathbb{C})$ et $X^{(1)}, \dots, X^{(n)}$ des représentations matricielles irréductibles de G telles que pour tout $g \in G$,

$$X(g) = T \begin{pmatrix} X^{(1)}(g) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & X^{(2)}(g) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & X^{(n)}(g) \end{pmatrix} T^{-1}.$$

Définition 2.2.12. Une représentation est dite *complètement irréductible* si elle peut être écrite comme somme directe de représentations irréductibles.

Corollaire 2.2.13. Toute représentation d'un groupe fini est complètement irréductible.

Ce résultat est très utile : il permet d'écrire une représentation quelconque d'un groupe G fini à partir des représentations irréductibles.

Notation : Si $V = \overbrace{X \oplus X \oplus \dots \oplus X}^m$, on note $V = mX$.

Introduisons les applications entre des G -modules.

Définition 2.2.14 (G -morphisme). Soit G un groupe fini. Soient V et W des G -modules. On appelle G -morphisme toute application linéaire $\theta : V \rightarrow W$ telle que pour tout $g \in G$ et tout $\mathbf{v} \in V$,

$$\theta(g\mathbf{v}) = g\theta(\mathbf{v}).$$

On note $\text{Hom}(V, W)$ l'ensemble des G -morphisms de V dans W .

Définition 2.2.15 (Modules G -équivalents). Soit G un groupe fini. Soient V et W des G -modules. Un G -isomorphisme est un G -morphisme $\theta : V \rightarrow W$ qui est bijectif. On dit alors que V et W sont G -isomorphes ou G -équivalents. On note $V \cong W$.

Proposition 2.2.16. Soit G un groupe fini. Soient V, W et W_1, \dots, W_n des G -modules tels que $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_n$. Si pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $W_i \cong W$ alors $V \cong nW$.

Définition 2.2.17 (Multiplicité). Soit G un groupe fini. Soient V et W des G -modules tels que $V \cong nW$. L'entier n est appelé *multiplicité* de W dans V .

Théorème 2.2.18. Soit G un groupe fini. Soit X une représentation matricielle de G . Supposons qu'il existe $X^{(1)}, \dots, X^{(k)}$ des représentations de G irréductibles deux à deux G -non-équivalents telles que

$$X = m_1 X^{(1)} \oplus \dots \oplus m_k X^{(k)}.$$

On pose $\deg X^{(i)} = d_i$. Alors

$$\deg X = m_1 d_1 + \dots + m_k d_k.$$

De même, soit V un G -module. Supposons qu'il existe $V^{(1)}, \dots, V^{(k)}$ des G -modules irréductibles deux à deux G -non-équivalents tels que

$$V \cong m_1 V^{(1)} \oplus \dots \oplus m_k V^{(k)}.$$

On pose $\dim V^{(i)} = d_i$. Alors

$$\dim V = m_1 d_1 + \dots + m_k d_k.$$

Proposition 2.2.19. Soit G un groupe fini. Soient V et W des G -modules avec W irréductible. Alors $\dim \text{Hom}(W, V)$ est égale à la multiplicité de V dans W .

2.3 Caractères

La notion de caractère d'une représentation, bien que portant sur une information plus faible que celle de représentation, permet de caractériser les représentations à isomorphisme près.

Définition 2.3.1 (Caractère). Soit G un groupe fini. Soit X une représentation matricielle de G . On appelle *caractère* de X l'application

$$\chi : G \rightarrow \mathbb{C} \\ g \mapsto \text{Tr}(X(g))$$

Si V est un G -module, on appelle *caractère* de V le caractère d'une représentation matricielle (quelconque) associée à V .

Remarque. Deux représentations G -équivalentes ont le même caractère car la trace est invariante par conjugaison.

Exemple 2.3.2. [Caractère linéaire] Soit G un groupe fini. Soit X une représentation matricielle de G de degré 1. Pour tout $g \in G$, $\chi(g)$ est égal à l'unique coefficient de la matrice $X(g)$. χ est appelé *caractère linéaire*.

Exemple 2.3.3. On considère la représentation définie de S_n , introduite dans l'exemple 2.1.8. On note son caractère χ^{def} . Pour tout $\sigma \in S_n$, $\chi^{\text{def}}(\sigma)$ est égal au nombre de 1 sur la diagonale de $X(\sigma)$, donc au nombre de points fixes de σ .

Exemple 2.3.4. Soit $G = \{g_1, \dots, g_n\}$. On considère la représentation régulière de G , voir 2.1.12. On note son caractère χ^{reg} . La représentation matricielle associée au G -module $\mathbb{C}[G]$ est donnée pour tout $g \in G$ par la matrice $X(g)$ calculée dans la base standard $\mathcal{B} = \{\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_n\}$. En notant e l'élément neutre de G , on a pour tout $g \in G$,

$$\chi^{\text{reg}}(g) = \begin{cases} |G| & \text{si } g=e, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

En effet, pour tout $g \in G$, $X(g)$ est la matrice de permutation de l'action de g sur \mathcal{B} . Donc $\chi^{\text{reg}}(g)$ est le nombre de points fixes de cette action. Pour tout $g \in G$, s'il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $g\mathbf{g}_i = \mathbf{g}_i$ alors $g = e$. Donc si $g \neq e$, l'action de g sur \mathcal{B} n'a pas de point fixe. Donc, pour tout $g \neq e$, $\chi^{\text{reg}}(g) = 0$, et $X(e) = I_n$ donc $\chi^{\text{reg}}(e) = |G|$.

Définition 2.3.5 (Fonction centrale). Soit G un groupe fini. On appelle *fonction centrale* de G toute fonction $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ qui est constante sur les classes de conjugaison de G , c'est-à-dire, pour tout $(g, h) \in G^2$, $f(hgh^{-1}) = f(g)$.

Proposition 2.3.6. Soit G un groupe fini d'élément neutre e . Soit X une représentation matricielle de G de degré d et de caractère χ . Alors

1. $\chi(e) = d$.
2. χ est une fonction centrale de G .
3. Si Y est une représentation de G de caractère ϕ et G -équivalente à X alors $\chi = \phi$.

Définition 2.3.7 (Table de caractères). Soit G un groupe fini. On appelle *table de caractères* un tableau dont les lignes sont indexées par les caractères irréductibles et non équivalents de G et les colonnes sont indexées par les classes de conjugaison. La case correspondant à la ligne χ et à la colonne K est la valeur $\chi_K = \chi(g)$ pour tout $g \in G$.

Une table de caractères est donc de la forme

	...	K	...
⋮		⋮	
χ	...	χ_K	
⋮			

Définition 2.3.8. Soit G un groupe fini. Soient $\alpha, \beta : G \rightarrow \mathbb{C}$. On définit

$$\langle \alpha, \beta \rangle := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \alpha(g) \overline{\beta(g)}.$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit hermitien de l'ensemble des fonctions de G dans \mathbb{C} .

Proposition 2.3.9. Soient χ et ψ des caractères. Alors

$$\langle \chi, \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) \psi(g^{-1}).$$

Théorème 2.3.10. Soient χ et ψ des caractères irréductibles de G . Alors

$$\langle \chi, \psi \rangle = \delta_{\chi, \psi}.$$

Corollaire 2.3.11. Soit G un groupe fini. Soit X une représentation matricielle de G de caractère χ . Supposons qu'il existe $X^{(1)}, \dots, X^{(k)}$ des représentations de G irréductibles deux à deux G -non-équivalents de caractères $\chi^{(1)}, \dots, \chi^{(k)}$ telles que

$$X = m_1 X^{(1)} \oplus \dots \oplus m_k X^{(k)}.$$

Alors

1. $\chi = m_1 \chi^{(1)} + \dots + m_k \chi^{(k)}$.
2. Pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, $\langle \chi, \chi^{(i)} \rangle = m_i = \dim \text{Hom}(X^{(i)}, X)$.
3. $\langle \chi, \chi \rangle = m_1^2 + \dots + m_k^2$.
4. X est irréductible si et seulement si $\langle \chi, \chi \rangle = 1$.
5. Soit Y une représentation matricielle de G de caractère ψ . Alors $X \cong Y$ si et seulement si $\chi = \psi$.

Proposition 2.3.12. Soit G un groupe fini tel que $\mathbb{C}[G] = \bigoplus_i m_i V^{(i)}$ où les $V^{(i)}$ forment une famille complètement irréductible deux à deux G -non-équivalents. Alors

1. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $m_i = \dim V^{(i)}$.
2. $\sum_i (\dim V^{(i)})^2 = |G|$.
3. Le nombre de $V^{(i)}$ est égal au nombre de classes de conjugaison de G .

En particulier, le nombre de $V^{(i)}$ est fini et la table de caractères de G est carrée.

Proposition 2.3.13. Les caractères irréductibles d'un groupe G forment une base orthonormale pour l'espace des fonctions centrales.

2.4 Représentations restreintes et induites

Dans cette partie, nous allons voir qu'il est possible de restreindre une représentation d'un groupe à un sous-groupe mais également d'étendre une représentation d'un sous-groupe au groupe tout entier. Nous utiliserons cette construction par la suite, dans la partie 3, pour décrire les représentations de S_n à partir de certains de ses sous-groupes, appelés sous-groupes de Young.

Définition 2.4.1 (Représentation restreinte). Soit G un groupe fini. Soient H un sous-groupe de G et X une représentation matricielle de G . La restriction de X à H , notée $X \downarrow_H^G$ est donnée, pour tout $h \in H$, par

$$X \downarrow_H^G (h) = X(h).$$

Si X a pour caractère χ , on note $\chi \downarrow_H^G$ le caractère de $X \downarrow_H^G$

Définition 2.4.2 (Représentation induite). Soit G un groupe. Soit H un sous-groupe de G . Soit $\{t_1, \dots, t_l\}$ un système de représentants des classes à gauche de G modulo H , c'est-à-dire $G = t_1 H \sqcup \dots \sqcup t_l H$ où \sqcup désigne l'union disjointe. Soit Y une représentation de H . La représentation induite sur G par Y , notée $Y \uparrow_H^G$ est donnée, pour tout $g \in G$, par

$$Y \uparrow_H^G (g) = (Y(t_i^{-1} g t_j))_{1 \leq i, j \leq l} = \begin{pmatrix} Y(t_1^{-1} g t_1) & Y(t_1^{-1} g t_2) & \cdots & Y(t_1^{-1} g t_l) \\ Y(t_2^{-1} g t_1) & Y(t_2^{-1} g t_2) & \cdots & Y(t_2^{-1} g t_l) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y(t_l^{-1} g t_1) & Y(t_l^{-1} g t_2) & \cdots & Y(t_l^{-1} g t_l) \end{pmatrix},$$

où $Y(g)$ désigne la matrice associée à g par la représentation Y si $g \in H$, et la matrice nulle sinon.

Il est clair que la restriction d'une représentation d'un groupe est une représentation. Cela reste vrai pour la représentation induite :

Théorème 2.4.3. Soit G un groupe fini. Soit H un sous-groupe de G . Soit $\{t_1, \dots, t_l\}$ un système de représentants des classes à gauche de G modulo H . Soit Y une représentation matricielle de H . Alors $X = Y \uparrow_H^G$ est une représentation de G .

De plus, la représentation induite est indépendante du choix du système de représentants des classes à gauche choisi.

Proposition 2.4.4. Soit G un groupe fini. Soient H un sous-groupe de G et Y une représentation matricielle de H . Soient $\{t_1, \dots, t_l\}$ et $\{s_1, \dots, s_l\}$ des systèmes de représentants des classes à gauche de G modulo H de représentations matricielles X et Z respectivement pour $Y \uparrow_H^G$. Alors X et Z sont G -équivalents.

Proposition 2.4.5. Soit G un groupe fini. Soit H un sous-groupe de G . Soit $\mathcal{H} = \{t_1 H, \dots, t_l H\}$ l'ensemble des classes à gauche de G modulo H . La représentation induite par la représentation triviale de H , notée $1 \uparrow_H^G$, est la représentation obtenue sur le module $\mathbb{C}\mathcal{H}$ par l'action de G sur \mathcal{H} .

Ainsi, les matrices de $1 \uparrow_H^G$ sont identiques à celles de G agissant sur la base \mathcal{H} pour le module $\mathbb{C}\mathcal{H}$.

Illustration. On considère le groupe S_3 et le sous-groupe $H = \{\text{Id}, (2\ 3)\}$. On a $S_3 = H \sqcup (1\ 2)H \sqcup (1\ 3)H$. Prenons donc $\{\text{Id}, (1\ 2), (1\ 3)\}$ un système de représentants des classes à gauche de G modulo H et $Y = 1_H$ la représentation triviale de H . Considérons $X = 1 \uparrow_H^{S_3}$. On a

$$\begin{aligned} Y(\text{Id}^{-1}(1\ 2)\text{Id}) &= Y((1\ 2)) = 0 && \text{car } (1\ 2) \notin H, \\ Y(\text{Id}^{-1}(1\ 2)(1\ 2)) &= Y(\text{Id}) = 1 && \text{car } \text{Id} \in H, \\ Y(\text{Id}^{-1}(1\ 2)(1\ 3)) &= Y((1\ 3\ 2)) = 0 && \text{car } (1\ 2\ 3) \notin H. \end{aligned}$$

On obtient donc la première colonne de $X((1\ 2))$. En répétant ce procédé, on obtient

$$X((1\ 2)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On obtient bien la matrice apparaissant dans l'illustration de la représentation des classes de l'exemple 2.1.13, ce qu'affirmait la proposition précédente.

La représentation induite de la représentation triviale par des sous-groupes particuliers de S_n sera utilisée pour construire les représentations du groupe symétrique.

Le théorème de réciprocity de Frobenius permet de relier les représentations induites et restreintes.

Théorème 2.4.6 (Réciprocity de Frobenius). *Soit G un groupe fini. Soit H un sous-groupe de G . On note χ et ψ les caractères de H et G respectivement. Alors*

$$\langle \psi \uparrow_H^G, \chi \rangle = \langle \psi, \chi \downarrow_H^G \rangle.$$

3 Représentations du groupe symétrique

A partir de ces résultats sur la représentation des groupes et ceux sur le groupe symétrique, nous pouvons nous intéresser aux représentations du groupe symétrique. Dans toute cette partie, on fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et on s'intéresse au groupe S_n .

Comme nous l'avons vu, toute représentation de S_n est complètement irréductible. Il est donc très pertinent de construire les représentations irréductibles du groupe symétrique S_n . Nous savons, d'après 1.3.5 et 2.3.12, qu'il existe autant de représentations irréductibles que de classes de conjugaison de S_n , c'est-à-dire de partitions de n . Nous verrons que chaque représentation irréductible est associée à une partition de n . Pour cela, nous introduirons des sous-groupes de S_n , appelés sous-groupes de Young, qui permettront d'obtenir le bon nombre de représentations grâce à des modules S_n -équivalents aux modules de la représentation induite de la représentation triviale étudiée en 2.4. Ces modules sont notés M^λ .

3.1 Construction des S_n -modules M^λ

Tout d'abord, nous allons construire des modules, notés M^λ , S_n -équivalents aux modules de la représentation induite de la représentation triviale par des sous-groupes particuliers, appelés sous-groupes de Young, sur S_n .

Construisons les sous-groupes de Young de S_n . Pour cela, nous allons associer à toute partition λ de n un sous-groupe de S_n .

Définition 3.1.1 (Sous-groupe de Young). Soit $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$ une partition de n . Le sous-groupe de Young de S_n associé à λ est

$$S_\lambda = S_{\{1, \dots, \lambda_1\}} \times S_{\{\lambda_1+1, \dots, \lambda_1+\lambda_2\}} \times \dots \times S_{\{n-\lambda_l+1, \dots, n\}}.$$

Illustration. Le sous-groupe de Young associé à $(4, 3, 3, 1) \vdash 11$ est

$$S_{(4,3,3,1)} = S_{\{1,2,3,4\}} \times S_{\{5,6,7\}} \times S_{\{8,9,10\}} \times S_{\{11\}} \cong S_4 \times S_3 \times S_3 \times S_1.$$

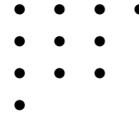
Considérons la représentation induite $1 \uparrow_{S_\lambda}^{S_n}$. D'après 2.4.5, le module de cette représentation est

$$V^\lambda = \mathbb{C}\{\pi_1 S_\lambda, \dots, \pi_k S_\lambda\}$$

où $\{\pi_1, \dots, \pi_k\}$ est un système de représentants des classes à gauche de S_n modulo S_λ . Nous allons montrer que pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, $\pi_i S_\lambda$ peut être vu comme un tableau.

Définition 3.1.2 (Diagramme de Ferrers). Soit $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$ une partition de n . On appelle *diagramme de Ferrers*, ou *forme*, de λ un ensemble de l lignes telles que la $i^{\text{ème}}$ ligne contienne λ_i points.

Illustration. Prenons $\lambda = (4, 3, 3, 1) \vdash 11$. La forme de λ associée est



Définition 3.1.3 (Tableau de Young). Soit λ une partition de n . On appelle *tableau de Young de forme λ* , ou λ -*tableau*, un tableau t obtenu en remplaçant les points du diagramme de Ferrers associé à λ par les entiers $1, 2, \dots, n$ bijectivement.

On note $t_{i,j}$ le coefficient en position (i, j) (en indiquant de la même manière que pour les matrices).

Illustration. Considérons $\lambda = (2, 1) \vdash 3$. Le diagramme de Ferrers associé à λ est . Les λ -tableaux associés sont les suivants :

$$\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & \end{array}, \begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 2 & \end{array}, \begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 3 & \end{array}, \begin{array}{cc} 2 & 3 \\ 1 & \end{array}, \begin{array}{cc} 3 & 2 \\ 1 & \end{array}, \begin{array}{cc} 3 & 1 \\ 2 & \end{array}.$$

Définition 3.1.4 (Tabloïde). Soient t_1 et t_2 des λ -tableaux. On dit que t_1 et t_2 sont *équivalents en lignes* (resp. *en colonnes*) si, pour tout i , la $i^{\text{ème}}$ ligne (resp. colonne) de t_1 contient les mêmes éléments que la $i^{\text{ème}}$ ligne (resp. colonne) de t_2 . On note $t_1 \sim t_2$ (resp. $t_1 \sim_c t_2$). La relation \sim (resp. \sim_c) est une relation d'équivalence. Une classe d'équivalence pour cette relation est appelée *tabloïde de forme λ* ou λ -*tabloïde* et notée $\{t\}$, (resp. *tabloïde en colonnes de forme λ* et notée $[t]$) où t est un λ -tableau.

Dans un λ -tabloïde (resp λ -tabloïde en colonnes), l'ordre des éléments sur une ligne (resp. colonne) n'importe pas. Si t est un λ -tableau que l'on souhaite écrire à l'aide de ses éléments, alors $\{t\}$ (resp. $[t]$) pourra être écrit sous la même forme que t avec des traits horizontaux (resp. verticaux) pour séparer les lignes (resp. colonnes) afin de bien distinguer les tableaux des tabloïdes et de rappeler la direction choisie (ligne ou colonne).

Illustration. Prenons $t = \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & \end{array}$. Alors,

$$\{t\} = \overline{\overline{\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & \end{array}}} = \left\{ \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & \end{array}, \begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 3 & \end{array} \right\}$$

et

$$[t] = \left| \begin{array}{c} 1 \\ 3 \end{array} \right| \begin{array}{c} 2 \\ \end{array} \Big| = \left\{ \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & \end{array}, \begin{array}{cc} 3 & 2 \\ 1 & \end{array} \right\}.$$

Puisque l'on envoie bijectivement $\{1, \dots, n\}$ sur les n points du diagramme de Ferrers de λ , il y a $n!$ λ -tableaux. Si $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$, le nombre de tableaux dans chaque classe d'équivalence est $\lambda! = \lambda_1! \dots \lambda_l!$ car pour tout $i \in \{1, \dots, l\}$, on envoie bijectivement λ_i entiers distincts préalablement fixé sur λ_i points. Le nombre $\lambda!$ étant indépendant de la classe, le nombre de classes, c'est-à-dire de λ -tabloïdes est $\frac{n!}{\lambda!}$.

On peut considérer l'action de S_n sur les tableaux $t = (t_{i,j})_{i,j}$ donnée, pour tout $\sigma \in S_n$ et tout tableau t , par

$$\sigma t = (\sigma(t_{i,j}))_{i,j}.$$

L'action de S_n sur l'ensemble des tabloïdes de forme λ est alors donnée par

$$\sigma\{t\} = \{\sigma t\},$$

où $\sigma \in S_n$. Cette action est bien définie car elle est indépendante du choix du représentant. Ainsi, on peut donc construire un S_n -module, d'après la proposition 2.1.10.

Définition 3.1.5 (Module de permutation M^λ). Soit $\lambda \vdash n$. Soit $\{\{t_1\}, \dots, \{t_k\}\}$ l'ensemble des λ -tabloïdes. On définit

$$M^\lambda = \mathbb{C}\{\{t_1\}, \dots, \{t_k\}\}.$$

M^λ est appelé *module de permutation associé à λ* .

On a donc $k = \dim M^\lambda = \frac{n!}{\lambda!}$.

Exemple 3.1.6. Prenons $\lambda = (n)$. Les λ -tableaux sont de la forme $\bullet \bullet \dots \bullet$. Tous les λ -tableaux sont donc équivalents en lignes à $\overline{1 \ 2 \ \dots \ n}$. Donc $M^\lambda = \mathbb{C}\{\overline{1 \ 2 \ \dots \ n}\}$. La représentation associée est la représentation triviale.

Exemple 3.1.7. Prenons $\lambda = \overbrace{(1, \dots, 1)}^n$. Les λ -tableaux sont de la forme $\begin{matrix} \bullet \\ \bullet \\ \vdots \\ \bullet \end{matrix}$. Un λ -tabloïde contient

donc un unique tableau. En transposant chaque tableau, un λ -tabloïde peut alors être identifié à une permutation en notation sur une ligne. Donc $M^\lambda \cong \mathbb{C}S_n$. La représentation associée est la représentation régulière.

Exemple 3.1.8. Prenons $\lambda = (n-1, 1)$. Les λ -tableaux sont de la forme $\begin{matrix} \bullet & \bullet & \dots & \bullet \\ & \bullet & & \end{matrix}$. Ainsi, un λ -tabloïde est uniquement déterminé par l'unique entier $i \in \{1, \dots, n\}$ de la deuxième ligne.

L'application $\theta : \begin{matrix} M^\lambda & \rightarrow & \mathbb{C}\{\mathbf{1}, \dots, \mathbf{n}\} \\ \{\begin{matrix} \bullet & \bullet & \dots & \bullet \\ \bullet & & & \end{matrix}\}_i & \mapsto & i \end{matrix}$ est bijective et pour toute permutation $\pi \in S_n$, $\theta(\pi\{\begin{matrix} \bullet & \bullet & \dots & \bullet \\ \bullet & & & \end{matrix}\}_i) = \theta(\{\begin{matrix} \bullet & \bullet & \dots & \bullet \\ \pi i & & & \end{matrix}\}) = \pi i = \pi\theta(\{\begin{matrix} \bullet & \bullet & \dots & \bullet \\ \bullet & & & \end{matrix}\}_i)$. θ est donc un S_n -isomorphisme de modules. Donc $M^\lambda \cong \mathbb{C}\{\mathbf{1}, \dots, \mathbf{n}\}$ et la représentation associée est la représentation définie.

Illustration. Considérons S_3 . Les partitions de 3 sont $\lambda = (3)$, $(2, 1)$ et $(1, 1, 1)$. On note χ^λ le caractère associé au module M^λ et K_μ la classe de conjugaison de S_3 correspondant à la partition μ . $M^{(3)}$ correspond à la représentation triviale, $M^{(2,1)}$ à la représentation définie et $M^{(1^3)}$ à la représentation régulière. D'après les exemples 2.3.2, 2.3.3 et 2.3.4, la table de ces trois caractères est donc la suivante :

	$K_{(1^3)}$	$K_{(2,1)}$	$K_{(3)}$
$\chi^{(3)}$	1	1	1
$\chi^{(2,1)}$	3	1	0
$\chi^{(1^3)}$	6	0	0

Revenons sur une définition générale sur les G -modules.

Définition 3.1.9 (Cyclicité). Un G -module M est dit *cyclique* s'il existe $\mathbf{v} \in M$ tel que

$$M = \mathbb{C}G\mathbf{v} = \mathbb{C}\{g\mathbf{v} | g \in G\}.$$

On dit que M est *engendré par \mathbf{v}* .

Ainsi, $V^\lambda = \mathbb{C}\{\pi_1\mathbf{S}_\lambda, \dots, \pi_k\mathbf{S}_\lambda\}$ où $\{\pi_1, \dots, \pi_k\}$ est un système de représentants des classes à gauche de S_n modulo S_λ , est cyclique, engendré par \mathbf{S}_λ .

Proposition 3.1.10. Soit $\lambda \vdash n$. M^λ est un S_n -module cyclique, engendré par tout λ -tabloïde.

Démonstration. Soit $\{t_0\}$ un λ -tabloïde. Pour tout λ -tabloïde s , il existe $\sigma \in S_n$ tel que $\{s\} = \sigma\{t_0\}$. Donc M^λ est cyclique, engendré par $\{t_0\}$. Le module M^λ est donc engendré par tout λ -tabloïde. \square

En fait, V^λ et M^λ sont deux écritures d'un même objet :

Théorème 3.1.11. Soit $\lambda \vdash n$. Soient S_λ le sous-groupe de Young associé à λ et $\{t\}$ un λ -tabloïde. Alors $V^\lambda = \mathbb{C}S_n\mathbf{S}_\lambda$ et $M^\lambda = \mathbb{C}S_n\{t\}$ sont isomorphes en tant que S_n -modules.

Démonstration. Soit $\{\pi_1, \dots, \pi_k\}$ un système de représentants des classes à gauche de S_n modulo S_λ . Soit $\{t\}$ un générateur de M^λ . L'application

$$\theta : \begin{array}{l} V^\lambda \rightarrow M^\lambda \\ \pi_i\mathbf{S}_\lambda \mapsto \{\pi_i t\} \end{array},$$

étendue par linéarité, est un S_n -isomorphisme de modules.

En effet, pour tout $\sigma \in S_n$ et tout $i \in \{1, \dots, k\}$,

$$\theta(\sigma\pi_i\mathbf{S}_\lambda) = \{\sigma\pi_i t\} = \sigma\{\pi_i t\} = \sigma\theta(\pi_i\mathbf{S}_\lambda).$$

Cette application étant bijective, on a le résultat. \square

On a donc construit des S_n -modules M^λ à partir de la représentation induite de la représentation triviale des sous-groupes de Young S_λ sur S_n , notée $1 \uparrow_{S_\lambda}^{S_n}$. Mais les M^λ ne sont pas nécessairement irréductibles. La prochaine étape est alors de construire un ensemble complet de S_n -modules irréductibles.

3.2 Construction des modules de Specht S^λ

Dans cette partie, nous allons construire les modules irréductibles de S_n sous une certaine forme, appelés modules de Specht.

Définition 3.2.1. Soit t un tableau. On note R_1, \dots, R_l les lignes et C_1, \dots, C_k les colonnes de t .

$R_t = S_{R_1} \times \dots \times S_{R_l}$ est appelé *stabilisateur des lignes* de t .

$C_t = S_{C_1} \times \dots \times S_{C_k}$ est appelé *stabilisateur des colonnes* de t .

Ainsi, R_t (resp. C_t) est l'ensemble des éléments de S_n qui laissent stable l'ensemble des éléments de chaque ligne de t (resp. colonne). Ce sont des sous-groupes de S_n isomorphes à des sous-groupes de Young.

On a alors, pour tout tableau t , $\{t\} = R_t t$, $[t] = C_t t$ et pour tout $\sigma \in S_n$, $\sigma \in R_t$ si et seulement si $\sigma\{t\} = \{t\}$ et $\sigma \in C_t$ si et seulement si $\sigma[t] = [t]$.

Illustration. Prenons

$$t = \begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 5 & 4 \\ 3 & \end{array}.$$

Alors

$$R_t = S_{\{1,2\}} \times S_{\{4,5\}} \times S_{\{3\}} \quad \text{et} \quad C_t = S_{\{2,3,5\}} \times S_{\{1,4\}}.$$

De plus,

$$\{t\} = (S_{\{1,2\}} \times S_{\{4,5\}} \times S_{\{3\}})t = \left\{ \begin{array}{cccccc} 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & , & 5 & 4 & , & 4 & 5 & , & 4 & 5 \\ 3 & & & 3 & & & 3 & & & 3 \end{array} \right\} = \frac{\overline{1 \ 2}}{\underline{4 \ 5}} \text{ et}$$

$$[t] = (S_{\{2,3,5\}} \times S_{\{1,4\}})t = \left\{ \begin{array}{cccccc} 2 & 1 & 3 & 1 & 5 & 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 5 & 1 \\ 5 & 4 & , & 5 & 4 & , & 2 & 4 & , & 3 & 4 & , & 2 & 4 & , & 3 & 4 & , \\ 3 & & & 2 & & & 3 & & & 5 & & & 5 & & & 2 \end{array} \right\} = \left| \begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 5 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} 1 \\ 4 \end{array} \right|.$$

Introduisons de nouvelles notations qui permettront de définir les polytabloïdes, qui sont des combinaisons linéaires particulières de tabloïdes, essentiels à la définition des modules de Specht.

Définition 3.2.2. Soit t un tableau. On définit

$$\kappa_t = \sum_{\pi \in C_t} \text{sign}(\pi)\pi.$$

Pour calculer plus facilement κ_t , on l'exprime souvent à partir des colonnes de t .

Proposition 3.2.3. Soit t un tableau. Soient C_1, \dots, C_k les colonnes de t . Alors

$$\kappa_t = \kappa_{S_{C_1}} \dots \kappa_{S_{C_k}}.$$

Démonstration. Soit t un tableau de colonnes notées C_1, \dots, C_k .

$$\begin{aligned} \kappa_t &= \sum_{\pi \in C_t} \text{sign}(\pi)\pi \\ &= \sum_{\pi \in S_{C_1} \times \dots \times S_{C_k}} \text{sign}(\pi)\pi \\ &= \sum_{(\sigma_1, \dots, \sigma_k) \in S_{C_1} \times \dots \times S_{C_k}} \text{sign}(\sigma_1 \dots \sigma_k) \sigma_1 \dots \sigma_k \\ &= \sum_{\sigma_1 \in S_{C_1}, \dots, \sigma_k \in S_{C_k}} \text{sign}(\sigma_1)\sigma_1 \dots \text{sign}(\sigma_k)\sigma_k \\ &= \left(\sum_{\sigma_1 \in S_{C_1}} \text{sign}(\sigma_1)\sigma_1 \right) \dots \left(\sum_{\sigma_k \in S_{C_k}} \text{sign}(\sigma_k)\sigma_k \right) \\ &= \kappa_{S_{C_1}} \dots \kappa_{S_{C_k}}. \end{aligned}$$

□

Définition 3.2.4 (Polytabloïde). Soit t un tableau. Le *polytabloïde associé* à t est

$$e_t = \kappa_t\{t\}.$$

Illustration. Prenons

$$t = \begin{array}{ccc} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & \end{array}.$$

$\kappa_t = \kappa_{S_{\{3,4\}}} \kappa_{S_{\{1,5\}}} \kappa_{S_{\{2\}}} = (\text{Id} - (3 \ 4))(\text{Id} - (1 \ 5))(\text{Id}) = \text{Id} - (1 \ 5) - (3 \ 4) + (3 \ 4)(1 \ 5)$.
D'où

$$e_t = \frac{\overline{4 \ 1 \ 2}}{\overline{3 \ 5}} - \frac{\overline{4 \ 5 \ 2}}{\overline{3 \ 1}} - \frac{\overline{3 \ 1 \ 2}}{\overline{4 \ 5}} + \frac{\overline{3 \ 5 \ 2}}{\overline{4 \ 1}}.$$

Les éléments nouvellement introduits possèdent certaines propriétés, essentielles à leurs utilisations lors des démonstrations à venir.

Lemme 3.2.5. *Soient t un tableau et π une permutation. Alors*

1. $R_{\pi t} = \pi R_t \pi^{-1}$,
2. $C_{\pi t} = \pi C_t \pi^{-1}$,
3. $\kappa_{\pi t} = \pi \kappa_t \pi^{-1}$,
4. $e_{\pi t} = \pi e_t$.

Démonstration. Soient t un tableau et $\pi \in S_n$.

1. $\sigma \in R_{\pi t} \Leftrightarrow \sigma\{\pi t\} = \{\pi t\} \Leftrightarrow \sigma\pi\{t\} = \pi\{t\} \Leftrightarrow \pi^{-1}\sigma\pi \in R_t \Leftrightarrow \sigma \in \pi R_t \pi^{-1}$.
D'où, $R_{\pi t} = \pi R_t \pi^{-1}$.
2. Par symétrie ligne/colonne, 1 \Leftrightarrow 2.
D'où, $C_{\pi t} = \pi C_t \pi^{-1}$.
3. D'après le point 2,

$$\kappa_{\pi t} = \sum_{\sigma \in C_{\pi t}} \text{sign}(\sigma)\sigma = \sum_{\sigma \in \pi C_t \pi^{-1}} \text{sign}(\sigma)\sigma.$$

Donc par changement de variable $\sigma = \pi\gamma\pi^{-1}$,

$$\kappa_{\pi t} = \sum_{\gamma \in C_t} \text{sign}(\pi\gamma\pi^{-1})\pi\gamma\pi^{-1} = \pi \left(\sum_{\gamma \in C_t} \text{sign}(\gamma)\gamma \right) \pi^{-1} = \pi \kappa_t \pi^{-1}.$$

4. D'après le point 3,

$$e_{\pi t} = \kappa_{\pi t}\{\pi t\} = \pi \kappa_t \pi^{-1}\{\pi t\} = \pi \kappa_t\{t\} = \pi e_t.$$

□

Pour tout λ -tableau, $e_t \in M^\lambda$. D'après le point 4 du lemme 3.2.5, on peut donc utiliser ces éléments pour définir un sous-module de M^λ . Ce module se révélera par la suite, en 3.3, irréductible.

Définition 3.2.6 (Module de Specht). Soit λ une partition. On appelle *module de Specht associé à λ* le sous-espace vectoriel de M^λ engendré par l'ensemble des polytabloïdes e_t , où t est de la forme λ . On le note S^λ .

Proposition 3.2.7. *Soit λ une partition. S^λ est un sous-module de M^λ . De plus, S^λ est cyclique, engendré par tout λ -polytabloïde.*

Démonstration. Soit λ une partition.

Soit t un tableau de forme λ . On a $S^\lambda \subseteq M^\lambda$ et pour tout $\pi \in S_n$, $\pi e_t = e_{\pi t} \in S^\lambda$ car πt est également de forme λ . Donc S^λ est un sous-module de M^λ .

De plus, pour tout λ -tableau s , il existe $\pi \in S_n$ tel que $s = \pi t$. Donc $e_s = e_{\pi t} = \pi e_t$. Donc $S^\lambda = \mathbb{C} S_n e_t$. Donc S^λ est cyclique et est engendré par tout λ -tabloïde. □

Illustration. Prenons $\lambda = (n)$. Tout λ -tableau est de la forme $\bullet \ \cdots \ \bullet$. Donc $\kappa_t = \text{Id}$. Il existe donc un unique polytabloïde $e_t = \{t\} = \overline{1 \ \cdots \ n}$. $S^{(n)} = \mathbb{C} \overline{1 \ \cdots \ n}$ est donc la représentation triviale, qui est évidemment irréductible. Il s'agissait de la seule représentation possible car $S^{(n)}$ est un sous-module de $M^{(n)}$ où S_n agit trivialement.

3.3 Irréductibilité des modules de Specht S^λ

Après avoir introduit les modules de Specht S^λ , nous allons montrer qu'ils constituent l'ensemble des représentations irréductibles de S_n . Pour cela, nous avons besoin de plusieurs résultats.

On introduit un ordre de dominance partiel sur les partitions de n . Cet ordre permettra de montrer que les S^λ sont non S_n -équivalents deux à deux.

Définition 3.3.1 (Ordre de dominance). Soient $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$ et $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)$ des partitions de n . On dit que λ domine μ si pour tout $i \geq 1$,

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_i \geq \mu_1 + \dots + \mu_i,$$

en prenant $\lambda_i = 0$ si $i > l$ et $\mu_i = 0$ si $i > m$. On note $\lambda \supseteq \mu$.

Intuitivement, λ domine μ si le diagramme de Ferrers de λ est plus court et plus large que celui de μ .

Illustration. Prenons $\lambda = (3, 2)$ et $\mu = (2, 2, 1)$. Leurs diagrammes sont respectivement



Intuitivement, il semblerait donc que $(3, 2) \supseteq (2, 2, 1)$. Vérifions.

$$3 \geq 2, \quad 3 + 2 \geq 2 + 2 \quad \text{et} \quad 3 + 2 + 0 \geq 2 + 2 + 1.$$

D'où $(3, 2) \supseteq (2, 2, 1)$.

Lemme 3.3.2. [Lemme de dominance pour les partitions] Soient t^λ et s^μ des tableaux de forme λ et μ respectivement. Si, pour tout i , les éléments de la $i^{\text{ème}}$ ligne de s^μ sont tous dans des colonnes différentes de t^λ alors $\lambda \supseteq \mu$.

Démonstration. Soient t^λ et s^μ des tableaux de forme $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$ et $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)$ respectivement. On suppose que pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, les éléments de la $i^{\text{ème}}$ ligne de s^μ sont dans des colonnes distinctes de t^λ . Soit $j \in \mathbb{N}$. Une colonne de t^λ contient au maximum i éléments des j premières lignes de s^μ . Sinon, au moins deux éléments d'une même ligne de s^μ seraient dans la même colonne dans t^λ , contredisant l'hypothèse. On peut donc réordonner les éléments des colonnes de t^λ pour obtenir un nouveau tableau t' de même forme λ tel que les j premières lignes de t' contiennent les éléments des j premières lignes de s^μ . Alors

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \dots + \lambda_j &= \text{nombre d'éléments dans les } j \text{ premières lignes de } t' \\ &\geq \text{nombre d'éléments dans les } j \text{ premières lignes de } s^\mu \\ &= \mu_1 + \dots + \mu_j \end{aligned}$$

j étant quelconque, $\lambda \supseteq \mu$. □

Nous avons vu à la proposition 2.2.9 qu'un G -module est la somme directe d'un sous-module W et de son complémentaire orthogonal W^\perp . L'idée va donc consister à introduire un produit hermitien sur M^λ qui permettra de montrer l'irréductibilité des S^λ .

On munit alors M^λ du produit hermitien

$$\langle \{t\}, \{s\} \rangle = \delta_{\{t\}, \{s\}}.$$

Ce produit hermitien est bien défini. En effet, $M^\lambda = \mathbb{C}\{\{t_1\}, \dots, \{t_k\}\}$, où $\{t_1\}, \dots, \{t_k\}$ est une famille complète de λ -tabloïdes. Il suffit donc de définir le produit hermitien sur les t_i . Ce produit hermitien est S_n -invariant car pour tout $\pi \in S_n$, $\{\pi t\} = \{\pi s\}$ si et seulement si $\{\pi t\} = \{\pi s\}$.

En général, pour tout sous-ensemble $H \subseteq S_n$, on considère les sommes

$$H^+ = \sum_{\pi \in H} \pi \quad \text{et} \quad H^- = \sum_{\pi \in H} \text{sign}(\pi) \pi .$$

De plus, si $H = \{\pi\}$, on note π^- à la place de H^- .

Lemme 3.3.3. [Lemme du signe] Soit H un sous-groupe de S_n .

1. Si $\pi \in H$ alors $\pi H^- = H^- \pi = (\text{sign}(\pi)) H^-$. D'où, $\pi^- H^- = H^-$.
2. Pour tout $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in M^\lambda$, $\langle H^- \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, H^- \mathbf{v} \rangle$.
3. Pour toute transposition $(b \ c) \in H$, il existe $k \in \mathbb{C}[S_n]$ tel que H^- se factorise sous la forme

$$H^- = k(\text{Id} - (b \ c)).$$

4. Si t est un tableau contenant b et c sur la même ligne et $(b \ c) \in H$ alors

$$H^- \{t\} = \mathbf{0}.$$

Démonstration. 1. Soit $\pi \in H$.

$$\pi H^- = \pi \sum_{\sigma \in H} \text{sign}(\sigma) \sigma = \sum_{\sigma \in H} \text{sign}(\sigma) \pi \sigma.$$

Par le changement de variable $\tau = \pi \sigma$,

$$\pi H^- = \sum_{\tau \in H} \text{sign}(\pi^{-1} \tau) \tau = \text{sign}(\pi^{-1}) H^-.$$

Comme $\text{sign}(\pi^{-1}) = \text{sign} \pi$, on obtient

$$\pi H^- = \text{sign}(\pi) H^-.$$

\mathbb{C} étant commutatif, pour tout $\tau \in H$, $\text{sign}(\pi^{-1} \tau) = \text{sign}(\tau \pi^{-1})$. Par un calcul analogue, on obtient $\pi H^- = H^- \pi$.

De plus, comme $\pi^- = \text{sign}(\pi) \pi$, on a

$$\pi^- H^- = \text{sign}(\pi) \pi H^- = \text{sign}(\pi)^2 H^- = H^-.$$

2. Soit $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in M^\lambda$. Par bilinéarité du produit hermitien,

$$\langle H^- \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{\pi \in H} \text{sign}(\pi) \langle \pi \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle.$$

Ce produit hermitien étant S_n -invariant,

$$\langle H^- \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{\pi \in H} \text{sign}(\pi) \langle \mathbf{u}, \pi^{-1} \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \sum_{\pi \in H} \text{sign}(\pi) \pi^{-1} \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \sum_{\pi \in H} \text{sign}(\pi^{-1}) \pi^{-1} \mathbf{v} \rangle.$$

Par changement de variable bijectif $\sigma = \pi^{-1}$ dans le groupe H ,

$$\langle H^- \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, H^- \mathbf{v} \rangle.$$

3. Supposons que $(b \ c) \in H$. On considère $K = \{\text{Id}, (b \ c)\}$, un sous-groupe de H . Il existe $\{t_1, \dots, t_k\}$ un système de représentants des classes à gauche de H modulo K tel que $H = t_1 K \sqcup \dots \sqcup t_k K$. On a $K^- = \text{Id} - (b \ c)$ et

$$H^- = \sum_{\pi \in \sqcup_{i=1}^k t_i K} \text{sign}(\pi)\pi = \sum_{i=1}^k \sum_{\pi \in t_i K} \text{sign}(\pi)\pi = \sum_{i=1}^k \sum_{\sigma \in K} \text{sign}(t_i \sigma)t_i \sigma.$$

Donc

$$H^- = \sum_{i=1}^k \text{sign}(t_i)t_i \sum_{\sigma \in K} \text{sign}(\sigma)\sigma = \left(\sum_{i=1}^k t_i^-\right)K^- = \left(\sum_{i=1}^k t_i^-\right)(\text{Id} - (b \ c)).$$

Comme $\sum_{i=1}^k t_i^- \in \mathbb{C}[S_n]$, on a le résultat.

4. Soit t un tableau contenant deux entiers b et c dans la même ligne. Supposons que $(b \ c) \in H$. On a $(b \ c)\{t\} = \{t\}$. Donc, d'après le point 3, il existe $k \in \mathbb{C}[S_n]$ tel que $H^- = k(\text{Id} - (b \ c))$. Alors,

$$H^-\{t\} = k(\text{Id} - (b \ c))\{t\} = k(\{t\} - \{t\}) = \mathbf{0}.$$

□

Corollaire 3.3.4. Soient λ et μ des partitions de n . Soient t un λ -tableau et s un μ -tableau.

1. Si $\kappa_t\{s\} \neq 0$ alors $\lambda \succeq \mu$.
2. Si $\lambda = \mu$ alors $\kappa_t\{s\} = \pm e_t$.

Démonstration. 1. Supposons que $\kappa_t\{s\} \neq 0$. Soient b et c deux éventuels éléments d'une même ligne de s^μ distincts. Supposons par l'absurde qu'ils soient dans une même colonne de t . Alors $(b \ c) \in C_t$. Donc dans ce cas, d'après le point 4 du lemme 3.3.3,

$$C_t^-\{s\} = \kappa_t\{s\} = 0,$$

ce qui est absurde. Donc b et c sont dans des colonnes distinctes de t . Donc, d'après le lemme de dominance pour les partitions 3.3.2, $\lambda \succeq \mu$.

2. Supposons que $\lambda = \mu$. t et s ayant la même forme, on peut réordonner les éléments des colonnes de t de sorte qu'ils apparaissent chacun au même numéro de ligne que dans s . On effectue donc des permutations sur les colonnes. Il existe donc $\pi \in C_t$ tel que $\{s\} = \pi\{t\}$. Alors d'après 3.3.3,

$$\kappa_t\{s\} = \kappa_t \pi\{t\} = \text{sign}(\pi)\kappa_t\{t\}.$$

Donc

$$\kappa_t\{s\} = \pm e_t.$$

□

Corollaire 3.3.5. Soit λ une partition de n . Soient $u \in M^\lambda$ et t un λ -tableau. Alors $\kappa_t u$ est un multiple de e_t .

Démonstration. Soient $u \in M^\lambda$ et t un λ -tableau. u peut se décomposer sous la forme $u = \sum_i c_i \{s_i\}$, où pour tout i , $c_i \in \mathbb{C}$ et s_i est un λ -tableau. Par le corollaire 3.3.4, les s_i ayant la même forme que λ ,

$$\kappa_t u = \sum_i c_i \kappa_t \{s_i\} = \left(\sum_i \pm c_i\right)e_t.$$

□

Les deux résultats suivants vont permettre de prouver que les S^λ , où $\lambda \vdash n$, constituent l'ensemble des représentations irréductibles de S_n .

Théorème 3.3.6. [Théorème du sous-module] Soit λ une partition de n . Soit W un sous-module de M^λ . Alors

$$S^\lambda \subseteq W \quad \text{ou} \quad W \subseteq (S^\lambda)^\perp .$$

Démonstration. Soit W un sous-module de M^λ . Pour tout $w \in W$ et tout λ -tableau t , comme $w \in M^\lambda$, d'après le corollaire 3.3.5, il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que $\kappa_t w = ce_t$.

Premier cas : Il existe $w_0 \in W$, t_0 un λ -tableau et $c_0 \neq 0$ tels que $\kappa_{t_0} w_0 = c_0 e_{t_0}$. W étant un sous-module de M^λ , $\kappa_{t_0} w_0 = c_0 e_{t_0} \in W$. Or $c_0 \neq 0$, donc $e_{t_0} \in W$. Comme S^λ est cyclique, $S^\lambda = \mathbb{C} S_n e_{t_0} \subseteq W$.

Second cas : Pour tout $w \in W$ et tout λ -tableau t , $\kappa_t w = 0$. Soit $w_0 \in W$. Pour tout λ -tableau t , par le point 2 du lemme 3.3.3,

$$\langle w_0, e_t \rangle = \langle w_0, \kappa_t \{t\} \rangle = \langle \kappa_t w_0, \{t\} \rangle = \langle 0, \{t\} \rangle = 0.$$

Donc $w_0 \in (S^\lambda)^\perp$. D'où $W \subseteq (S^\lambda)^\perp$. □

Proposition 3.3.7. Soient λ et μ des partitions de n . Soit $\theta \in \text{Hom}(S^\lambda, M^\mu)$ une application non nulle. Alors $\lambda \supseteq \mu$ et si $\lambda = \mu$ alors θ est une homothétie.

Démonstration. Soit $\theta \in \text{Hom}(S^\lambda, M^\mu)$ une application non nulle. S^λ étant engendré par l'ensemble des polytabloïdes e_t , où t est un λ -tableau, et θ étant non nulle, il existe un λ -tableau t tel que $\theta(e_t) \neq 0$. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ étant un produit hermitien sur M^λ , $M^\lambda = S^\lambda \oplus (S^\lambda)^\perp$. On peut donc prolonger θ en une application de M^λ dans M^μ en posant $\theta(u) = 0$ pour tout $u \in (S^\lambda)^\perp$. Ainsi, dorénavant, $\theta \in \text{Hom}(M^\lambda, M^\mu)$. Alors,

$$\theta(e_t) = \theta(\kappa_t \{t\}) = \kappa_t \theta(\{t\}).$$

$\theta(\{t\}) \in M^\mu$ donc $\theta(\{t\})$ peut se décomposer sous la forme $\theta(\{t\}) = \sum_i c_i \{s_i\}$, où pour tout i , $c_i \in \mathbb{C}$ et s_i est un μ -tableau. Donc,

$$\theta(e_t) = \kappa_t \left(\sum_i c_i \{s_i\} \right) = \sum_i c_i \kappa_t \{s_i\}.$$

On a supposé $\theta(e_t) \neq 0$, donc il existe i_0 tel que $\kappa_t \{s_{i_0}\} \neq 0$. t étant un λ -tableau et s_{i_0} un μ -tableau, d'après le corollaire 3.3.4, $\lambda \supseteq \mu$.

Si de plus $\lambda = \mu$, pour tout i , $\{s_i\} \in M^\lambda$ et t est un λ -tableau donc par le corollaire 3.3.5, il existe $d_i \in \mathbb{C}$ tel $\kappa_t \{s_i\} = d_i e_t$. Donc

$$\theta(e_t) = \left(\sum_i c_i d_i \right) e_t = ce_t,$$

où l'on a posé $c = \sum_i c_i d_i$. On a alors, pour tout $\pi \in S_n$, en utilisant le lemme 3.2.5,

$$\theta(e_{\pi t}) = \theta(\pi e_t) = \pi \theta(e_t) = \pi(ce_t) = ce_{\pi t}.$$

D'où la seconde partie du résultat. □

Nous pouvons maintenant démontrer le résultat attendu :

Théorème 3.3.8. Les S^λ , pour $\lambda \vdash n$, sont des S_n -modules irréductibles deux à deux non équivalents et tout S_n -module irréductible est équivalent à l'un d'entre eux.

Démonstration. Soit λ une partition de n . Soit W un sous-module de S^λ . W est *a fortiori* un sous-module de M^λ . Donc d'après le théorème du sous module 3.3.6, $S^\lambda \subseteq W$ ou $W \subseteq (S^\lambda)^\perp$. Si $S^\lambda \subseteq W$, comme $W \subseteq S^\lambda$, on a $S^\lambda = W$. Sinon, $W \subseteq (S^\lambda)^\perp$ et $W \subseteq S^\lambda$. Donc, comme $S^\lambda \cap (S^\lambda)^\perp = \{0\}$, $W = \{0\}$. Donc S^λ n'admet pas de sous-modules non triviaux. S^λ est donc irréductible.

Soient λ et μ deux partitions de n . Supposons que $S^\lambda \cong S^\mu$. Il existe alors un S_n -morphisme $\theta \in \text{Hom}(S^\lambda, S^\mu)$ non nul. Comme $S^\mu \subseteq M^\mu$, $\theta \in \text{Hom}(S^\lambda, M^\mu)$. Donc d'après la proposition 3.3.7, $\lambda \succeq \mu$. De même, $\mu \succeq \lambda$. Donc $\lambda = \mu$. Les S^λ sont donc deux à deux non équivalents.

Le nombre de S^λ est égal au nombre de partitions de n , lui-même égal au nombre de représentations irréductibles de S_n . L'ensemble des S^λ constitue donc l'ensemble des S_n -modules irréductibles et deux à deux non équivalents. \square

On obtient alors la décomposition des S_n -modules M^μ à partir des modules de Specht S^λ .

Corollaire 3.3.9. *Pour toute partition μ de n , M^μ se décompose sous la forme*

$$M^\mu = \bigoplus_{\lambda \succeq \mu} m_{\lambda\mu} S^\lambda,$$

avec $m_{\mu\mu} = 1$.

Démonstration. D'après le théorème 3.3.8,

$$M^\mu = \bigoplus_{\lambda \vdash n} m_{\lambda,\mu} S^\lambda,$$

où $m_{\lambda,\mu} = \dim \text{Hom}(S^\lambda, M^\mu)$. Soit $\lambda \vdash n$. S'il existe $\theta \in \text{Hom}(S^\lambda, M^\mu)$ non nulle, alors d'après la proposition 3.3.7, $\lambda \succeq \mu$. Donc, si $\lambda \not\succeq \mu$ alors $m_{\lambda,\mu} = 0$. D'où,

$$M^\mu = \bigoplus_{\lambda \succeq \mu} m_{\lambda\mu} S^\lambda.$$

De plus, d'après la même proposition 3.3.7, $m_{\mu,\mu} = \dim \text{Hom}(S^\mu, M^\mu) = 1$. \square

3.4 Base des modules de Specht S^λ

Nous allons maintenant chercher une base de S^λ formée de polytabloïdes. Pour cela, nous introduisons une nouvelle forme de tableaux.

Définition 3.4.1. Une ligne $a_1 \dots a_k$ est dite *croissante* si $a_1 \geq \dots \geq a_k$.

b_1
 Une colonne \vdots est dite *croissante* si $b_1 \geq \dots \geq b_k$.
 b_k

Définition 3.4.2. Un tableau t est dit *standard* si toute ligne et toute colonne de t est croissante. Dans ce cas, on dit également que le tabloïde et le polytabloïde associés à t sont *standards*.

Illustration. $t = \begin{array}{ccc} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & \\ 6 & & \end{array}$ est standard tandis que $t_1 = \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & \\ 6 & & \end{array}$ et $t_2 = \begin{array}{ccc} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & \\ 6 & & \end{array}$ ne le sont pas.

L'objectif de cette partie est de montrer le théorème suivant :

Théorème 3.4.3. *L'ensemble $\{e_t, t \text{ est un } \lambda\text{-tableau standard}\}$ est une base de S^λ .*

Avant de démontrer ce théorème, nous introduisons de nouvelles définitions et démontrons des théorèmes qui permettront de le prouver.

Définition 3.4.4. On appelle *composition de n* une suite ordonnée d'entiers positifs $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$ vérifiant $\sum_{i=1}^l \lambda_i = n$. Les entiers λ_i sont appelés *éléments* de la composition.

Illustration. $(1, 3, 2)$ et $(3, 2, 1)$ sont des compositions de 6. Seule $(3, 2, 1)$ est une partition de 6.

Soit $\{t\}$ un tabloïde de forme $\lambda \vdash n$. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on note $\{t^i\}$ le tabloïde formé de tous les éléments de $\{t\}$ inférieurs ou égaux à i et λ^i la composition donnant la forme de $\{t^i\}$. La notion de tabloïde est ici étendue aux tableaux pouvant contenir des lignes vides. L'élément de la composition λ^i correspondant à une ligne vide est 0.

Illustration. Prenons $t = \overline{\frac{2 \ 3}{1}}$. Alors

$$\{t^1\} = \overline{\frac{\emptyset}{1}}, \quad \{t^2\} = \overline{\frac{2}{1}}, \quad \{t^3\} = \overline{\frac{2 \ 3}{1}},$$

$$\lambda^1 = (0, 1), \quad \lambda^2 = (1, 1), \quad \lambda^3 = (2, 1).$$

Définition 3.4.5. Soient $\{t\}$ et $\{s\}$ des tabloïdes ayant pour suites de composition λ^i et μ^i respectivement. On dit que $\{s\}$ *domine* $\{t\}$ si pour tout i , $\lambda^i \geq \mu^i$. On note $\{s\} \supseteq \{t\}$.

Lemme 3.4.6. [Lemme de dominance pour les tabloïdes] Soit t un tableau. Soient $(k, l) \in \mathbb{N}^2$. Si $k < l$ et k et l apparaissent dans $\{t\}$ aux lignes r et q respectivement avec $r < q$ alors

$$\{t\} \triangleleft (k \ l) \{t\}.$$

Démonstration. Soit t un tableau. Soient $(k, l) \in \mathbb{N}^2$ tels que $k < l$ et k et l apparaissent dans $\{t\}$ aux lignes r et q respectivement avec $r < q$. On note λ^i et μ^i les suites de composition de $\{t\}$ et $(k \ l) \{t\}$ respectivement.

Pour tout $i < k$, $\lambda^i = \mu^i$ puisque $\{t\}$ et $(k \ l) \{t\}$ diffèrent simplement de l'échange des éléments k et l . Un élément strictement inférieur à k reste à sa place initiale par l'application de la permutation $(k \ l)$.

Pour tout $i \geq l$, les éléments distincts de k et l restent à leur place initiale par l'application de la permutation $(k \ l)$ et les éléments k et l sont échangés. Comme $k < l$, $\lambda^i = \mu^i$.

Soit $i \in \{k, \dots, l-1\}$. On note $\lambda^i = (\lambda_1^i, \dots, \lambda_p^i)$ et $\mu^i = (\mu_1^i, \dots, \mu_p^i)$. L'élément k contribue à la valeur λ_r^i alors que l'élément l n'intervient pas puisque $i < l$. De même, k contribue à la valeur μ_q^i alors que l'élément l n'intervient pas. Ainsi, $\lambda_r^i = \mu_r^i + 1$ et $\mu_q^i = \lambda_q^i + 1$, c'est-à-dire $\lambda_q^i = \mu_q^i - 1$. Pour tout $j \in \{1, \dots, p\}$ distinct de k et l , on a $\lambda_j^i = \mu_j^i$ car les éléments distincts de k et l apparaissent aux mêmes endroits dans les deux tableaux. Comme $q < r$, $\lambda^i \triangleleft \mu^i$.

Donc, pour tout i , $\lambda^i \leq \mu^i$. D'où le résultat. \square

Illustration. Prenons $t = \overline{\frac{2 \ 3}{1 \ 4}}$ et $k = 2, l = 4$.

Alors

$$t = \overline{\frac{2 \ 3}{1 \ 4}} \triangleleft (2 \ 4) \overline{\frac{2 \ 3}{1 \ 4}} = \overline{\frac{4 \ 3}{1 \ 2}}$$

Définition 3.4.7. Soit V un espace vectoriel de base $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$. Soit $v \in V$ dont une décomposition est $v = \sum_i c_i b_i$. On dit b_i *apparaît* dans v si $c_i \neq 0$.

Corollaire 3.4.8. Si t est un tableau standard et $\{s\}$ apparaît dans e_t , alors $\{s\} \trianglelefteq \{t\}$.

Démonstration. Soit t un tableau standard. Soit s un tableau tel que $\{s\}$ apparaisse dans e_t . On a $e_t = \kappa_t\{t\} = \sum_{\pi \in C_t} \text{sign}(\pi)\pi\{t\} = \sum_{\pi \in C_t} \text{sign}(\pi)\{\pi t\}$. Il existe donc $\pi \in C_t$ tel que $s = \pi t$. Montrons le résultat par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note H_n la propriété suivante : *S'il existe n couples (k, l) d'entiers tels que $k < l$ et k, l apparaissent dans une même colonne dans s aux lignes r et $r + 1$ respectivement alors $\{s\} \trianglelefteq \{t\}$.*

- Supposons qu'il n'existe pas de tels couples. Alors les colonnes de s sont croissantes. Comme t est un tableau standard, ses colonnes sont également croissantes. Les tableaux t et s possédant les mêmes éléments sur chaque colonne, on a $s = t$. Donc $\{s\} \trianglelefteq \{t\}$. D'où H_0 .

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons H_n , montrons H_{n+1} . Supposons qu'il existe $n + 1$ couples $(k_i, l_i)_{i=1..n+1}$ d'entiers tels que pour tout $i \in \{1, \dots, n + 1\}$, $k_i < l_i$ et k_i, l_i apparaissent dans une même colonne dans s aux lignes r_i et $r_i + 1$ respectivement. Alors, d'après le lemme de dominance des tableaux 3.4.6, $\{s\} \trianglelefteq (k_1 \ l_1) \{s\}$. Le tableau $(k_1 \ l_1) \{s\}$ possède alors n couples $(k_i, l_i)_{i=2..n+1}$ d'entiers tels que pour tout $i \in \{2, \dots, n + 1\}$, $k_i < l_i$ et k_i, l_i apparaissent dans une même colonne dans s aux lignes r_i et $r_i + 1$ respectivement. On peut donc appliquer H_n et obtenir ainsi $(k_1 \ l_1) \{s\} \trianglelefteq \{t\}$. Comme $\{s\} \trianglelefteq (k_1 \ l_1) \{s\}$, par transitivité de \trianglelefteq , $\{s\} \trianglelefteq \{t\}$. D'où H_{n+1} .
D'où le résultat. □

Les tableaux muni de l'ordre \trianglelefteq forment un ensemble partiellement ordonné. Des résultats sur les ensembles partiellement ordonnés sont donc intéressants pour notre étude.

Définition 3.4.9. Soit (E, \leq) un ensemble partiellement ordonné.

On dit qu'un élément $a \in E$ est un *maximum* si pour tout $b \in E$, $a \geq b$.

On dit qu'un élément est *maximal* s'il n'existe pas de $b \in E$ tel que $b > a$.

Un maximum est maximal mais la réciproque est fausse.

Le corollaire précédent exprime donc le fait que $\{t\}$ est un maximum dans l'ensemble des tableaux pouvant apparaître dans e_t .

Le lemme suivant est utilisé pour démontrer la liberté de la famille $\{e_t, t \text{ est un } \lambda\text{-tableau standard}\}$.

Lemme 3.4.10. Soient v_1, \dots, v_m des éléments de M^μ . Si, pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, il existe un tableau $\{t_i\}$ apparaissant dans v_i tel que

1. $\{t_i\}$ est un maximum dans l'ensemble des éléments de M^μ pouvant apparaître dans v_i ,
2. les $\{t_i\}$ sont deux à deux distincts.

Alors la famille (v_1, \dots, v_m) est libre.

Démonstration. Soient v_1, \dots, v_m des éléments de M^μ vérifiant les hypothèses du lemme. Quitte à permuter les indices, on peut supposer que $\{t_1\}$ est maximal parmi les $\{t_i\}$. Cela est possible car l'ensemble des t_i est fini. Supposons qu'il existe $i_0 \neq 1$ tel que $\{t_1\}$ apparaisse dans v_{i_0} . Alors d'après le point 1, $\{t_{i_0}\} \trianglelefteq \{t_1\}$. Donc comme $\{t_1\} \trianglerighteq \{t_i\}$ pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$ par hypothèse, $\{t_1\} = \{t_{i_0}\}$. Ceci contredit le point 2. Donc $\{t_1\}$ apparaît uniquement dans v_1 . Soient c_1, \dots, c_m une famille de nombres complexes tels que

$$c_1 v_1 + \dots + c_m v_m = 0.$$

$\{t_1\}$ n'apparaissant que dans v_1 , nécessairement, on a $c_1 = 0$. Puis par récurrence sur m , on obtient alors le résultat. □

Proposition 3.4.11. La famille $\{e_t, t \text{ est un } \lambda\text{-tableau standard}\}$ est libre dans S^λ .

Démonstration. Soient t_1, \dots, t_m l'ensemble des λ -tableaux standards deux à deux distincts. e_{t_1}, \dots, e_{t_m} sont des éléments de M^λ et pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, $\{t_i\}$ apparaît dans e_{t_i} , par définition. De plus, d'après le corollaire 3.4.8, pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, $\{t_i\}$ est maximal dans l'ensemble des tableaux pouvant apparaître dans e_{t_i} et les $\{t_i\}$ sont deux à deux distincts. Donc, d'après le lemme 3.4.10, la famille $\{e_t, t \text{ est un } \lambda\text{-tableau}\}$ est libre dans S^λ . □

La preuve du caractère générateur sur S^λ de la famille $\{e_t, t \text{ est un } \lambda\text{-tableau standard}\}$ nous fournira alors le résultat attendu. Pour cela, il faut montrer que tout polytabloïde est une combinaison linéaire de polytabloïdes standards.

Soit t un tableau. On doit montrer que e_t est une combinaison linéaire de polytabloïdes standards. On peut supposer que les colonnes de t forment des suites croissantes. En effet, si elles ne le sont pas, il existe $\sigma \in C_t$ tel que $s = \sigma t$ ait des colonnes croissantes. Ainsi, $e_s = \sigma e_t = \text{sign}(\sigma)e_t$ d'après 3.2.5 et 3.3.3. Donc e_t est une combinaison linéaire de polytabloïdes si et seulement si e_s l'est.

Définition 3.4.12. Soit t un tableau. On appelle *descente de lignes* de t un couple d'entiers consécutifs sur une ligne apparaissant dans l'ordre décroissant.

Supposons qu'il existe π_1, \dots, π_k des permutations de S_n telles que pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, le tableau $\pi_i t$ contienne une descente de lignes de moins que t et que $g = \text{Id} + \sum_{i=1}^k \text{sign}(\pi_i)\pi_i$ vérifie $ge_t = 0$. Alors $e_t = -\sum_{i=1}^k e_{\pi_i t}$. On obtient donc e_t comme combinaison linéaire de polytabloïdes qui se rapprochent de polytabloïdes standards. On peut alors obtenir le résultat par récurrence. On va donc chercher un tel g .

Eléments de Garnir

Définition 3.4.13 (Elément de Garnir). Soient A et B deux ensembles disjoints d'entiers positifs. Soient $\pi_1, \dots, \pi_k \in S_n$ tels que

$$S_{A \cup B} = \sqcup_{i=1}^k \pi_i(S_A \times S_B).$$

L'élément de Garnir correspondant est

$$g_{A,B} = \sum_{i=1}^k \text{sign}(\pi_i)\pi_i.$$

$S_A \times S_B$ étant un sous-groupe de $S_{A \cup B}$, de telles permutations existent. $g_{A,B}$ dépend non seulement de A et B mais également de la partition de $S_{A \cup B}$. On va donc définir les éléments à considérer pour définir les éléments de Garnir associés à un tableau.

Pour déterminer ces permutations, on peut trouver les couples d'ensembles (A', B') tels que $A' \sqcup B' = A \sqcup B$ et à chaque couple, considérer la permutation π vérifiant $\pi(A, B) = (A', B')$ et qui range les éléments de A' et B' par ordre croissant.

Définition 3.4.14. Soit t un tableau. Soient A et B des sous-ensembles de la $j^{\text{ème}}$ et $(j+1)^{\text{ème}}$ colonnes de t . L'élément de Garnir associés à t et A, B est

$$g_{A,B} = \sum_{\pi} \text{sign}(\pi)\pi,$$

où les π ont été choisis de sorte que les éléments de $A \cup B$ soient croissants lorsque l'on descend les colonnes de πt .

En pratique, si un tableau t contient une descente de lignes $t_{i,j} > t_{i,j+1}$, on prend $A = \{t_{k,j}, k \geq i\}$ et $B = \{t_{k,j+1}, k \leq i\}$.

Illustration. Prenons $t = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 5 & 4 & \\ \hline 6 & & \\ \hline \end{array}$. $5 > 4$ est la seule descente de lignes de t . On a donc $A = \{5, 6\}$ et $B = \{2, 4\}$. Les tableaux cherchés pour obtenir $g_{A,B}$ sont donc

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 5 & 4 & \\ \hline 6 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & \\ \hline 6 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 6 & \\ \hline 5 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 5 & 3 \\ \hline 2 & 6 & \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 3 \\ \hline 2 & 6 & \\ \hline 5 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 3 \\ \hline 2 & 5 & \\ \hline 6 & & \\ \hline \end{array}.$$

On obtient donc

$$g_{A,B} = \text{Id} - (4 \ 5) + (4 \ 6 \ 5) + (2 \ 5)(4 \ 6) - (2 \ 4 \ 6 \ 5) + (2 \ 4 \ 5).$$

Proposition 3.4.15. *Soient t un tableau de descente de lignes $t_{i,j} > t_{i,j+1}$, A et B des sous-ensembles de la $j^{\text{ème}}$ et $(j+1)^{\text{ème}}$ colonnes de t respectivement. Si $|A \cup B|$ est supérieur au nombre d'éléments de la $j^{\text{ème}}$ colonne de t alors $g_{A,B}e_t = 0$.*

Démonstration. Supposons que $|A \cup B|$ soit supérieur au nombre d'éléments de la $j^{\text{ème}}$ colonne de t . Montrons que $S_{A \cup B}^- e_t = 0$.

$$S_{A \cup B}^- e_t = S_{A \cup B}^- \kappa_t \{t\} = S_{A \cup B}^- \left(\sum_{\sigma \in C_t} \text{sign}(\sigma) \sigma \right) \{t\} = \sum_{\sigma \in C_t} (\text{sign}(\sigma) S_{A \cup B}^- \{\sigma t\}).$$

Soit $\sigma \in C_t$. Par hypothèse, il existe $a, b \in A \cup B$ tels que a et b soient dans la même ligne dans σt . Alors, $(a \ b) \in S_{A \cup B}$. Donc d'après le point 4 du lemme du signe 3.3.3, on a $S_{A \cup B} \{\sigma t\} = 0$. Donc

$$S_{A \cup B}^- e_t = \sum_{\sigma \in C_t} (\text{sign}(\sigma) S_{A \cup B}^- \{\sigma t\}) = 0.$$

On a $S_{A \cup B} = \sqcup_{\pi} \pi(S_A \times S_B)$ où les permutations π sont celles utilisées dans l'expression de $g_{A,B}$ associé au tableau t . Donc

$$S_{A \cup B}^- = \sum_{\sigma \in S_{A \cup B}} \text{sign}(\sigma) \sigma = \sum_{\sigma \in \sqcup_{\pi} \pi(S_A \times S_B)} \text{sign}(\sigma) \sigma = \sum_{\pi} \sum_{\sigma \in \pi(S_A \times S_B)} \text{sign}(\sigma) \sigma.$$

Puis par changement de variable,

$$S_{A \cup B}^- = \sum_{\pi} \sum_{\gamma \in S_A \times S_B} \text{sign}(\pi \gamma) \pi \gamma.$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} g_{A,B}(S_A \times S_B)^- &= g_{A,B} \left(\sum_{\sigma \in S_A \times S_B} \text{sign}(\sigma) \sigma \right) = \sum_{\pi} \sum_{\sigma \in S_A \times S_B} \text{sign}(\pi) \text{sign}(\sigma) \pi \sigma \\ &= \sum_{\pi} \sum_{\sigma \in S_A \times S_B} \text{sign}(\pi \sigma) \pi \sigma. \end{aligned}$$

Donc $S_{A \cup B}^- = g_{A,B}(S_A \times S_B)^-$. Comme $S_{A \cup B}^- e_t = 0$, on obtient

$$g_{A,B}(S_A \times S_B)^- e_t = 0.$$

Calculons $(S_A \times S_B)^- e_t$.

$$(S_A \times S_B)^- e_t = \sum_{\sigma \in S_A \times S_B} \text{sign}(\sigma) \sigma e_t = \sum_{\sigma \in S_A \times S_B} \sigma^- e_t = \sum_{\sigma \in S_A \times S_B} \sigma^- C_t^- \{t\},$$

en utilisant le point 1 du lemme du signe 3.3.3. A et B étant des sous ensembles des colonnes j et $j+1$ de t respectivement, $S_A \times S_B \subseteq C_t$. Donc pour tout $\sigma \in S_A \times S_B$, $\sigma^- C_t^- = C_t^-$ également par le point 1 du lemme du signe 3.3.3. Ainsi,

$$(S_A \times S_B)^- e_t = \sum_{\sigma \in S_A \times S_B} C_t^- \{t\} = |S_A \times S_B| C_t^- \{t\} = |S_A \times S_B| e_t.$$

Donc $g_{A,B}(S_A \times S_B)^- = |S_A \times S_B| g_{A,B} e_t = 0$. Comme $|S_A \times S_B| \neq 0$,

$$g_{A,B} e_t = 0.$$

□

Nous pouvons alors démontrer le résultat recherché :

Théorème 3.4.16. *La famille $\{e_t, t \text{ est un } \lambda\text{-tableau standard}\}$ engendre S^λ .*

Démonstration. Soit t un λ -tableau. Supposons que e_t appartienne à l'espace engendré par la famille $\{e_u, u \text{ est un } \lambda\text{-tableau standard}\}$. Soit $s \in [t]$. Les tableaux s et t ont les mêmes éléments dans chaque colonne, seul l'ordre des éléments dans les colonnes est différent. Il existe donc $\pi \in C_t$ tel que $s = \pi t$. Donc $e_s = e_{\pi t} = \pi e_t$ appartient à l'espace engendré par $\{e_u, u \text{ est un } \lambda\text{-tableau standard}\}$. Ainsi, pour tout $s \in [t]$, e_s appartient à l'espace engendré par $\{e_u, u \text{ est un } \lambda\text{-tableau standard}\}$. On peut donc toujours prendre un tableau t dont les colonnes sont croissantes. On veut donc montrer que S^λ appartient à l'espace engendré par l'ensemble des e_t où t est un λ -tableau standard.

Notons $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)$. Pour tout λ -tableau t , on note $H_{[t]}$ l'hypothèse de récurrence : *Pour tout λ -tableau s tel que $[s] \supseteq [t]$, e_s est engendré par l'ensemble des $e_{t'}$ où t' est un λ -tableau standard tel que $[t'] \supseteq [t]$.*

Soit t_0 le tableau de forme λ obtenu en remplaçant les points du diagramme de Ferrers associé par les entiers $1, \dots, n$ successivement de haut en bas, puis de gauche à droite. On remarque que l'ensemble des tabloïdes colonnes de forme λ possède $[t_0]$ comme maximum. $[t_0]$ est standard. Pour tout λ -tableau s tel que $[s] \supseteq [t_0]$, on a $[s] = [t_0]$ donc $s \in [t_0]$. Donc, e_s appartient à l'espace engendré par e_{t_0} , donc par la famille $\{e_u, u \text{ est un } \lambda\text{-tableau standard}\}$. D'où $H_{[t_0]}$.

Soit t un λ -tableau. On suppose que pour tout λ -tableau s tel que $[s] \supset [t]$, e_s est dans l'espace engendré par l'ensemble des $e_{t'}$ où t' est un λ -tableau standard tel que $[t'] \supseteq [t]$. Montrons que e_t est dans l'espace engendré par l'ensemble des $e_{t'}$ où t' est un λ -tableau standard tel que $[t'] \supseteq [t]$. On suppose les colonnes de t croissantes. Si t est standard alors e_t appartient à l'espace engendré par $\{e_u, u \text{ est un } \lambda\text{-tableau}\}$. Supposons t non standard. Alors t admet une descente de lignes $t_{i,j} > t_{i,j+1}$. On note a_1, \dots, a_p les éléments de la $j^{\text{ème}}$ colonne de t (pris dans cet ordre) et b_1, \dots, b_q ceux de la $(j+1)^{\text{ème}}$, avec $a_1 < \dots < a_p, b_1 < \dots < b_q$ et $a_i > b_i$. Schématiquement, on a

$$\begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ & \wedge \\ a_2 & b_2 \\ & \wedge \\ \vdots & \vdots \\ & \wedge \\ a_i & > b_i \\ & \wedge \\ \vdots & \vdots \\ & \wedge \\ a_q & b_q \end{array}$$

Prenons $A = \{a_1, \dots, a_p\}$ et $B = \{b_1, \dots, b_q\}$ et l'élément de Garnir associé $g_{A,B} = \sum_{\pi} \text{sign}(\pi)\pi$. D'après la proposition 3.4.15, $g_{A,B}e_t = 0$. Donc $e_t = -\sum_{\pi \neq \text{Id}} (\text{sign}(\pi))\pi e_t = -\sum_{\pi \neq \text{Id}} (\text{sign}(\pi))e_{\pi t}$. Or $a_q > \dots > a_i > b_i > \dots > b_1$. Donc $[\pi t] \supseteq [t]$, d'après le lemme 3.4.6. Donc, d'après l'hypothèse de récurrence, pour tout π , $e_{\pi t}$ appartient à l'espace engendré par $\{e_u, u \text{ est un } \lambda\text{-tableau standard}\}$. Donc e_t l'est également.

D'où le résultat. □

Définition 3.4.17. Soit λ une partition de n . Le nombre de λ -tableaux standards est noté f^λ .

Nous obtenons alors le résultat suivant :

Théorème 3.4.18. *Soit λ une partition de n . Alors*

1. *La famille $\{e_t, t \text{ est un } \lambda\text{-tableau standard}\}$ est une base de S^λ ,*

2. $\dim S^\lambda = f^\lambda$,
3. $\sum_{\lambda \vdash n} (f^\lambda)^2 = n!$.

Démonstration. 1. On a vu que la famille $\{e_t, t \text{ est un } \lambda\text{-tableau standard}\}$ est une famille libre et génératrice de S^λ . C'est donc une base de S^λ .

2. $|\{e_t, t \text{ est un } \lambda\text{-tableau standard}\}| = f^\lambda$ donc $\dim S^\lambda = f^\lambda$.
3. On a vu dans la première partie, au point 2 de la proposition 2.3.12, que pour tout groupe G ,

$$\sum_V (\dim V)^2 = |G|,$$

où les V sont l'ensemble des G -modules irréductibles. Donc, en particulier pour $G = S_n$,

$$\sum_{\lambda \vdash n} (\dim S^\lambda)^2 = \sum_{\lambda \vdash n} f^\lambda = n!.$$

□

Illustration. Considérons le cas $n = 5$ et étudions les modules irréductibles de S_5 . Les partitions de 5 sont $\lambda = (1, 1, 1, 1, 1) = (1^5)$, $(2, 1, 1, 1) = (2, 1^3)$, $(2, 2, 1)$, $(3, 1, 1) = (3, 1^2)$, $(3, 2)$, $(4, 1)$ et (5) . On note K_μ la classe de conjugaison de S_5 associée à la partition μ . À chaque partition correspond une classe de conjugaison dont les éléments s'écrivent comme produit de cycles disjoints de longueurs décroissantes données par la partition.

Cherchons les λ -tableaux standards pour connaître la dimension de S^λ .

• $\lambda = (1^5)$. Le seul tableau standard est $t = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix}$. Donc $\dim S^{(1^5)} = 1$.

• $\lambda = (2, 1^3)$. Les tableaux standards sont de la forme $t = \begin{matrix} 1 & \bullet \\ \bullet & \\ \bullet & \\ \bullet & \end{matrix}$ car les lignes et les colonnes sont

croissantes. Il y a 4 choix possibles pour l'élément en position $(1, 2)$. Une fois cet élément choisi, on ne peut qu'introduire les éléments restants dans l'ordre croissant. Il y a donc 4 tableaux standards. Donc $\dim S^{(2, 1^3)} = 4$.

• $\lambda = (2, 2, 1)$. Les tableaux standards sont de la forme $t = \begin{matrix} 1 & \bullet \\ \bullet & \bullet \\ \bullet & \end{matrix}$ car les lignes et les colonnes

sont croissantes. L'élément 2 ne peut être placé qu'en position $(1, 2)$ ou $(2, 1)$. Les tableaux possibles

sont alors $\begin{matrix} 1 & 2 & & 1 & 2 & & 1 & 3 & & 1 & 3 & & 1 & 4 \\ 3 & 4 & & 3 & 5 & & 2 & 5 & & 2 & 4 & & 2 & 5 \\ 5 & & & 4 & & & 4 & & & 5 & & 3 & & \end{matrix}$. Il y a donc 5 tableaux standards. Donc

$\dim S^{(2, 2, 1)} = 5$.

De même, on trouve $|S^{(3, 1, 1)}| = 6$, $|S^{(3, 2)}| = 5$, $|S^{(4, 1)}| = 4$, $|S^{(5)}| = 1$.

On retrouve bien $\sum_{\mu \vdash 5} (\dim S^\mu)^2 = 1^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 5^2 + 4^2 + 1^2 = 120 = 5! = |S_5|$.

La formule $\sum_{\lambda \vdash n} (f^\lambda)^2 = n!$ peut être également obtenue de manière combinatoire.

3.5 Représentation naturelle de Young

Les matrices pour le module S^λ dans la base $\{e_t, t \text{ est un } \lambda\text{-tableau standard}\}$ forment ce que l'on appelle la *représentation naturelle de Young*. À partir de cette représentation, on connaît le

caractère associé au module S^λ puisqu'il s'agit de la trace. La méthode proposée ici permet d'obtenir la table de caractères de S_5 . D'autres méthodes sont possibles, notamment celles utilisant le produit hermitien sur les caractères.

Comme S_n est engendré par l'ensemble $\{(i \ i+1), i \in \{1, \dots, n-1\}\}$, il suffit de calculer les matrices correspondant à ces éléments.

On se donne une base $(e_{t_1}, \dots, e_{t_p})$ de S^λ , où les t_i sont les tableaux standards de forme λ . Soit $j \in \{1, \dots, p\}$. La $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice de $\pi \in S_n$ est alors obtenue en décomposant $\pi e_{t_j} = e_{\pi t_j}$ comme somme des polytabloïdes standards e_{t_1}, \dots, e_{t_p} . Soit $\pi = (k \ k+1)$. Trois cas sont possibles :

1. k et $k+1$ sont dans la même colonne dans t_j . Alors $\pi = (k \ k+1) \in C_{t_j}$. Donc d'après le lemme 3.3.3,

$$(k \ k+1) k_{t_j} \{t_j\} = (k \ k+1) C_{t_j}^- \{t_j\} = -C_{t_j}^- \{t_j\}.$$

D'où $\pi e_{t_j} = -e_{t_j}$.

2. k et $k+1$ sont dans la même ligne dans t . Alors $(k \ k+1) t_j$ a une descente en lignes dans cette ligne. En appliquant l'élément de Garnir approprié, on obtient $(k \ k+1) e_{t_j} = e_{t_j} \pm$ autres polytabloïdes $e_{t'}$ tels que $[t'] \triangleright [t_j]$.
3. k et $k+1$ ne sont ni dans la même ligne ni dans la même colonne dans t_j . Alors $t' = (k \ k+1) t_j$ est un tableau standard et $(k \ k+1) e_{t_j} = e_{t'}$.

Illustration. On reprend le cas $n = 5$ et on considère le module $S^{(2,1,1,1)}$. Les tableaux standards

$$\text{sont } t_1 = \begin{array}{c} 1 \ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}, \quad t_2 = \begin{array}{c} 1 \ 3 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{array}, \quad t_3 = \begin{array}{c} 1 \ 4 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{array}, \quad t_4 = \begin{array}{c} 1 \ 5 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}.$$

Calculons la matrice $X\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\right)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} t_1 = \begin{array}{c} 2 \ 1 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}. \text{ Il s'agit du point 2. On calcule donc l'élément de Garnir associé à ce tableau.}$$

Les tableaux correspondant aux permutations dans $g_{A,B}$ sont

$$\begin{array}{c} 2 \ 1 \quad 1 \ 2 \quad 1 \ 3 \quad 1 \ 4 \quad 1 \ 5 \\ 3 \quad \quad 3 \quad \quad 2 \quad \quad 2 \quad \quad 2 \\ 4 \quad \quad 4 \quad \quad 4 \quad \quad 3 \quad \quad 3 \\ 5 \quad \quad 5 \quad \quad 5 \quad \quad 5 \quad \quad 4 \end{array}.$$

Donc $g_{A,B} = \text{Id} - (1 \ 2) + (1 \ 3 \ 2) - (1 \ 4 \ 3 \ 2) + (1 \ 5 \ 4 \ 3 \ 2)$. Donc

$$e_{(1 \ 2)t_1} = e_{t_1} - e_{t_2} + e_{t_3} - e_{t_4}.$$

Pour les autres tableaux, il s'agit du point 1. On obtient donc directement

$$e_{(1 \ 2)t_2} = -e_{t_2}, \quad e_{(1 \ 2)t_3} = -e_{t_3}, \quad e_{(1 \ 2)t_4} = -e_{t_4}.$$

Donc la matrice associée prise en $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$ de représentation associée $S^{(2,1,1,1)}$ dans la base $(e_{t_1}, e_{t_2}, e_{t_3}, e_{t_4})$ est

$$X\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, la caractère associé en $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$ de $S^{(2,1,1,1)}$ vaut -2 dans la classe de conjugaison $K_{(2,1^3)}$.

On peut calculer de même les matrices associées à toutes les transpositions de la forme $(i \ i+1)$ de S_5 pour obtenir celles associées à toutes les permutations de S_5 (puisque ces transpositions engendrent S_5) et obtenir ainsi les valeurs du caractère associé à $S^{(2,1,1,1)}$ sur toutes les classes de conjugaison. La même étude sur tous les S^λ , où $\lambda \vdash 5$, fournit la table de caractères de S_5 :

	$K_{(1,1,1,1,1)}$	$K_{(2,1,1,1)}$	$K_{(2,2,1)}$	$K_{(3,1,1)}$	$K_{(3,2)}$	$K_{(4,1)}$	$K_{(5)}$
$\chi_{(1,1,1,1,1)}$	1	-1	1	1	-1	-1	1
$\chi_{(2,1,1,1)}$	4	-2	0	1	1	0	-1
$\chi_{(2,2,1)}$	5	-1	1	-1	-1	1	0
$\chi_{(3,1,1)}$	6	0	-2	0	0	0	1
$\chi_{(3,2)}$	5	1	1	-1	1	-1	0
$\chi_{(4,1)}$	4	2	0	1	-1	0	-1
$\chi_{(5)}$	1	1	1	1	1	1	1

On remarque par exemple que la première ligne du tableau correspond à la représentation signature et la dernière ligne à la représentation triviale. Chaque case de la première colonne correspond à la dimension de S^λ .

3.6 Règles de branchement

On s'intéresse dans cette partie à la représentation restreinte de S^λ sur S_{n-1} et à la représentation induite par S^λ sur S_{n+1} .

Définition 3.6.1. Soit t un diagramme de Ferrers de forme $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$. Le couple (i, j) est appelé *coin intérieur* de λ si le tableau t privé du point (i, j) est encore le diagramme de Ferrers d'une partition. La partition ainsi obtenue est notée λ^- . Le couple (i, j) est appelé *coin extérieur* de λ si $(i, j) \notin t$ et si le tableau t auquel on a ajouté le point (i, j) est encore le diagramme de Ferrers d'une partition. La partition ainsi obtenue est notée λ^+ .

Illustration. Prenons $\lambda = (3, 2)$. Le diagramme de Ferrers associé est $\begin{array}{ccc} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \end{array}$.

Donc les différentes partitions λ^- sont $(2, 2)$ et $(3, 1)$ associées aux diagrammes de Ferrers respectifs $\begin{array}{cc} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{array}$ et $\begin{array}{ccc} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & & \end{array}$.

De même, les λ^+ sont $(4, 2)$, $(3, 3)$ et $(3, 2, 1)$ associés respectivement à $\begin{array}{cccc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & & \end{array}$, $\begin{array}{ccc} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{array}$, et $\begin{array}{ccc} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \\ \bullet & & \end{array}$.

et $\begin{array}{ccc} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \\ \bullet & & \end{array}$.

Il s'agit des partitions apparaissant dans les restrictions et inductions puisque nous verrons dans la suite que

$$S^{(3,2)} \downarrow_{S_4}^{S_5} \cong S^{(3,1)} \oplus S^{(2,2)}$$

et

$$S^{(3,2)} \uparrow_{S_5}^{S_6} \cong S^{(4,2)} \oplus S^{(3,3)} \oplus S^{(3,2,1)}.$$

On rappelle que f^λ est le nombre de λ -tableaux standards et $f^\lambda = \dim S^\lambda$.

Lemme 3.6.2. Soit λ une partition de n . On a

$$f^\lambda = \sum_{\lambda^-} f^{\lambda^-}.$$

Démonstration. Soit t un tableau standard de forme λ . n étant le grand élément contenu dans t et les lignes et les colonnes de t étant croissantes, n est situé dans un coin intérieur de t . On note (i_t, j_t) ce coin. On a

$$\{t, t \text{ est un } \lambda\text{-tableau standard}\} = \sqcup_{(i_t, j_t) \text{ coin intérieur}} \{t, t \text{ } \lambda\text{-tableau standard, } n \text{ en position } (i_t, j_t)\}.$$

Or f^λ est le cardinal de $\{t, t \text{ est un } \lambda\text{-tableau standard}\}$. Donc

$$\begin{aligned} f^\lambda &= \sum_{(i_t, j_t) \text{ coin intérieur}} |\{t, t \text{ } \lambda\text{-tableau standard, } n \text{ en position } (i_t, j_t)\}| \\ &= \sum_{\lambda^-} f^{\lambda^-}. \end{aligned}$$

□

Le lemme suivant est un résultat général sur les G -modules.

Lemme 3.6.3. *Soit G un groupe fini. Soient V un G -module et W un G -sous-module de V . Alors*

$$V \cong W \oplus (V/W).$$

Démonstration. On considère l'action $G \times V/W \rightarrow V/W$ $(g, \bar{v}) \mapsto \overline{gv}$. Cette action est bien définie. En effet, elle est indépendante du choix du représentant : supposons que $\bar{v}_1 = \bar{v}_2$. Alors, il existe $w \in W$ tel que $v_1 = v_2 + w$. Donc pour tout $g \in G$, $gv_1 = gv_2 + gw$ et $gw \in W$ car W est un G -sous-module de V . Donc $\overline{gv_1} = \overline{gv_2}$. V/W est donc un G -module.

Si V est irréductible, le résultat est trivial

Supposons V réductible. Alors il existe un sous-module W' de V tel que $V = W \oplus W'$. Soit (e_1, \dots, e_k) une base de W et (e_{k+1}, \dots, e_m) une base de W' . $(\bar{e}_{k+1}, \dots, \bar{e}_m)$ est une base de V/W . En effet, supposons que $\lambda_{k+1}\bar{e}_{k+1} + \dots + \lambda_m\bar{e}_m = \bar{0}$, où les $\lambda_i \in \mathbb{C}$. Alors il existe $w \in W$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ tels que $\lambda_{k+1}e_{k+1} + \dots + \lambda_me_m = w = \lambda_1e_1 + \dots + \lambda_ke_k$. La famille (e_1, \dots, e_m) étant libre, les λ_i sont tous nuls. Donc la famille $(\bar{e}_{k+1}, \dots, \bar{e}_m)$ est libre dans V/W . Comme $\dim(V/W) = \dim V - \dim W = m - k$, $(\bar{e}_{k+1}, \dots, \bar{e}_m)$ est une base de V/W . On considère l'action

$$\begin{aligned} G \times W \oplus V/W &\rightarrow W \oplus V/W \\ (g, \sum_{i=1}^k \lambda_i e_i + \sum_{i=k+1}^m \mu_i \bar{e}_i) &\mapsto \sum_{i=1}^k \lambda_i g e_i + \sum_{i=k+1}^m \mu_i \overline{g e_i}. \end{aligned}$$

Comme $V = W \oplus W'$, la famille (e_1, \dots, e_m) est une base de V . Alors, l'application

$$\theta : \begin{aligned} V &\rightarrow W \oplus V/W \\ \sum_{i=k+1}^m \lambda_i e_i &\mapsto \sum_{i=1}^k \lambda_i e_i + \sum_{i=k+1}^m \lambda_i \bar{e}_i \end{aligned}$$

est un isomorphisme de G -modules. Donc $V \cong W \oplus V/W$.

□

Théorème 3.6.4. *Soit λ une partition de n . Alors*

1. $S^\lambda \downarrow_{S_{n-1}}^{S_n} \cong \bigoplus_{\lambda^-} S^{\lambda^-}$,
2. $S^\lambda \uparrow_{S_n}^{S_{n+1}} \cong \bigoplus_{\lambda^+} S^{\lambda^+}$.

Démonstration. 1. On note $(r_1, c_1), \dots, (r_k, c_k)$ les positions des coins intérieurs de λ . Pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, λ^i désigne la partition λ^- obtenue en supprimant la case (r_i, c_i) et t^i (resp. $\{t^i\}$) le tableau (resp. tabloïde) obtenu en supprimant l'élément n si n est dans le coin intérieur (r_i, c_i) .

Montrons que $S^\lambda \downarrow_{S_{n-1}}^{S_n} \cong \bigoplus_{i=1}^k S^{\lambda^i}$.

Nous allons construire un ensemble de sous-espace $V^{(0)}, \dots, V^{(k)}$ tels que

$\{0\} = V^{(0)} \subset V^{(1)} \subset \dots \subset V^{(k)} = S^\lambda$ et $V^{(i)}/V^{(i-1)} \cong S^{\lambda_i}$ en tant que S_{n-1} -modules.

Soit $V^{(i)}$ l'espace vectoriel engendré par les polytabloïdes standards e_t où n apparaît dans t uniquement aux coins $(r_1, c_1), \dots, (r_i, c_i)$. Considérons l'application

$$\theta_i : \begin{array}{ccc} M^\lambda & \rightarrow & M^{\lambda^i} \\ \{t\} & \mapsto & \begin{cases} \{t^i\} & \text{si } n \text{ est dans la ligne } r_i, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \end{array}$$

que l'on étend par linéarité. S_{n-1} agit sur l'ensemble des tableaux de forme λ , où $\lambda \vdash n$, en permutant les éléments distincts de n . Donc S_{n-1} ne modifie pas la position de n dans un tableau. Donc, pour tout $\pi \in S_{n-1}$, on a $\theta_i(\pi\{t\}) = \begin{cases} \{\pi t^i\} & \text{si } n \text{ est dans la ligne } r_i, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, et

$\pi\theta_i(\{t\}) = \begin{cases} \pi\{t^i\} & \text{si } n \text{ est dans la ligne } r_i, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} \{t^i\} & \text{si } n \text{ est dans la ligne } r_i, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Donc θ_i est un S_{n-1} -morphisme.

$V^{(i-1)} \subseteq \ker \theta_i$ puisque les tableaux de $V^{(i-1)}$ contiennent n dans une ligne inférieure ou égale à $i-1$.

Soit $t \in V^{(i)}$ un tableau standard. n étant dans un coin intérieur et toute permutation $\pi \in C_t$ sur t n'échangeant que les éléments d'une même colonne, n est dans une ligne r_j où $j \leq i$ dans $\{\pi t\}$. Donc si n est dans une ligne r_j de t avec $j < i$, $\theta_i(e_t) = 0$ car tous les tabloïdes standards apparaissant dans e_t contiennent n en position $j < i$. Si n est dans la ligne r_i alors $\theta_i(e_t) = e_{t^i}$. En effet,

$$\begin{aligned} e_t &= \kappa_t \{t\} = \sum_{C_t} \text{sign}(\pi) \pi \{t\} \\ &= \sum_{\pi \in C_t, \pi(n)=n} \text{sign}(\pi) \pi \{t\} + \sum_{\pi \in C_t, \pi(n) \neq n} \text{sign}(\pi) \pi \{t\}. \end{aligned}$$

Or pour tout $\pi \in C_t$ tel que $\pi(n) \neq n$, n est dans une ligne r_j de πt avec $j < i$. Donc dans ce cas, $\theta(\pi\{t\}) = 0$. Donc $\theta(\sum_{\pi \in C_t, \pi(n) \neq n} \text{sign}(\pi) \pi \{t\}) = 0$. Donc, en utilisant le fait que n est dans la colonne r_i ,

$$\begin{aligned} \theta(e_t) &= \sum_{\pi \in C_t, \pi(n)=n} \text{sign}(\pi) \pi \{t\} \\ &= \sum_{\pi \in C_t, \pi(n)=n} \text{sign}(\pi) \pi \theta(\{t\}) \\ &= \sum_{\pi \in C_{t^i}} \text{sign}(\pi) \pi \{t^i\} \\ &= e_{t^i}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\theta_i : e_t \mapsto \begin{cases} e_{t^i} & \text{si } n \text{ est dans la ligne } r_i \text{ de } \{t\} \\ 0 & \text{si } n \text{ est dans la ligne } r_j \text{ de } \{t\} \text{ avec } j < i \end{cases}$. Donc θ_i envoie une base de

$V^{(i)}$ dans une base de S^{λ^i} . Donc $\theta_i V^{(i)} = S^{\lambda^i}$. Donc $f^{\lambda_i} = \dim S^{\lambda_i} = \dim \frac{V^{(i)}}{V^{(i)} \cap \ker \theta_i}$.

On a donc

$$\{0\} = V^{(0)} \subseteq V^{(1)} \cap \ker \theta_1 \subseteq V^{(1)} \subseteq V^{(2)} \cap \ker \theta_2 \subseteq \dots \subseteq V^{(k)} = S^\lambda.$$

D'après le lemme 3.6.3, on pourrait montrer par récurrence que

$$S^\lambda \cong V^{(k)}/(V^{(k)} \cap \ker \theta_k) \oplus (V^{(k)} \cap \ker \theta_k)/V^{(k-1)} \oplus \dots \oplus (V^{(1)} \cap \ker \theta_1).$$

Donc

$$\begin{aligned} \dim S^\lambda &= \sum_{i=1}^k \left(\dim \frac{V^{(i)}}{V^{(i)} \cap \ker \theta_i} + \dim \frac{V^{(i)} \cap \ker \theta_i}{V^{(i-1)}} \right) \\ &= \sum_{i=1}^k f^{\lambda_i} + \sum_{i=1}^k \dim \frac{V^{(i)} \cap \ker \theta_i}{V^{(i-1)}} \\ &= \dim S^\lambda + \sum_{i=1}^k \dim \frac{V^{(i)} \cap \ker \theta_i}{V^{(i-1)}} \end{aligned}$$

Donc, pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, $\dim \frac{V^{(i)} \cap \ker \theta_i}{V^{(i-1)}} = 0$ et $\ker \theta_i \cap V^{(i)} = V^{(i-1)}$. D'où

$$\{0\} = V^{(0)} \subset V^{(1)} \subset \dots \subset V^{(k)} = S^\lambda$$

avec $V^{(i)}/V^{(i-1)} = V^{(i)}/(\ker \theta_i \cap V^{(i)}) \cong S^{\lambda^i}$ car $\theta_i|_{V^{(i)}}: V^{(i)} \rightarrow S^{\lambda^i}$ est un morphisme surjectif. Donc, en tant que S_{n-1} -modules

$$S^\lambda \cong S^{\lambda^1} \oplus \dots \oplus S^{\lambda^k}.$$

D'où,

$$S^\lambda \downarrow_{S_{n-1}}^{S_n} \cong \bigoplus_{\lambda^-} S^{\lambda^-}.$$

2. Nous allons utiliser le lemme de réciprocity de Frobenius. Soit χ^λ le caractère de S^λ . On a $S^\lambda \uparrow_{S_n}^{S_{n+1}} \cong \bigoplus_{\mu \vdash n+1} m_\mu S^\mu$. Le caractère associé est $\chi^\lambda \uparrow_{S_n}^{S_{n+1}} = \sum_{\mu \vdash n+1} m_\mu \chi^\mu$. On a alors

$$\begin{aligned} m_\mu &= \langle \chi^\lambda \uparrow_{S_n}^{S_{n+1}}, \chi^\mu \rangle && \text{d'après 1.9.4} \\ &= \langle \chi^\mu, \chi^\mu \downarrow_{S_n}^{S_{n+1}} \rangle && \text{par le lemme de réciprocity de Frobenius} \\ &= \langle \chi^\mu, \sum_{\mu^-} \chi^{\mu^-} \rangle && \text{par la règle de branchement} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda = \mu^-, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, && \text{par le corollaire 1.9.4} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } \mu = \lambda^+, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, && \text{par définition de } \mu^- \text{ et } \lambda^+. \end{aligned}$$

D'où le résultat. □

3.7 Décomposition de M^μ

On souhaite décomposer M^μ , où $\mu \vdash n$, à partir des modules de Specht S^λ , où $\lambda \vdash n$. On a vu, au corollaire 3.3.9, que $M^\mu \cong \bigoplus_{\lambda \triangleright \mu} m_{\lambda\mu} S^\lambda$. Or $m_{\lambda\mu} = \dim \text{Hom}(S^\lambda, M^\mu)$. Le but de ce paragraphe est donc de déterminer $\dim \text{Hom}(S^\lambda, M^\mu)$. Nous allons donc déterminer une base de $\text{Hom}(S^\lambda, M^\mu)$. Pour cela, introduisons une nouvelle forme de tableaux.

Définition 3.7.1 (Tableau de Young généralisé). On appelle *tableau de Young généralisé de forme* λ un tableau obtenu en remplaçant les points du diagramme de Ferrers associé à λ par des entiers strictement positifs avec des répétitions possibles. Le *contenu* de T est la composition $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)$ où μ_i est égal au nombre de i dans T .

On pose $\mathcal{T}_{\lambda\mu}$ l'ensemble des T de forme λ et de contenu μ .

On utilise la notation T pour les tableaux de Young généralisés.

Illustration. Le tableau $T = \begin{array}{cc} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{array}$ est un tableau de Young généralisé de forme $(3, 2)$ et de contenu $(2, 0, 1, 2)$.

Notations :

Dans la suite, on fixe t un tableau de forme λ et de contenu (1^n) . Si T est un λ -tableau, $T(i)$ désigne l'élément de T dans la même position que i dans le tableau t .

Illustration. Prenons $t = \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{array}$ et $T = \begin{array}{cc} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{array}$. Alors $T(1) = T(3) = 4$, $T(2) = T(4) = 1$ et $T(5) = 3$.

Soit $\{s\}$ un tabloïde de forme μ . On construit le tableau $T \in \mathcal{T}_{\lambda\mu}$ en prenant $T(i)$ le numéro de la ligne dans laquelle apparaît i dans $\{s\}$.

Illustration. Prenons $\mu = (2, 2, 1)$ et $\{s\} = \begin{array}{cc} \overline{2} & \overline{3} \\ \overline{1} & \overline{5} \\ \overline{4} & \end{array}$. Ainsi, $T = \begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{array}$.

La forme $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ de $\{s\}$ devient donc le contenu de T puisque chaque élément de la ligne i fait apparaître le numéro i dans T . L'élément i est donc répété λ_i fois dans T pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$.

L'application $\theta : \{s\} \mapsto T$ est une bijection entre les bases canoniques de M^μ et $\mathbb{C}[\mathcal{T}_{\lambda\mu}]$. M^μ et $\mathbb{C}[\mathcal{T}_{\lambda\mu}]$ sont donc isomorphes en tant qu'espaces vectoriels.

Nous allons maintenant définir une action de S_n sur les tableaux de Young généralisés de sorte que $M^\mu \cong \mathbb{C}[\mathcal{T}_{\lambda\mu}]$. Si $\pi \in S_n$ et $T \in \mathbb{C}[\mathcal{T}_{\lambda\mu}]$, on définit πT comme étant le tableau tel que

$$(\pi T)(i) := T(\pi^{-1}i).$$

Illustration. $(1 \ 2 \ 4)T = \begin{array}{cc} T(4) & T(1) \\ T(2) & T(5) \end{array} \begin{array}{cc} T(3) & \end{array}$. Donc $(1 \ 2 \ 4) \begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{array} = \begin{array}{cc} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{array}$.

Proposition 3.7.2. Soit λ une partition. Les modules M^μ et $\mathbb{C}[\mathcal{T}_{\lambda\mu}]$ sont isomorphes en tant que S_n -modules.

Démonstration. $\pi \in S_n$ agit sur $\{s\}$ en remplaçant i par πi et $\pi \in S_n$ agit sur T en mettant $T(i)$ à la position $T(\pi i)$. Montrons que $\theta : \{s\} \mapsto T$ est un S_n -isomorphisme de M^μ sur $\mathbb{C}[\mathcal{T}_{\lambda\mu}]$. Soient $\{s\} \in M^\mu$ et $T \in \mathbb{C}[\mathcal{T}_{\lambda\mu}]$. Soit $\pi \in S_n$. Montrons que $\theta(\pi\{s\}) = \pi T$. $\theta(\pi\{s\})(i)$ est le numéro de la ligne dans laquelle apparaît i dans $\pi\{s\}$, c'est-à-dire le numéro de la ligne dans laquelle apparaît $\pi^{-1}i$ dans $\{s\}$, c'est-à-dire $T(\pi^{-1}i)$. Donc $\theta(\pi\{s\})(i) = (\pi T)(i)$ pour tout i . Donc θ est un S_n -isomorphisme de M^λ sur $\mathbb{C}[\mathcal{T}_{\lambda\mu}]$. D'où le résultat. \square

Les classes d'équivalence en lignes (resp. en colonnes) obtenues précédemment sont également utilisées pour les tableaux de Young généralisés. Pour un tableau de Young généralisé T , on note $\{T\}$ (resp. $[T]$) sa classe d'équivalence en lignes (resp. en colonnes). On note $\{t\}$ le tabloïde associé au tableau t donné au début de cette section.

Définition 3.7.3. Pour tout $T \in \mathcal{T}_{\lambda\mu}$, le morphisme correspondant à T est l'application $\theta_T \in \text{Hom}(M^\lambda, M^\mu)$ donnée par

$$\theta_T : \{t\} \rightarrow \sum_{S \in \{T\}} S$$

et étendue en utilisant la cyclicité de M^λ .

Cela signifie que pour tout $\pi \in S_n$,

$$\theta_T(\pi\{t\}) = \pi \sum_{S \in \{T\}} S.$$

Illustration. Prenons $T = \begin{smallmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & \end{smallmatrix}$. Alors

$$\theta_T\{t\} = \begin{smallmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & \end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & \end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & \end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & \end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & \end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & \end{smallmatrix}$$

et

$$\theta_T(1 \ 2 \ 4)\{t\} = \begin{smallmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & \end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & \end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & \end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & \end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & \end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & \end{smallmatrix}$$

On obtient alors des éléments de $\text{Hom}(S^\lambda, M^\mu)$ en considérant $\bar{\theta}_T$ la restriction de θ_T à S^λ .
Pour le tableau t fixé,

$$\bar{\theta}_T(e_t) = \bar{\theta}_T(\kappa_t\{t\}) = \kappa_t(\theta_T\{t\}) = \kappa_t\left(\sum_{S \in \{T\}} S\right).$$

Proposition 3.7.4. Soit $T \in \mathcal{T}_{\lambda\mu}$. $\kappa_t T = 0$ si et seulement si T a deux éléments égaux dans la même colonne.

Démonstration. Soit $T \in \mathcal{T}_{\lambda\mu}$.

Supposons que $\kappa_t T = 0$. On a alors $\sum_{\pi \in C_t} (\text{sign}(\pi)\pi T) = T + \sum_{\substack{\pi \in C_t \\ \pi \neq \text{Id}}} \text{sign}(\pi)\pi T = 0$. Il existe donc $\pi \in C_t$ de signature -1 tel que $T = \pi T$. La permutation $\pi \in C_t = S_{C_1} \times \dots \times S_{C_k}$ étant distincte de Id , π admet un cycle $\sigma_i = (T_{i,1}, \dots, T_{i,m}) \in C_i$ non nul. Alors $T = \sigma_i T$, donc $T_{i,1} = \dots = T_{i,m}$. Ainsi, tous les éléments correspondant à un cycle non trivial de π sont tous égaux et dans la même colonne. T admet donc au moins deux éléments égaux dans la même colonne.

Supposons que T admette deux éléments égaux dans la même colonne, disons $T(i)$ et $T(j)$. Alors $T = (i \ j)T$ donc $(\text{Id} - (i \ j))T = 0$. De plus, $(i \ j) \in C_t$ donc d'après le point 3 du lemme 3.3.3, il existe $k \in \mathbb{C}[S_n]$ tel que $\kappa_t = k(\text{Id} - (i \ j))$. Donc $\kappa_t T = 0$. \square

Définition 3.7.5 (Tableau semi-standard). Un tableau est dit *semi-standard* si ses lignes sont croissantes et si ses colonnes sont strictement croissantes. On note $\mathcal{T}_{\lambda\mu}^0$ l'ensemble de λ -tableaux semi-standards de contenu μ .

Illustration. $T = \begin{smallmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & \end{smallmatrix}$ est un tableau semi-standard tandis que $T = \begin{smallmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & \end{smallmatrix}$ et $T = \begin{smallmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & \end{smallmatrix}$ ne le sont pas.

Nous allons montrer que ces tableaux forment une base de $\text{Hom}(S^\lambda, M^\mu)$.

La preuve est similaire à celle faite pour déterminer une base de S^λ . On reprend rapidement certaines définitions et certains lemmes déjà vus pour les tableaux.

On utilise les mêmes définitions que pour les tableaux pour définir l'ordre de dominance et l'ordre de dominance sur les colonnes pour les tableaux de Young généralisés, ici les répétitions sont autorisées.

Lemme 3.7.6 (Lemme de dominance pour les tableaux de Young généralisés). Soient k et l des entiers tels que k apparaît dans une colonne à gauche de l dans T avec $k < l$. Alors

$$[T] \triangleright [S],$$

où S est le tableau obtenu en échangeant k et l dans T .

Corollaire 3.7.7. *Si T est un tableau semi-standard et $S \in \{T\}$ est différent de T alors*

$$[T] \triangleright [S].$$

Ainsi, si $[T]$ est un tableau semi-standard alors $[T]$ est la plus grande classe d'équivalence apparaissant dans $\theta_T\{t\}$.

Lemme 3.7.8. *Soit V un espace vectoriel muni d'une relation d'équivalence dont les classes sont notées $[v]$ pour tout $v \in V$. Soit $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_m)$ une base de V et v_1, \dots, v_m des éléments de V . Supposons que pour tout i , il existe $b_i \in \mathcal{B}$ apparaissant dans v_i tel que*

1. $[b_i] \triangleright [b]$ pour tout $b \neq b_i$ apparaissant dans v_i ,
2. les $[b_i]$ sont deux à deux distincts.

Alors les v_i sont linéairement indépendants.

Démonstration. La preuve est identique à celle faite en 3.4.10. □

Lemme 3.7.9. *Soient V et W des espaces vectoriels. Soient $\theta_1, \dots, \theta_m$ des applications linéaires de V dans W . S'il existe $v \in V$ tel que $(\theta_1(v), \dots, \theta_m(v))$ soit une famille libre de W alors $\theta_1, \dots, \theta_m$ sont des applications linéaires indépendantes.*

Démonstration. Supposons qu'il existe $v \in V$ tel que $(\theta_1(v), \dots, \theta_m(v))$ soit une famille libre de W . Soient c_1, \dots, c_m des éléments de \mathbb{C} tels que

$$c_1\theta_1 + \dots + c_m\theta_m = 0.$$

Alors en appliquant à v , on obtient

$$c_1\theta_1(v) + \dots + c_m\theta_m(v) = 0.$$

La famille $(\theta_1(v), \dots, \theta_m(v))$ étant libre dans W , pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, $c_i = 0$. Donc $(\theta_1, \dots, \theta_m)$ est libre. □

Commençons par montrer la liberté de la famille $\{\bar{\theta}_T, T \in \mathcal{T}_{\lambda\mu}^0\}$.

Proposition 3.7.10. *La famille $\{\bar{\theta}_T, T \in \mathcal{T}_{\lambda\mu}^0\}$ est libre dans $\text{Hom}(S^\lambda, M^\mu)$.*

Démonstration. Soit t le tableau fixé. Soient T_1, \dots, T_m l'ensemble des tableaux semi-standards de $\mathcal{T}_{\lambda\mu}$. Pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$,

$$\bar{\theta}_{T_i}(e_t) = \theta(\kappa_t\{t\}) = \kappa_t\theta_{T_i}\{t\}.$$

Pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, T_i est semi-standard donc $[T_i] \triangleright [S]$ pour tout S apparaissant dans $\theta_{T_i}\{t\}$, d'après le corollaire 3.7.7. Soit S apparaissant dans $\kappa_t\theta_{T_i}\{t\}$. Alors il existe S_i apparaissant dans $\theta_{T_i}\{t\}$ tel que $S = \kappa_t S_i$. Comme $[T_i] \triangleright [S_i]$ et les permutations apparaissant dans κ_t ne modifiant pas les classes d'équivalence en colonnes, on a $[T_i] \triangleright [S]$. Donc pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, T_i apparaît dans $\bar{\theta}_{T_i}e_t$, et $[T_i] \triangleright [S]$ pour tout $S \neq T_i$ apparaissant dans $\bar{\theta}_{T_i}e_t$. Une classe d'équivalence contient au maximum un seul tableau standard, donc les $[T_i]$ sont deux à deux distincts.

Donc, d'après le lemme 3.7.8, les $\bar{\theta}_{T_i}e_t$ sont linéairement indépendants dans M^μ . Les $\bar{\theta}_{T_i}$ étant des applications linéaires de S^λ dans M^μ , d'après le lemme 3.7.9, $\{\bar{\theta}_T, T \in \mathcal{T}_{\lambda\mu}^0\}$ est une famille libre de $\text{Hom}(S^\lambda, M^\mu)$. □

Il reste à présent à prouver le caractère générateur de la famille $\{\bar{\theta}_T, T \in \mathcal{T}_{\lambda\mu}^0\}$. La preuve utilisera le lemme suivant.

Lemme 3.7.11. Soit $\theta \in \text{Hom}(S^\lambda, M^\mu)$. $\theta(e_t)$ se décompose sous la forme

$$\theta(e_t) = \sum_{T \in \mathcal{T}_{\lambda\mu}^0} c_T T,$$

en utilisant l'écriture de la proposition 3.7.2, où t est le tableau fixé de forme λ .

1. Si $\pi \in C_t$ et $T_1 = \pi T_2$ alors $c_{T_1} = \text{sign}(\pi)c_{T_2}$.
2. Tout tableau T possédant au moins deux éléments égaux dans une même colonne vérifie $c_T = 0$.
3. Si l'application θ est non nulle, alors il existe un tableau semi-standard T_0 tel que $c_{T_0} \neq 0$.

Démonstration. 1. Soit $\pi \in C_t$ et $T_1 = \pi T_2$. θ étant un S_n -isomorphisme,

$$\pi(\theta(e_t)) = \theta(\pi\kappa_t\{t\}) = \theta((\text{sign}(\pi))\kappa_t\{t\}) = \text{sign}(\pi)\theta(e_t).$$

Or,

$$\begin{aligned} \pi(\theta(e_t)) &= \pi\left(c_{T_1}T_1 + c_{T_2}T_2 + \sum_{T \neq T_1, T_2} c_T T\right) \\ &= c_{T_1}\pi T_1 + c_{T_2}\pi T_2 + \sum_{T \neq T_1, T_2} c_T \pi T \\ &= c_{T_1}\pi T_1 + c_{T_2}T_1 + \sum_{T \neq T_1, T_2} c_T \pi T \end{aligned}$$

et

$$\text{sign}(\pi)\theta(e_t) = \text{sign}(\pi)c_{T_1}T_1 + \text{sign}(\pi)c_{T_2}T_2 + \sum_{T \neq T_1, T_2} \text{sign}(\pi)c_T T.$$

Comme $\pi T_2 = T_1$, pour tout $T \in \mathcal{T}_{\lambda\mu}^0$ distinct de T_2 , $\pi T \neq T_1$. Donc par unicité de l'écriture, $c_{T_2} = \text{sign}(\pi)c_{T_1}$. D'où $c_{T_1} = \text{sign}(\pi)c_{T_2}$.

2. Supposons que T admette deux éléments égaux dans une même colonne, disons aux lignes i et j . Alors $(i \ j) \in C_t$ et $(i \ j)T = T$. Donc, d'après le point 1, $c_T = -c_T$, c'est-à-dire $c_T = 0$.
3. Supposons que θ soit non nulle. Parmi les T apparaissant dans la décomposition de θ , il existe T_0 tel que $[T_0]$ soit maximal et $c_{T_0} \neq 0$. Montrons que T_0 peut être pris sous la forme semi-standard.

c_{T_0} est non nul donc chaque colonne de T_0 est constituée d'éléments distincts. Quitte à permuter les colonnes de T_0 (ce qui modifie juste éventuellement le signe de c_{T_0}), on peut supposer que les colonnes de T_0 sont strictement croissantes.

Supposons que T_0 possède une descente à la ligne i . T_0 a donc deux colonnes successives de la forme

$$\begin{array}{c} b_1 \\ \wedge \\ b_2 \\ \wedge \\ \vdots \\ \wedge \\ a_i > b_i \\ \wedge \\ \vdots \\ \wedge \\ a_p \end{array}$$

Prenons $A = \{a_i, \dots, a_p\}$, $B = \{b_1, \dots, b_i\}$ et $g_{A,B} = \sum_{\pi} (\text{sign } \pi)\pi$, l'élément de Garnir associé. T_0 apparaît dans $g_{A,B}T_0$ avec le coefficient 1 puisque les toutes les permutations distinctes de l'identité intervenant dans $g_{A,B}$ échangent des éléments distincts a_i et b_j de T_0 . θ étant un morphisme et d'après la proposition 3.4.15 (t et T_0 étant de même forme λ), on a

$$g_{A,B} \left(\sum_T c_T T \right) = g_{A,B}(\theta e_t) = \theta(g_{A,B}e_t) = \theta(0) = 0.$$

Donc $\sum_{T \in \mathcal{T}_{\lambda\mu}^0} g_{A,B}c_T T = 0$. Il existe donc $T \in \mathcal{T}_{\lambda\mu}^0$ tel que $c_T \neq 0$ afin de pouvoir annuler T_0 apparaissant dans $g_{A,B}T_0$.

Il existe donc une permutation π intervenant dans $g_{A,B}$ telle que $T_0 = \pi T$. T est donc le même tableau que T_0 où certains éléments a_i et b_j ont été échangés. Donc, d'après le lemme de dominance pour les tableaux généralisés, $[T] \triangleright [T_2]$, contredisant la maximalité de T_0 . \square

Proposition 3.7.12. $\{\bar{\theta}_T, T \in \mathcal{T}_{\lambda\mu}^0\}$ est une famille génératrice de $\text{Hom}(S^\lambda, M^\mu)$.

Démonstration. Soit $\theta \in \text{Hom}(S^\lambda, M^\mu)$. On décompose $\theta(e_t)$ sous la forme $\theta(e_t) = \sum_T c_T T$. Soit $L_\theta = \{S \in \mathcal{T}_{\lambda\mu}^0, [S] \trianglelefteq [T] \text{ pour un } T \text{ au moins apparaissant dans } \theta(e_t)\}$. Posons $d = \dim L_\theta$. Pour tout $d \in \mathbb{N}$, on note H_d l'hypothèse de récurrence suivante : θ est dans l'espace engendré par $\{\bar{\theta}_T, T \in \mathcal{T}_{\lambda\mu}^0\}$.

- Si $d=0$ alors, d'après le lemme 3.7.11, θ est l'application nulle. D'où H_0 .

- Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On suppose H_{d-1} , montrons H_d . D'après le lemme 3.7.11, il existe un tableau semi-standard T_2 tel que c_{T_2} est non nul. On peut supposer de plus, d'après le point 3 de la preuve de 3.7.11 que $[T_2]$ est maximal parmi les tableaux apparaissant dans $\theta(e_t)$. Soit $\theta_2 = \theta - c_{T_2}\bar{\theta}_{T_2}$. D'après le corollaire 3.7.7, pour tout S apparaissant dans $\theta_{T_2}\{t\}$, $[T_2] \triangleright [S]$. κ_t ne modifiant pas les classes d'équivalence en colonnes, pour tout S apparaissant dans $\theta(e_t) = \kappa_t\theta\{t\}$, $[T_2] \triangleright [S]$. Montrons que $L_{\theta_2} \subseteq L_\theta$. Soit $v \in L_{\theta_2}$. Il existe S apparaissant dans $\theta_2 e_t = \theta - c_{T_2}\bar{\theta}_{T_2}$ tel que $[v] \trianglelefteq [S]$.

- Si S apparaît dans $\theta(e_t)$ alors $v \in L_\theta$.

- Sinon, S apparaît nécessairement dans $\bar{\theta}_{T_2}$. Alors $[S] \trianglelefteq [T_2]$. Or $[T_2]$ apparaît dans θe_t et $[v] \trianglelefteq [S] \trianglelefteq [T_2]$. Donc $v \in L_\theta$.

Pour tout S tel que $[S] = [T_2]$, il existe $\pi \in C_t$ tel que $S = \pi T_2$. Donc, d'après le point 1 du lemme 3.7.11, S apparaît avec le même coefficient dans $\theta(e_t)$ et $c_{T_2}\bar{\theta}_{T_2}$. Donc $T_2 \notin L_{\theta_2}$ puisque $[T_2]$ est maximal. Donc d'après H_{d-1} , θ_2 est dans l'espace engendré par les $\bar{\theta}_T$. Donc $\theta = \theta_2 + c_{T_2}\bar{\theta}_{T_2}$ aussi. D'où H_d .

D'où le résultat. \square

Nous obtenons donc le résultat suivant :

Théorème 3.7.13. La famille $\{\bar{\theta}_T, T \in \mathcal{T}_{\lambda\mu}^0\}$ est une base de $\text{Hom}(S^\lambda, M^\mu)$.

Ainsi, nous pouvons calculer la dimension de $\text{Hom}(S^\lambda, M^\mu)$ en comptant le nombre de λ -tableaux semi-standards de contenu μ , encore appelé nombre de Kostka.

Définition 3.7.14 (Nombre de Kostka). Les *nombre de Kostka* sont donnés par

$$K_{\lambda\mu} = |\mathcal{T}_{\lambda\mu}^0|.$$

Ces nombres sont utilisés dans la décomposition en représentations irréductibles. Plus précisément :

Théorème 3.7.15 (Règle de Young). La multiplicité de S^λ dans M^μ est égale au nombre de tableaux semi-standards de forme λ et de contenu μ , soit

$$M^\mu \cong \bigoplus_{\lambda \triangleright \mu} K_{\lambda\mu} S^\lambda.$$

Démonstration. D'après le corollaire 3.3.9, $M^\mu \cong \bigoplus_{\lambda \supseteq \mu} m_{\lambda\mu} S^\lambda$. Or $m_{\lambda\mu} = \dim \text{Hom}(S^\lambda, M^\mu)$. Donc, d'après le théorème 3.7.13, on a le résultat. \square

Nous pouvons ainsi connaître la décomposition des M^μ .

Illustration. On se place dans le groupe S_5 . Prenons $M^{(2,2,1)}$. Alors

$$M^{(2,2,1)} \cong \bigoplus_{\lambda \supseteq (2,2,1)} K_{\lambda(2,2,1)} S^\lambda.$$

Or $\lambda \supseteq (2, 2, 1)$ si et seulement si $\lambda \in \{(2, 2, 1), (3, 1, 1), (3, 2), (4, 1), (5)\}$. On a

$$T_{(2,2,1)(2,2,1)}^0 = \left\{ \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & \end{array} \right\} \text{ et } K_{(2,2,1)(2,2,1)} = 1,$$

$$T_{(3,1,1)(2,2,1)}^0 = \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 2 \\ 2 & & \\ 3 & & \end{array} \right\} \text{ et } K_{(3,1,1)(2,2,1)} = 1,$$

$$T_{(3,2)(2,2,1)}^0 = \left\{ \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & & 2 & 2 & \end{array} \right\} \text{ et } K_{(3,2)(2,2,1)} = 2,$$

$$T_{(4,1)(2,2,1)}^0 = \left\{ \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & & & & 2 & & & \end{array} \right\} \text{ et } K_{(4,1)(2,2,1)} = 2,$$

$$T_{(5)(2,2,1)}^0 = \{ 1 \ 1 \ 2 \ 2 \ 3 \} \text{ et } K_{(5)(2,2,1)} = 1.$$

D'où,

$$M^{(2,2,1)} \cong S^{(2,2,1)} \oplus S^{(3,1,1)} \oplus 2S^{(3,2)} \oplus 2S^{(4,1)} \oplus S^{(5)}.$$

Ainsi, on peut connaître à isomorphisme près la décomposition de toute représentation de S_n par l'intermédiaire des nombres de Kostka.

4 Conclusion

Ce stage m'a permis d'acquérir de nouvelles connaissances mathématiques, notamment sur les représentations des groupes mais également de découvrir de nouvelles applications du groupe symétrique. Ce premier travail bibliographique a été l'occasion de travailler davantage en autonomie sur des concepts mathématiques qui m'étaient inconnus.

Je tiens à remercier mon maître de stage, Eric Rannou, pour ses réponses à mes questions, ses conseils et son aide tout au long de mon stage.

Références

- [Cal] Josette CALAIS. *Éléments de théorie des groupes*. Puf , 2014.
- [Sag] Bruce E. SAGAN. *The Symetric Group. Representations, Combinatorial Algorithms, and Symetric Functiions*. Springer, Second Edition, 2001.
- [Ful] William FULTON. *Young Tableaux*. London Mathematical Society Student Texts 35, Cambridge University Press , 1997.