

UNIVERSITÉ DE RENNES 1 - ENS RENNES

RAPPORT DE STAGE

# Cohomologie de De Rham et classes de Chern

*Harold Favereau*

encadré par Daniel Naie,  
au Laboratoire Angevin de REcherche en MATHématiques

28 août 2017

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Résultats sur les variétés différentielles</b>	<b>2</b>
1.1	Définition et exemples . . . . .	2
1.2	Partition de l'unité . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Formes différentielles et formule de Stokes</b>	<b>4</b>
2.1	Formes différentielles sur $\mathbb{R}^n$ . . . . .	4
2.2	Le foncteur $\Omega^*$ . . . . .	7
2.3	Formes différentielles et foncteur $\Omega^*$ sur les variétés . . . . .	7
2.4	Intégration des formes différentielles et théorème de Stokes . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Quelques résultats sur les complexes différentiels</b>	<b>10</b>
<b>4</b>	<b>Cohomologie de De Rham</b>	<b>11</b>
4.1	Définition et premier exemple . . . . .	11
4.2	Cohomologie et intégration . . . . .	12
4.3	Suite de Mayer-Vietoris . . . . .	12
4.4	Suite de Mayer-Vietoris à support compact . . . . .	14
4.5	Lemmes de Poincaré . . . . .	15
4.5.1	Cohomologie de De Rham à support quelconque . . . . .	15
4.5.2	Cohomologie de De Rham à support compact . . . . .	18
4.5.3	Cohomologie du ruban de Möbius . . . . .	18
4.6	Théorème de Sard . . . . .	20
<b>5</b>	<b>Argument de Mayer-Vietoris et conséquences</b>	<b>21</b>
5.1	Bon recouvrement . . . . .	21
5.2	Dimension finie de la cohomologie de De Rham . . . . .	21
5.3	Dualité de Poincaré . . . . .	21
5.4	Dual de Poincaré d'une sous-variété . . . . .	23
<b>6</b>	<b>Cohomologie de De Rham et fibrés vectoriels</b>	<b>24</b>
6.1	Fibrés, formule de Künneth et théorème de Leray-Hirsch . . . . .	24
6.2	Propriétés des fibrés vectoriels . . . . .	26
6.3	Cohomologie d'un fibré vectoriel . . . . .	27
6.4	Cohomologie à support compact sur la fibre . . . . .	28
6.4.1	Isomorphisme de Thom . . . . .	28
6.4.2	Classe de Thom . . . . .	30
6.4.3	Classe de Thom et dualité de Poincaré . . . . .	31
6.5	Forme angulaire globale, classe d'Euler et classe de Thom . . . . .	33
6.6	Caractéristique d'Euler et classe d'Euler . . . . .	36
<b>7</b>	<b>Classes de Chern</b>	<b>38</b>
7.1	La première classe de Chern d'un fibré complexe en droites . . . . .	38
7.2	Projectivisé d'un fibré vectoriel et classes de Chern . . . . .	38
7.3	Principe de partition et formule de Whitney . . . . .	40
7.4	Formule du genre et classes de Chern . . . . .	42

## Liste des figures

1	Projection stéréographique . . . . .	2
2	Tore . . . . .	3
3	Recouvrement ouvert du cercle $S^1$ . . . . .	13
4	Ruban de Möbius . . . . .	19
5	Voisinage tubulaire du cercle inclus dans le plan privé d'un point . . . . .	31
6	Projection dans $\mathbb{P}^2$ . . . . .	42

# Introduction

Dans ce rapport, nous introduisons la théorie de la cohomologie de De Rham, qui associe naturellement à une variété différentielle des espaces vectoriels réels. La cohomologie d'une variété formera un *invariant* de variété différentielle : deux variétés difféomorphes ont la même cohomologie de De Rham. Nous développerons des outils théoriques et pratiques puissants afin de calculer la cohomologie de différentes variétés ; entre autre, la suite de Mayer-Vietoris.

Dans une seconde partie, nous nous intéresserons plus particulièrement aux fibrés vectoriels réels et complexes : des variétés spécifiques qui, intuitivement, sont des variétés auxquelles on a "collé" des espaces vectoriels en chaque point, mais qui ne ressemble pas forcément à un produit globalement. Nous présenterons d'abord plusieurs résultats sur le lien entre leurs cohomologies et celle de leurs bases. Mais la cohomologie de De Rham permet aussi de construire les classes caractéristiques d'un fibré - ici, les classes de Chern - un invariant puissant, permettant de mesurer le défaut d'un fibré vectoriel à être trivial. En particulier, nous utiliserons les classes de Chern pour démontrer la formule du genre, qui montre un lien entre le degré d'une courbe polynômiale et sa topologie.

## 1 Résultats sur les variétés différentielles

Dans cette partie, nous définissons les variétés différentielles et présentons plusieurs résultats les concernant dont nous aurons besoin par la suite lors du développement de la théorie de la cohomologie de De Rham.

### 1.1 Définition et exemples

#### Définition 1.1 (Variété différentielle)

Soit  $M$  un espace topologique séparé et à base dénombrable.  $M$  est une variété différentielle de dimension  $n$  s'il existe un atlas sur  $M$ , c'est à dire un recouvrement ouvert  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  de  $M$  tel que pour tout  $\alpha \in A$ , il existe un homéomorphisme  $\phi_\alpha : U_\alpha \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$  (appelé carte), et tel que les fonctions de transitions :

$$g_{\alpha\beta} = \phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

soient des difféomorphismes entre deux ouverts de  $\mathbb{R}^n$ .

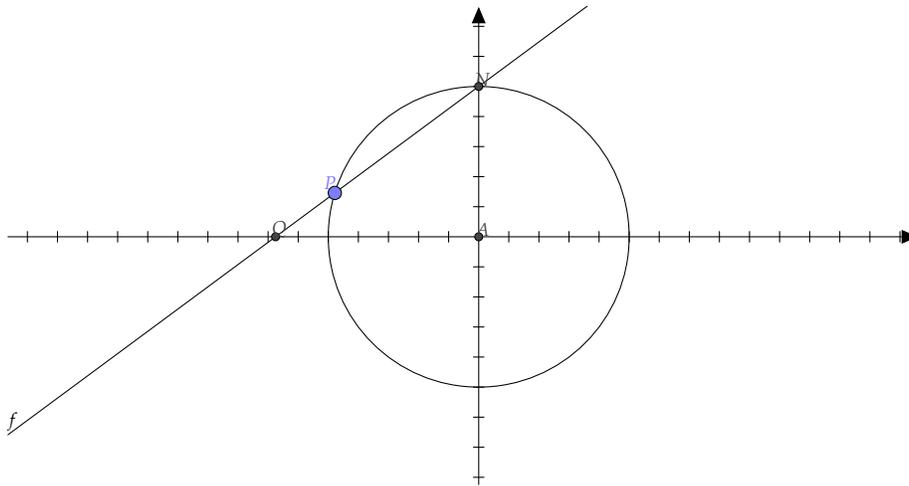
*Remarque 1.* La régularité d'un atlas est défini comme le plus petit  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  tel que toutes les fonctions de transition soient de classe  $C^k$ . Par la suite, nous supposerons que toutes nos fonctions de transition sont de classe  $C^\infty$  : on dit aussi que la variété est lisse.

On donne désormais quelques exemples de variétés différentielles, dont la plupart reviendront plusieurs fois par la suite :

- Les  $\mathbb{R}^n$  eux-mêmes, pour l'atlas évident  $\{\mathbb{R}^n\}$  dont la carte est l'identité.
- Par le même argument, n'importe quel ouvert  $U$  inclus dans un certain  $\mathbb{R}^n$  est une variété différentielle. En particulier,  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  reviendra souvent.
- Le cercle  $S^1$ . Premier exemple de variété qui ne se réalise pas comme un ouvert d'un certain  $\mathbb{R}^n$ . On choisit comme recouvrement ouvert  $U_1$  le cercle entier privé du point  $N := (0, 1)$  (appelé nord) et  $U_2$  le cercle entier privé du point  $S := (0, -1)$  (appelé sud). L'application carte est alors donné par la projection stéréographique : à un point  $P$  du cercle différent de  $N$ , on associe le point d'intersection entre la droite passant par  $N$  et  $P$  et l'axe  $y = 0$  (voir figure). Idem pour le sud. On peut alors vérifier que la fonction de transition  $g_{12}$  définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  vaut :

$$g_{12}(t) = \frac{1}{t}$$

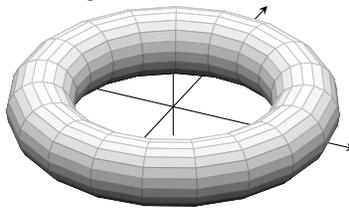
Figure 1 – Projection stéréographique



De la même manière, les sphères  $S^n$  sont des variétés différentielles, toujours via la projection stéréographique en dimension supérieure.

- le tore  $S^1 \times S^1$ . Le tore a plusieurs définitions, qui donnent lieu à des variétés toutes difféomorphes entre elles (on définit par la suite la notion de difféomorphisme entre variétés) : c'est le produit du cercle par lui-même, ou bien le quotient de  $\mathbb{R}^2$  par les translations entières, ou encore un "donut" inclus dans  $\mathbb{R}^3$ .

Figure 2 – Tore



- L'espace projectif complexe  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$  noté  $\mathbb{P}^n$ . On rappelle sa construction et on explicite sa structure de variété différentielle.  $\mathbb{P}^n$  est l'espace  $\mathbb{C}^{n+1}$  quotienté par la relation de colinéarité. On note les points de  $\mathbb{P}^n$   $[x_0 : \dots : x_n]$ , et pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $[x_0 : \dots : x_n]$  et  $[\lambda x_0 : \dots : \lambda x_n]$  désignent le même point. On définit alors, pour  $k \in \{0, \dots, n\}$ ,  $U_k = \{[x_0 : \dots : x_n] : x_k \neq 0\}$ .  $U_k$  est homéomorphe à  $\mathbb{C}^n$  via

$$\phi_k : U_k \rightarrow \mathbb{C}^n, [x_0 : \dots : x_n] \mapsto \left( \frac{x_0}{x_k}, \dots, \hat{x}_k, \dots, \frac{x_n}{x_k} \right).$$

Muni de cet atlas, c'est une variété différentielle : les fonctions de transitions sont données par ( $k > j$ )

$$g_{k,j} : \mathbb{C}^n \setminus \{z_j = 0\} \rightarrow \mathbb{C}^n \setminus \{z_k = 0\}, (z_1, \dots, z_n) \mapsto \left( \frac{z_1}{z_j}, \dots, \hat{z}_j, \dots, \frac{1}{z_j}, \dots, \frac{z_n}{z_j} \right)$$

avec  $\frac{1}{z_j}$  en position  $k$ . En tant que variété différentielle réelle,  $\mathbb{P}^n$  est de dimension  $2n$ .

On peut montrer que  $\mathbb{P}^1$  est difféomorphe à  $S^2$ .

### Définition 1.2

Une application  $f : M \rightarrow N$  entre deux variétés est lisse si pour tout  $m \in M$ , il existe une carte  $(U, \phi)$  avec  $U$  contenant  $m$ , une carte  $(V, \psi)$  avec  $V$  contenant  $f(m)$  telles que

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(f^{-1}(V) \cap U) \longrightarrow \psi(V)$$

est de classe  $C^\infty$  entre deux ouverts d'espaces euclidiens. La définition est cohérente du fait que les fonctions de transitions sont elles-aussi différentiables.

Deux variétés  $M$  et  $N$  sont dites difféomorphes s'il existe une bijection de classe  $C^\infty$  de  $M$  dans  $N$  telle que la réciproque soit elle aussi de classe  $C^\infty$ .

Désormais, lorsque nous parlerons d'applications entre variétés, sauf mention contraire, nous supposons ces applications lisses.

## 1.2 Partition de l'unité

On introduit ici les partitions de l'unité, outil indispensable par la suite pour montrer de nombreux résultats (dont l'exactitude de la suite de Mayer-Vietoris).

### Définition 1.3 (Partition de l'unité)

Soit  $M$  une variété différentielle. Une partition de l'unité sur  $M$  est une famille  $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in I}$  de fonctions lisses à valeurs dans  $\mathbb{R}$  telles que :

- tout point  $x \in M$  admet un voisinage dans lequel  $\sum_\alpha \rho_\alpha$  est une somme finie
- pour tout  $x \in M$ ,  $\sum_\alpha \rho_\alpha(x) = 1$ .

On définit aussi le support d'une fonction sur une variété, concept lié aux partitions de l'unité :

### Définition 1.4 (Support d'une fonction)

Soit  $f$  une fonction sur une variété  $M$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Le support de  $f$  est le plus petit fermé sur lequel  $f$  ne s'annule pas, c'est à dire

$$\text{supp } f = \overline{\{x \in M : f(x) \neq 0\}}.$$

Nous avons alors besoin d'un résultat qui nous donne l'existence de telles partitions de l'unité. Un tel résultat existe : il donne deux types de partitions différents.

### Théorème 1.5

Soit  $M$  une variété différentielle,  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  un recouvrement ouvert de  $M$ . Alors

1. Il existe une partition de l'unité  $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in A}$  tel que le support de  $\rho_\alpha$  soit inclus dans  $U_\alpha$  pour tout  $\alpha$ . Une telle partition est dite partition de l'unité relative au recouvrement  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ .
2. Il existe une partition de l'unité  $\{\rho_\beta\}_{\beta \in B}$  tel que le support de  $\rho_\beta$  soit compact pour tout  $\beta$ , et tel qu'il existe un  $\alpha \in A$  tel que  $\text{supp } \rho_\beta$  soit inclus dans  $U_\alpha$ .

**Démonstration :** Voir WARNER 1971 ■

*Remarque 2.* On ne peut espérer combiner les deux résultats en une seule partition de l'unité : considérons le recouvrement de  $\mathbb{R}$  par  $\mathbb{R}$ . La fonction constante égale à 1 correspond à la partition donnée par la partie 1 de la proposition. Cependant, on voit qu'il est impossible de trouver une unique fonction  $\rho$  à support compact dans  $\mathbb{R}$  qui vaudrait 1 partout. La proposition 2 donnera par exemple une partition  $\{\rho_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  où chaque  $\rho_n$  sera à support dans  $]n - \frac{1}{2}, n + 1 + \frac{1}{2}[$ .

## 2 Formes différentielles et formule de Stokes

Habituellement, en géométrie différentielle, les formes différentielles sur une variété  $M$  sont introduites comme étant les sections d'un certain fibré vectoriel sur  $M$  (plus précisément, une  $n$ -forme est une section du fibré des  $n$ -formes multilinéaires alternées sur  $M$ ), mais nous n'adopterons pas ce point de vue ici, pour deux raisons principalement. Nous ne souhaitons tout d'abord par introduire les fibrés vectoriels sur une variété avant d'avoir introduit la cohomologie de De Rham, et ensuite, le point de vue que nous allons adopter par la suite suffit amplement dans notre traitement des formes différentielles.

### 2.1 Formes différentielles sur $\mathbb{R}^n$

Soient  $x_1, \dots, x_n$  les coordonnées usuelles sur  $\mathbb{R}^n$ . On définit  $\Omega^*$  comme étant l'algèbre sur  $\mathbb{R}$  engendrée par les éléments  $dx_1, \dots, dx_n$  soumis aux relations :

$$\begin{cases} (dx_i)^2 = 0 \\ dx_i dx_j = -dx_j dx_i, i \neq j. \end{cases}$$

En tant que  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel,  $\Omega^*$  a pour base :

$$1, dx_1, \dots, dx_n, dx_1 dx_2, dx_1 dx_3, \dots, dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

Par exemple, sur  $\mathbb{R}^3$ ,  $\Omega^*$  a pour base

$$1, dx_1, dx_2, dx_3, dx_1 dx_2, dx_1 dx_3, dx_2 dx_3, dx_1 dx_2 dx_3.$$

Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Les formes différentielles  $C^\infty$  sur  $U$  sont les éléments de

$$\Omega^*(U) = \{\text{fonctions } C^\infty \text{ sur } U\} \otimes_{\mathbb{R}} \Omega^*.$$

Ainsi, une forme  $\omega \in \Omega^*(U)$  s'écrit de manière unique sous la forme

$$\omega = \sum f_{i_1 \dots i_q} dx_{i_1} \dots dx_{i_q}.$$

où les coefficients  $f_{i_1 \dots i_q}$  sont des fonctions  $C^\infty$  de  $U$  dans  $\mathbb{R}$ . Pour simplifier les écritures, on écrira aussi  $\omega = \sum f_I dx_I$ . On constate immédiatement que pour  $U \subset \mathbb{R}^n$ ,  $m > n$ ,  $\Omega^m(U) = 0$ .

On note  $\Omega^q(U)$  les  $q$ -formes sur  $U$ . Si  $\omega$  appartient à  $\Omega^q(U)$ , on dit que  $\omega$  est de degré  $q$ , et l'on écrit  $\deg(\omega) = q$ .  $\Omega^0(U)$  est exactement l'espace des fonctions  $C^\infty$  de  $U$  dans  $\mathbb{R}$ .

On dispose d'un opérateur différentiel  $d : \Omega^q(U) \rightarrow \Omega^{q+1}(M)$  défini ainsi :

**Définition 2.1 (Différentielle extérieure)**

On pose  $d$  et on appelle différentielle extérieure l'application linéaire définie de la manière suivante :

1. si  $f \in \Omega^0(U)$ , alors  $df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$  (la différentielle classique sur les fonctions)
2. si  $\omega = \sum f_I dx_I$  alors  $d\omega = \sum df_I dx_I$ .

**Exemple 1.** Si  $\omega = (x^2 + y^2)dx + \exp(xy)dy$ , on a

$$\begin{aligned} d\omega &= (2xdx + 2ydy)dx + (y \exp(xy)dx + x \exp(xy)dy)dy \\ &= -2ydx dy + y \exp(xy) dx dy \\ &= (y \exp(xy) - 2y) dx dy. \end{aligned}$$

On définit une autre opération sur les formes différentielles : le produit extérieur

**Définition 2.2 (Produit extérieur)**

Le produit extérieur de deux formes  $\tau = \sum f_I dx_I \in \Omega^k(U), \omega = \sum f_J dx_J \in \Omega^q(U)$  est une forme différentielle de  $\Omega^{k+q}(U)$ , que l'on écrit  $\tau \wedge \omega$  ou  $\tau \cdot \omega$ , et définie par :

$$\tau \wedge \omega = \sum f_I g_J dx_I dx_J.$$

**Proposition 2.3**

$$\tau \wedge \omega = (-1)^{\deg \tau \deg \omega} \omega \wedge \tau.$$

**Démonstration:** On a

$$\tau \wedge \omega = \sum f_I g_J dx_I dx_J \quad \omega \wedge \tau = \sum g_J f_I dx_J dx_I.$$

On a  $f_I g_J = g_J f_I$  donc il suffit de vérifier  $dx_I dx_J = (-1)^{\deg \tau \deg \omega} dx_J dx_I$ . Posons

$$dx_I = dx_{i_1} \dots dx_{i_k} \quad dx_J = dx_{j_1} \dots dx_{j_q}$$

de telle manière que

$$dx_I dx_J = dx_{i_1} \dots dx_{i_k} dx_{j_1} \dots dx_{j_q}.$$

En intervertissant  $dx_{i_k}$  et  $dx_{j_1}$ , on multiplie par  $(-1)$ . En répétant l'opération jusqu'à "déplacer"  $dx_{i_k}$  jusqu'à la fin, on a multiplié par  $(-1)^{\deg \omega}$ . En répétant l'opération pour chaque variable  $dx_{i_i}$ , on multiplie par  $(-1)^{\deg \omega}$  exactement  $\deg \tau$  fois : on a multiplié par  $(-1)^{\deg \tau \deg \omega}$ , d'où le résultat. ■

On constate aussi par les définitions que le produit extérieur est distributif par rapport à l'addition : dit autrement, le produit extérieur est une application bilinéaire

$$\cdot \wedge \cdot : \Omega^k(U) \times \Omega^q(U) \rightarrow \Omega^{k+q}(U).$$

$\Omega^*(U)$  est donc munie d'une structure d'algèbre graduée via le produit extérieur :

$$\Omega^*(U) = \bigoplus_{q=0}^n \Omega^q(U)$$

Voyons désormais quel lien peut-on faire entre dérivée extérieure et produit extérieur.

**Proposition 2.4**

$d$  est une antiderivation, c'est à dire

$$d(\tau \wedge \omega) = (d\tau) \wedge \omega + (-1)^{\deg \tau} \tau \wedge (d\omega)$$

**Démonstration :** Par linéarité, il suffit de montrer la proposition pour  $\tau$  et  $\omega$  des monômes. On pose donc  $\tau = f_I dx_I$  et  $\omega = dx_J$ . Alors

$$\begin{aligned} d(\tau \wedge \omega) &= d(f_I g_J) dx_I dx_J \\ &= (df_I) g_J dx_I dx_J + f_I (dg_J) dx_I dx_J \text{ règle de différentiation d'un produit de fonctions.} \\ &= (d\tau) \wedge \omega + (-1)^{\deg \tau} \tau \wedge (d\omega). \end{aligned}$$

où le dernière égalité vient d'un raisonnement du même type que dans la proposition 2.3 ■

*Remarque 3.* Soit  $f$  une fonction.  $f \wedge dx_I = f dx_I$ , ce qui justifie notre notation préalable.

On démontre enfin la propriété fondamentale de la dérivée extérieure sur laquelle repose la cohomologie de De Rham :

**Proposition 2.5**

$$d^2 = 0$$

**Démonstration :** Montrons ce résultat tout d'abord pour les fonctions, où la démonstration repose sur le théorème de Schwarz :

$$\begin{aligned} d^2 f &= d \left( \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \right) \\ &= \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} dx_j dx_i \\ &= \sum_{i < j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} dx_j dx_i + \sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i} dx_i dx_i + \sum_{i > j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} dx_j dx_i \end{aligned}$$

Le terme du milieu est nul car  $(dx_i)^2 = 0$ . Le premier terme est égal à l'opposé du troisième car, par théorème de Schwarz,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

et  $dx_i dx_j = -dx_j dx_i$ . Pour une forme quelconque  $\omega = f_I dx_I$  :

$$d^2 \omega = d^2(f_I dx_I) = d(df_I dx_I) = 0.$$

par le calcul précédent et la propriété d'antiderivation. ■

Les formes  $\omega$  telles que  $d\omega = 0$  sont appelées formes fermées, celles telles qu'il existe  $\alpha$  telle que  $d\alpha = \omega$  sont appelées formes exactes. Le résultat précédent se réinterprète alors de la manière suivante : les formes exactes sont toujours fermées.

*Remarque 4.* Reprenons la définition des formes différentielles sur un ouvert  $U \subset \mathbb{R}^n$ . Elles sont de la forme  $\omega = \sum f_I dx_I$ . Si on se limite aux formes où les  $f_I$  sont à support compact, on définit un nouvel espace  $\Omega_c^*(U)$ . La dérivée extérieure et le produit extérieur sont stables sur les formes différentielles à support compact : c'est une sous-algèbre graduée différentielle.

## 2.2 Le foncteur $\Omega^*$

Posons  $x_1, \dots, x_m$  et  $y_1, \dots, y_n$  les coordonnées habituelles sur  $\mathbb{R}^m$  et  $\mathbb{R}^n$ . Une application lisse  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  induit naturellement une application image réciproque (linéaire) qui à une fonction lisse de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$  associe une application lisse de  $\mathbb{R}^m$  dans  $\mathbb{R}$  :

$$f^* : \begin{cases} \Omega^0(\mathbb{R}^n) \rightarrow \Omega^0(\mathbb{R}^m) \\ g \mapsto f^*(g) = g \circ f \end{cases}$$

On souhaite étendre cette application  $f^*$  à toutes les formes différentielles sur  $\mathbb{R}^n$ , de telle manière que  $f^*$  soit un morphisme d'algèbre graduées et commute avec  $d$ , la différentielle extérieure. Cette dernière propriété définit  $f^*$  de manière unique :

$$\begin{aligned} f^* \left( \sum g_I dy_{i_1} \dots dy_{i_q} \right) &= \sum (g_I \circ f) d(y_{i_1} \circ f) \dots d(y_{i_q} \circ f) \\ &= \sum (g_I \circ f) df_{i_1} \dots df_{i_q} \end{aligned}$$

où  $f_i = y_i \circ f$  est la  $i$ ème composante de la fonction  $f$ . Montrons alors que définie ainsi,  $f^*$  et  $d$  commutent.

### Proposition 2.6

$f^*$  et  $d$  commutent.

**Démonstration :** Calculons  $d \circ f^*$  et  $f^* \circ d$ . Par linéarité, il suffit de le faire pour les monômes :

$$df^*(g_I dy_{i_1} \dots dy_{i_q}) = d \left( (g_I \circ f) df_{i_1} \dots df_{i_q} \right) = d(g_I \circ f) df_{i_1} \dots df_{i_q}$$

où la dernière égalité vient de la propriété d'antidérivation de  $d$ .

$$\begin{aligned} f^* d(g_I dy_{i_1} \dots dy_{i_q}) &= f^* \left( \sum_i \frac{\partial g_I}{\partial y_i} dy_i dy_{i_1} \dots dy_{i_q} \right) \quad (\text{par définition de } d) \\ &= \left( \left( \sum_i \frac{\partial g_I}{\partial y_i} \circ f \right) df_i \right) df_{i_1} \dots df_{i_q} \quad (\text{par définition de } f^*) \\ &= d(g_I \circ f) df_{i_1} \dots df_{i_q} \end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

*Remarque 5* (la différentielle ne dépend pas du système de coordonnées). Soient  $x_1, \dots, x_n$  le système de coordonnées usuel sur  $\mathbb{R}^n$  et  $u_1, \dots, u_n$  un autre système (il existe un difféomorphisme  $f$  de  $\mathbb{R}^n$  dans lui-même tel que  $(u_1, \dots, u_n) = f(x_1, \dots, x_n)$ ). Alors, si  $g$  est une fonction lisse sur  $\mathbb{R}^n$ , par la règle de dérivation d'une composition,

$$\sum_i \frac{\partial g}{\partial u_i} du_i = \sum_{i,j} \frac{\partial g}{\partial u_i} \frac{u_i}{x_j} dx_j = \sum_{i,j} \frac{\partial g}{\partial u_i} \frac{u_i}{x_j} dx_j = \sum_j \frac{\partial g}{\partial x_j} dx_j.$$

donc  $d$  ne dépend pas du système de coordonnées.

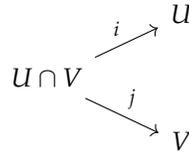
*Remarque 6.* Énoncé dans le langage des catégories,  $\Omega^*$  est un foncteur contravariant de la catégorie des espaces euclidiens  $\{\mathbb{R}^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  munis des applications lisses dans la catégorie des algèbres graduées commutatives (commutatives dans le sens  $\tau\omega = (-1)^{\deg \tau \deg \omega} \omega\tau$ ) munies de leurs morphismes.

## 2.3 Formes différentielles et foncteur $\Omega^*$ sur les variétés

Notre but désormais est de définir les formes différentielles sur une variété quelconque, et d'étendre le foncteur  $\Omega^*$  à toutes les variétés. Pour cela, il suffit d'utiliser la propriété des variétés différentielles d'être des "morceaux" d'espace euclidiens recollés :

**Définition 2.7 (Formes différentielles sur une variété)**

Soit  $M$  une variété différentielle (avec atlas et cartes  $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ ). On requiert de plus que l'atlas soit maximal pour les inclusions (il existe toujours un tel atlas par lemme de Zorn). Une forme différentielle  $\omega$  sur  $M$  est une famille de formes différentielles  $\{\omega_\alpha\}_{\alpha \in A}$  sur chaque  $U_\alpha$  (vues comme des formes sur  $\phi_\alpha(U_\alpha)$ ) telle que, si on a les inclusions suivantes :



Alors on a  $i^* \omega_U = j^* \omega_V$  sur  $\Omega^*(U \cap V)$ .

*Remarque 7.* Par functorialité de  $\Omega^*$ , le produit extérieur et la dérivée extérieure s'étend aux formes différentielles sur une variétés.

*Remarque 8.* En pratique, il n'est pas toujours nécessaire de prendre un atlas maximal. Reprenons l'exemple du cercle  $S^1$  et de son atlas constitué des deux ouverts  $U = S^1 \setminus \{N\}, V = S^1 \setminus \{S\}$ . On rappelle que la fonction de transition  $g_{UV}$  vérifie :

$$\begin{aligned}
 g_{UV} = \phi_U \circ \phi_V^{-1} : \phi_V(U \cap V) = \mathbb{R} \setminus \{0\} &\rightarrow \phi_U(U \cap V) = \mathbb{R} \setminus \{0\} \\
 t &\mapsto \frac{1}{t}
 \end{aligned}$$

Écrit en coordonnées, il est équivalent de dire que l'on a une coordonnée  $x_U$  sur  $U$  ( $x_U = \phi_U$ ) et une coordonnée  $x_V$  sur  $V$  telles que  $x_U x_V = 1$  sur  $U \cap V$ . Une forme sur  $U$  est alors une forme sur  $\mathbb{R}$  en  $x_U$  (par exemple  $x_U dx_U$ ), et idem pour  $V$ . La condition énoncée dans la définition demande exactement que sur  $U \cap V$ ,  $\omega_U(x_U) = \omega_V(x_V)$ .

Par exemple, si  $\omega_U = x_U dx_U$ , alors nécessairement, sur  $U \cap V$ ,

$$\omega_V(x_V) = \frac{-1}{x_V^3} dx_V.$$

*Remarque 9.* Sur une variété compacte, les formes différentielles  $\Omega^*(M)$  et les formes différentielles à support compact  $\Omega_c^*(M)$  coïncident.

**2.4 Intégration des formes différentielles et théorème de Stokes**

Soient  $x_1, \dots, x_n$  les coordonnées standards sur  $\mathbb{R}^n$ . On note l'intégrale de Riemann d'une fonction continue à support compact  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f |dx_1 \dots dx_n|$$

(pour la différentier de l'intégration des formes différentielles). On pose alors, pour une  $n$ -forme à support compact  $\omega = f dx_1 \dots dx_n$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \omega = \int_{\mathbb{R}^n} f |dx_1 \dots dx_n|$$

L'ordre des  $dx_1, \dots, dx_n$  importe ici : on a :

$$\int_{\mathbb{R}^n} f dx_2 dx_1 \dots dx_n = - \int_{\mathbb{R}^n} f dx_1 \dots dx_n.$$

Ainsi défini, l'intégrale d'une forme dépend du choix de coordonnées. Cependant, on a le résultat suivant :

### Proposition 2.8

Si  $T$  est un difféomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  dans lui-même, alors :

$$\int_{\mathbb{R}^n} T^* \omega = \pm \int_{\mathbb{R}^n} \omega$$

selon si  $T$  a un jacobien positif ou négatif.

**Démonstration :** Voir BOTT et TU 2013, page 28. ■

On voit alors que si l'on veut donner une définition cohérente de l'intégration des  $n$ -formes sur une variété de dimension  $n$ , il faudra que les fonctions de transitions soient à jacobien positif :

### Définition 2.9

Soit  $M$  une variété avec atlas  $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ . On dit que l'atlas est orienté si les fonctions de transitions  $g_{\alpha\beta} = \phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$  sont à jacobien positif (on dit aussi qu'elles préservent l'orientation). Une variété est dite orientable si elle possède un atlas orienté.

### Proposition 2.10

Une variété  $M$  de dimension  $n$  est orientable si et seulement s'il existe une  $n$ -forme différentielle qui ne s'annule pas.

**Démonstration :** Voir BOTT et TU 2013, page 29. ■

Deux formes  $\omega$  et  $\omega'$  de degré  $n$  qui ne s'annulent pas diffèrent d'une fonction  $f$  qui ne s'annule pas. Si  $M$  est connexe,  $f$  est soit positive, soit négative, et l'on définit une relation d'équivalence par  $\omega$  et  $\omega'$  sont équivalentes si elles diffèrent par une fonction positive. On obtient alors deux classes d'équivalences appelées orientations sur  $M$ . Par exemple, l'orientation standard sur  $\mathbb{R}^n$  est donnée par  $dx_1 \dots dx_n$ . Donnons-nous une orientation  $[M]$  sur  $M$ . Soit un atlas orienté  $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ .  $\phi_\alpha^*$  envoie  $dx_1 \dots dx_n$  sur un multiple soit positif, soit négatif d'un élément de  $[M]$ . On suppose qu'il les envoie sur un multiple positif. Soit  $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in A}$  une partition de l'unité relative à  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ . On définit alors l'intégrale d'une  $n$ -forme pour l'orientation  $[M]$  par

$$\int_{[M]} \tau = \sum_{\alpha} \int_{U_\alpha} \rho_\alpha \tau$$

où

$$\int_{U_\alpha} \rho_\alpha \tau = \int_{\mathbb{R}^n} (\phi_\alpha^{-1})^* (\rho_\alpha \tau)$$

est bien défini car l'atlas est orienté.  $\rho_\alpha \tau$  est bien à support compact car  $\text{supp } \rho_\alpha \tau \subset \text{supp } \rho_\alpha \cap \text{supp } \tau$  est un fermé inclus dans un compact. De plus  $(\phi_\alpha^{-1})^* (\rho_\alpha \tau)$  est aussi à support compact car  $\phi_\alpha$  est un homéomorphisme, donc préserve aussi les compacts. Si l'on change l'orientation de  $M$ , l'intégrale d'une forme est envoyée sur son opposée. On montre que cette quantité ne dépend pas de la partition de l'unité choisie.

Pour énoncer le théorème de Stokes en toute généralité, on définit une variété différentielle à bord : la définition est identique, sauf qu'on demande à ce que les  $U_\alpha$  soient homéomorphes soit à  $\mathbb{R}^n$ , soit à  $\mathbb{H}^n$  le demi espace supérieur, c'est à dire les points dont la dernière coordonnée est positive ou nulle. On peut alors montrer que pour  $U_\alpha$  homéomorphe à  $\mathbb{H}^n$ , si  $x \in U_\alpha$  est envoyé par  $\phi_\alpha$  sur un point dont la dernière coordonnée est nulle (le bord de  $\mathbb{H}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$ ), alors pour tout  $\beta$  tel que  $x \subset U_\beta$ , on aura  $U_\beta$  homéomorphe à  $\mathbb{H}^n$  et  $x$  envoyé par  $\phi_\beta$  sur un point dont la dernière coordonnée est nulle.

L'ensemble de ces points est appelé bord de  $M$  (noté  $\partial M$ ), et on peut montrer que c'est une variété sans bord de dimension  $n - 1$ .

On peut aussi montrer que si  $M$  est orientée, alors on peut naturellement orienter  $\partial M$ , de la manière suivante. Si  $\mathbb{H}^n$  est orientée par  $dx_1 \dots dx_n$ , alors  $\partial \mathbb{H}^n$  est orientée par  $(-1)^n dx_1 \dots dx_{n-1}$  (signe nécessaire pour qu'il n'y ait pas de signe dans le théorème de Stokes). L'orientation sur  $\partial M$  est alors choisie de telle manière que

$$\phi^* [\partial \mathbb{H}^n] = [\partial M] |_{\partial U}$$

où  $U$  est un ouvert de  $M$  homéomorphe à  $\mathbb{H}^n$  via  $\phi$  (préservant l'orientation), et  $\partial U = \partial M \cap U$ .

On énonce alors le théorème de Stokes :

### **Théorème 2.11**

Soit  $\omega$  une  $(n - 1)$ -forme sur  $M$ . Alors on a :

$$\int_{[M]} d\omega = \int_{[\partial M]} i^*(\omega)$$

où  $i : \partial M \rightarrow M$  est l'injection canonique.

**Démonstration :** Voir BOTT et TU 2013, page 32. ■

*Remarque 10.* Ce théorème a une interprétation qui nous sera plus utile par la suite : l'intégrale d'une forme exacte sur une variété sans bord est nulle (car le bord d'une variété sans bord est vide).

*Remarque 11.* L'intérêt de l'intégration sur une variété repose plus sur le fait d'avoir une application linéaire sur les  $n$ -formes à support compact à valeurs dans  $\mathbb{R}$  avec des bonnes propriétés plutôt que pour des calculs effectifs. En effet, il est souvent difficile d'expliciter de "bonnes" partitions de l'unité et de calculer des intégrales avec ces partitions de l'unité.

## **3 Quelques résultats sur les complexes différentiels**

On commence par définir les complexes différentiels dans un contexte général. On choisit ici de définir les complexes différentiels sur les groupes abéliens, mais il est possible d'obtenir les mêmes résultats en prenant un  $A$ -module quelconque (en particulier, par la suite, nous utiliserons principalement des  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels).

### **Définition 3.1 (Complexe différentiel)**

Un complexe différentiel  $C$  est une somme directe de groupes abéliens  $C = \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} C^q$  munie de morphismes :

$$\dots \longrightarrow C^{q-1} \xrightarrow{d} C^q \xrightarrow{d} C^{q+1} \longrightarrow \dots$$

tels que  $d^2 = 0$ .  $d$  est appelé opérateur différentiel du complexe  $C$ . La cohomologie de  $C$  est alors la somme directe  $H(C) = \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} H^q(C)$ , où

$$H^q(C) = \frac{\ker d \cap C^q}{\operatorname{Im} d \cap C^q}.$$

Après avoir défini un nouvel objet, on définit les morphismes entre de tels objets :

### **Définition 3.2 (Morphisme de complexes différentiels)**

Une application  $f : A \rightarrow B$  entre deux complexes différentiels est un morphisme de complexes différentiels si  $f$  induit des morphismes de groupes abéliens  $A^q \rightarrow B^q$ , et si  $f$  commute avec les opérateurs différentiels, c'est à dire  $f d_A = d_B f$ .

On voit facilement que les morphismes de complexes différentiels induisent des morphismes entre groupes de cohomologie

$$f : H^q(A) \rightarrow H^q(B).$$

On rappelle la définition de suite exacte :

**Définition 3.3 (Suite exacte)**

Une suite de groupes abéliens

$$\dots \longrightarrow C^{q-1} \xrightarrow{f_{q-1}} C^q \xrightarrow{f_q} C^{q+1} \longrightarrow \dots$$

est dite exacte si pour tout  $q$ ,  $\ker f_q = \text{Im } f_{q-1}$ . En particulier, une suite exacte courte est une suite exacte de la forme :

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

**Proposition 3.4**

Supposons que l'on ait une suite exacte courte de complexes différentiels

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

Alors on dispose d'une suite exacte longue

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^0(A) & \longrightarrow & H^0(B) & \longrightarrow & H^0(C) & \longrightarrow & \dots \\ & & \longleftarrow & & \longleftarrow & & \longleftarrow & & \\ & & H^1(A) & \longrightarrow & H^1(B) & \longrightarrow & H^1(C) & \longrightarrow & \dots \\ & & \longleftarrow & & \longleftarrow & & \longleftarrow & & \\ & & H^2(A) & \longrightarrow & H^2(B) & \longrightarrow & H^2(C) & \longrightarrow & \dots \\ & & \longleftarrow & & \longleftarrow & & \longleftarrow & & \\ & & \dots & & \dots & & \dots & & \\ & & H^n(A) & \longrightarrow & H^n(B) & \longrightarrow & H^n(C) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

**Démonstration :** Voir MACLANE 2012, page 45. ■

**Proposition 3.5 (Lemme des cinq)**

Soit le diagramme commutatif de groupes abéliens suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f_1} & B & \xrightarrow{f_2} & C & \xrightarrow{f_3} & D & \xrightarrow{f_4} & E & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \downarrow \delta & & \downarrow \epsilon & & \\ \dots & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{f'_1} & B' & \xrightarrow{f'_2} & C' & \xrightarrow{f'_3} & D' & \xrightarrow{f'_4} & E' & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

où les lignes sont exactes. Si  $\alpha, \beta, \delta$  et  $\epsilon$  sont des isomorphismes, alors  $\gamma$  l'est aussi.

## 4 Cohomologie de De Rham

### 4.1 Définition et premier exemple

Soit  $M$  une variété différentielle. On a vu précédemment que l'on a une application  $d$ , la différentielle extérieure, sur les formes différentielles sur  $M$  :

$$\dots \longrightarrow \Omega^{q-1}(M) \xrightarrow{d} \Omega^q(M) \xrightarrow{d} \Omega^{q+1}(M) \longrightarrow \dots$$

Cette suite définit alors un complexe différentiel, ce qui nous permet de définir sa cohomologie

#### Définition 4.1 (Cohomologie de De Rham d'une variété)

Le  $q$ -ème groupe de cohomologie de la variété  $M$ , noté  $H_{DR}^q(M)$  (ou  $H^q(M)$  lorsque le contexte est clair), est l'espace vectoriel

$$H_{DR}^q(M) = \frac{\ker d \cap \Omega^q(M)}{\text{Im } d \cap \Omega^q(M)}$$

Autrement dit,

$$H_{DR}^q(M) = \frac{\{q\text{-formes fermés sur } M\}}{\{q\text{-formes exactes sur } M\}}$$

L'image d'une forme fermée  $\omega$  dans  $H_{DR}^q(M)$  est appelée classe de cohomologie de  $\omega$ , et est notée  $[\omega]$

**Exemple 2.** Sur  $\mathbb{R}^2$ ,  $\omega = ydx + xdy$  est fermée. Elle est même exacte, c'est la dérivée extérieure de  $\alpha = xy$ . On verra plus loin que sur  $\mathbb{R}^n$  (et plus généralement sur toute variété contractile), toute forme fermée de degré supérieur ou égal à 1 est exacte, ce qui revient exactement à dire que sa cohomologie de De Rham est nulle sauf en  $H^0$ .

De la même manière, on a un complexe différentiel

$$\dots \longrightarrow \Omega_c^{q-1}(M) \xrightarrow{d} \Omega_c^q(M) \xrightarrow{d} \Omega_c^{q+1}(M) \longrightarrow \dots$$

qui permet de définir la cohomologie de De Rham à support compact  $H_c^*(M)$ .

*Remarque 12.* Pour une variété compacte, les deux cohomologies coïncident trivialement (toute forme est à support compact). Néanmoins, il reste important de les traiter différemment : en effet, elles vont vérifier des propriétés fonctorielles différentes. On a vu précédemment que le foncteur  $\Omega^*$  était contravariant de la catégorie des variétés dans celles des algèbres commutatives différentielles graduées. Le foncteur  $\Omega_c^*$  sera covariant de la catégorie des ouverts d'une variété  $M$  dans la catégorie des algèbres commutatives différentielles graduées : on détaillera ce résultat lors de la présentation des résultats concernant les suites de Mayer-Vietoris.

**Exemple 3.** Calculons la cohomologie de De Rham de  $\mathbb{R}$  sans outil supplémentaire. Soit  $\omega = f(x)$  une 0-forme fermée, c'est à dire  $f'(x)dx = 0$ , soit  $f$  constante, donc  $\ker d = \mathbb{R}$ .  $\omega$  est exacte si et seulement si  $f$  est nulle. d'où, finalement,  $H^0(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ . (Plus généralement, sur une variété  $M$  quelconque, une 0-forme fermée est une fonction localement constante, et  $H^0(M) = \mathbb{R}^k$  où  $k$  est le nombre de composantes connexes de  $M$ ).

Toutes les 1-formes sont fermés sur  $\mathbb{R}$ . Il nous reste à calculer  $\text{Im } d \cap \Omega^1(\mathbb{R})$ . On va montrer que toutes les 1-formes sont exactes sur  $\mathbb{R}$ . Soit  $\omega$  une 1-forme,  $\omega = g(x)dx$ . Alors  $\omega = d\alpha$ , où  $\alpha = \int_0^x g(t)dt$ . Donc  $H^1(\mathbb{R}) = 0$ .

## 4.2 Cohomologie et intégration

Dans cette partie succincte, on évoque le lien entre intégration et cohomologie. Soient  $\omega_1, \omega_2$  deux formes fermés à support compact sur une variété  $M$  sans bord, représentant la même classe de cohomologie.  $\omega_1 - \omega_2$  est une forme exacte donc par théorème de Stokes, son intégrale est nulle. On en déduit que  $\omega_1$  et  $\omega_2$  ont même intégrale : l'intégration définit une application linéaire de  $H_c^*(M)$  dans  $\mathbb{R}$ .

## 4.3 Suite de Mayer-Vietoris

La suite de Mayer-Vietoris est un outil à la fois théorique et pratique en cohomologie de De Rham. Il va nous permettre de calculer facilement la cohomologie d'espaces tels que  $S^1$ , par exemple. Mais c'est aussi grâce à la suite de Mayer-Vietoris que nous pourrons montrer que pour des "bonnes" variétés, les groupes de cohomologie de De Rham sont de dimension finie (on définira plus tard ce qu'on entend par bonne variété).

Soit  $M$  une variété, et  $\{U, V\}$  un recouvrement ouvert de  $M$ . On dispose d'une suite d'inclusions :

$$U \cap V \begin{array}{c} \xrightarrow{i_U} \\ \xrightarrow{i_V} \end{array} U \amalg V \begin{array}{c} \xrightarrow{j_U} \\ \xrightarrow{j_V} \end{array} M$$

(II désigne l'union disjointe)  $(i_U, i_V$  inclusion de  $U \cap V$  dans  $U, V$  ;  $j_U, j_V$  inclusions de  $U, V$  dans  $M$ ). En appliquant le foncteur contravariant  $\Omega^*$ , on a alors :

$$\Omega^*(M) \xrightarrow{(j_U^*, j_V^*)} \Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V) \xrightarrow[i_V^*]{i_U^*} \Omega^*(U \cap V)$$

En ajoutant des 0 à gauche et à droite, et en choisissant la différence entre  $i_U^*$  et  $i_V^*$  à la deuxième flèche, on obtient la suite de Mayer-Vietoris :

$$0 \rightarrow \Omega^*(M) \xrightarrow{j_U^*, j_V^*} \Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V) \xrightarrow{i_V^* - i_U^*} \Omega^*(U \cap V) \rightarrow 0.$$

**Proposition 4.2**

La suite de Mayer-Vietoris est exacte.

**Démonstration :** On montre l'exactitude à chaque étape.

- en  $\Omega^*(M)$ . Il suffit de montrer que  $(j_U^*, j_V^*)$  est injective. Mais si  $j_U^*(\omega) = 0$  et  $j_V^*(\omega) = 0$ , alors  $\omega$  est nulle sur  $U$  et sur  $V$  donc sur  $U \cup V = M$ , donc  $\omega = 0$ .
- en  $\Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V)$ . Soit  $(\omega_U, \omega_V) \in \Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V)$ .  $(\omega_U, \omega_V)$  provient d'une forme globale  $\omega$  si et seulement si  $\omega_U$  et  $\omega_V$  coïncident sur  $U \cap V$  si et seulement si leur image par  $(i_U^* - i_V^*)$  est nulle, d'où l'exactitude
- en  $\Omega^*(U \cap V)$ . Il faut montrer que  $(i_V^* - i_U^*)$  est surjective. Soit  $\alpha \in \Omega^*(U \cap V)$ . Soit  $\rho_U, \rho_V$  une partition de l'unité relative à  $U, V$ .  
Faisons la remarque suivante :  $\rho_V \omega$  est une forme sur  $U$  (et de la même manière,  $\rho_U \omega$  est une forme sur  $V$ ).  
On a alors  $\omega = (i_U^* - i_V^*)(-\rho_V \omega, \rho_U \omega)$ , d'où la surjectivité. ■

La suite de Mayer-Vietoris donne lieu à une suite longue en cohomologie, aussi appelée suite de Mayer-Vietoris :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^0(M) & \longrightarrow & H^0(U) \oplus H^0(V) & \longrightarrow & H^0(U \cap V) \\ & & & & & & \searrow \\ & & & & & & H^1(M) \longrightarrow H^1(U) \oplus H^1(V) \longrightarrow H^1(U \cap V) \\ & & & & & & \searrow \\ & & & & & & H^2(M) \longrightarrow H^2(U) \oplus H^2(V) \longrightarrow H^2(U \cap V) \\ & & & & & & \searrow \\ & & & & & & \dots \\ & & & & & & \searrow \\ & & & & & & H^n(M) \longrightarrow H^n(U) \oplus H^n(V) \longrightarrow H^n(U \cap V) \end{array}$$

On explicite ici l'application  $d^* : H^q(U \cap V) \rightarrow H^{q+1}(M)$ . En suivant la démonstration de la proposition 3.4 pour obtenir la suite longue, pour  $[\omega] \in H^q(U \cap V)$ ,  $d^*[\omega]$  est une forme telle que

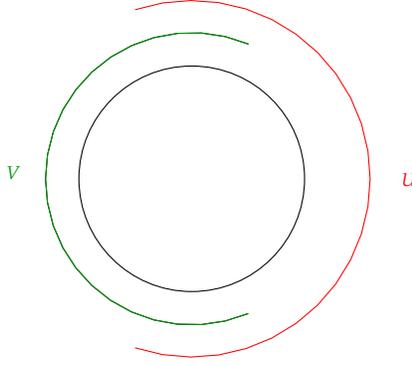
$$d^*[\omega] = \begin{cases} [[-d(\rho_V \omega)] \text{ sur } U \\ [d(\rho_U \omega)] \text{ sur } V \end{cases}$$

où  $\{\rho_U, \rho_V\}$  est une partition de l'unité relative à  $\{U, V\}$ . Les deux classes coïncident bien sur  $U \cap V$  :  $(\rho_U + \rho_V)\omega = \omega$ , et en prenant la dérivée extérieure,  $d((\rho_U + \rho_V)\omega) = d\omega$ , c'est à dire, en cohomologie,  $[d((\rho_U + \rho_V)\omega)] = 0$ , d'où le résultat.

Un rapide calcul montre que le résultat ne dépend pas de la partition de l'unité choisie.

**Exemple 4** (La cohomologie de  $S^1$ ). On se donne deux ouverts  $U$  et  $V$  tels que sur la figure suivante :

Figure 3 – Recouvrement ouvert du cercle  $S^1$



$U$  et  $V$  sont tous deux difféomorphes à  $\mathbb{R}$ , et  $U \cap V$  est homéomorphe à l'union disjointe de deux copies de  $\mathbb{R}$ . En utilisant la suite de Mayer-Vietoris, et en se rappelant la cohomologie de  $\mathbb{R}$  (calculée en l'exemple 3), on obtient alors la suite longue suivante :

$$0 \longrightarrow H^0(M) \longrightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \longrightarrow H^1(M) \longrightarrow 0.$$

(tous les espaces de dimension supérieure sont nuls car  $S^1$  est de dimension 1).  $S^1$  est connexe donc  $H^0(M) = \mathbb{R}$ . On utilise ensuite un lemme facile à démontrer :

**Lemme 4.3**

Si l'on a une suite exacte finie d'espaces vectoriels :

$$0 \longrightarrow C_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow C_n \longrightarrow 0$$

alors la somme alternée  $\sum_{i=1}^n (-1)^i \dim C_i$  est nulle.

En appliquant le lemme ici, on obtient  $H^1(S^1) = \mathbb{R}$ , et l'on a calculé la cohomologie de  $S^1$  :

$$H^q(S^1) = \begin{cases} \mathbb{R} & q \in \{0, 1\} \\ 0 & q \geq 2 \end{cases} .$$

**4.4 Suite de Mayer-Vietoris à support compact**

On souhaite obtenir un résultat similaire à la suite de Mayer-Vietoris pour les formes différentielles générales. Cependant, les propriétés fonctorielles de  $\Omega_c^*(M)$  sont bien différentes de celles de  $\Omega^*(M)$ . Les morphismes entre variétés n'induisent pas de foncteur contravariant ; on ne peut pas utiliser l'image réciproque, car l'image réciproque d'une forme différentielle à support compact n'est pas en général à support compact. Par exemple, si l'on tire en arrière une fonction sur  $\mathbb{R}$  à support égal à  $[0, 1]$  par l'application  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x - y$ , on obtient une application dont le support est non compact.

Cependant, si l'on considère uniquement les applications correspondants aux inclusions d'ouverts dans des variétés, on obtient un foncteur covariant de la manière suivante : si  $j : U \rightarrow M$  est l'inclusion de  $U$  dans  $M$ , alors on dispose d'une application  $j_* : \Omega_c^*(U) \rightarrow \Omega_c^*(M)$  qui étend une forme différentielle à support compact dans  $U$  par 0 en dehors de  $U$ . Intuitivement, une forme différentielle à support compact dans  $U$  est "nulle près du bord de  $U$ ", donc, peut s'étendre par 0 en dehors de  $U$ .

Tout comme pour la suite de Mayer-Vietoris classique, Soit  $M$  une variété, et  $\{U, V\}$  un recouvrement ouvert de  $M$ , on dispose de la suite d'inclusions :

$$U \cap V \xrightarrow{i_U} U \amalg V \xrightarrow{j_U} M$$

à laquelle on applique notre nouveau foncteur  $\Omega_c^*$ , covariant cette fois-ci

$$\Omega_c^*(U \cap V) \xrightarrow{(i_{U*}, i_{V*})} \Omega_c^*(U) \oplus \Omega_c^*(V) \xrightarrow{j_{U*}, j_{V*}} \Omega_c^*(M).$$

On ajoute aussi des 0 à gauche et à droite, et on choisit l'inclusion avec signe  $(-i_{U_*}, i_{V_*})$  à gauche et la somme  $(j_{U_*}(\omega_U) + j_{V_*}(\omega_V))$  à droite pour obtenir la suite de Mayer-Vietoris à support compact :

$$0 \rightarrow \Omega_c^*(U \cap V) \xrightarrow{(-i_{U_*}, i_{V_*})} \Omega_c^*(U) \oplus \Omega_c^*(V) \xrightarrow{j_{U_*}(\omega_U) + j_{V_*}(\omega_V)} \Omega_c^*(M) \rightarrow 0.$$

#### Proposition 4.4

La suite de Mayer-Vietoris à support compact est exacte.

**Démonstration :** La démonstration est extrêmement similaire à celle de la suite classique ; voir BOTT et TU 2013, page 26. ■

Cette suite courte donne aussi lieu à une suite longue en cohomologie, et comme précédemment, on explicite l'application  $d_* : H_c^q(M) \rightarrow H_c^{q+1}(U \cap V)$ . Si  $[\omega]_c \in H_c^q(M)$ ,  $d_*[\omega]_c$  est une classe représentée par une forme  $\tau$  sur  $U \cap V$  telle que l'extension par 0 de  $\tau$  à  $U$  soit égale à  $-d(\rho_U \omega)$ , et l'extension par 0 de  $\tau$  à  $V$  soit égale à  $d(\rho_V \omega)$ .

Nous donnerons un exemple d'utilisation de cette suite lorsque nous calculerons la cohomologie à support compact du ruban de Möbius ouvert ; mais pour se faire, nous avons besoin de connaître la cohomologie de De Rham classique et à support compact des espaces  $\mathbb{R}^n$ . Ces résultats sont apportés par les lemmes de Poincaré.

## 4.5 Lemmes de Poincaré

### 4.5.1 Cohomologie de De Rham à support quelconque

Notre but ici est de démontrer que  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1}$  et  $\mathbb{R}^n$  ont la même cohomologie de De Rham, c'est à dire que  $H^*(\mathbb{R}^{n+1}) \simeq H^*(\mathbb{R}^n)$ .

Considérons  $\pi$  la projection de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}^n$  et  $s$  l'application qui à  $x \in \mathbb{R}^n$  associe  $(x, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ . Ces applications induisent par image réciproque deux applications sur les formes différentielles  $\pi^* : \Omega^*(\mathbb{R}^n) \rightarrow \Omega^*(\mathbb{R}^{n+1})$  et  $s^* : \Omega^*(\mathbb{R}^{n+1}) \rightarrow \Omega^*(\mathbb{R}^n)$ . On va montrer que ces deux applications induisent des isomorphismes *en cohomologie* (elles n'induisent pas des isomorphismes sur l'espace des formes différentielles).

On a  $\pi \circ s = \text{id}$ , donc en appliquant le foncteur  $\Omega^*$ ,  $s^* \circ \pi^* = \text{id}$ . Cependant, l'égalité  $\pi^* \circ s^* = \text{id}$  est fautive :  $\pi^* \circ s^*$  envoie toute fonction  $f$  qui à  $(x, t)$  associe  $f(x, t)$  sur la fonction qui à  $(x, t)$  associe  $f(x, 0)$ . Mais notre objectif est de montrer qu'elles induisent un isomorphisme en cohomologie : pour cela, il suffit de montrer qu'il existe un endomorphisme  $K$  de  $\Omega^*(\mathbb{R}^{n+1})$  tel que

$$1 - \pi^* \circ s^* = \pm(dK \pm Kd).$$

$K$  est appelé opérateur d'homotopie. Il diminue le degré des formes d'exactlyement 1.  $\pm(dK \pm Kd)$  envoie bien les formes fermées sur des formes fermées donc induit une application en cohomologie. Démontrons l'affirmation suivante :

#### Proposition 4.5

$\pm(dK \pm Kd)$  est une application nulle en cohomologie.

**Démonstration :** Soit  $[\omega] \in H^*(M)$ . Par définition  $\omega$  est fermée, donc

$$\pm(dK \pm Kd)\omega = d(\pm K\omega) = [0]$$

d'où le résultat. ■

*Remarque 13.* Les signes dans la définition de l'opérateur d'homotopie revêtent peu d'importance ; même, ils n'ont pas besoin d'être identiques pour toutes les formes. Par exemple, dans le calcul qui suit, on voit que le signe dépend du degré de la forme à laquelle il est appliqué. Mais cela n'influe en rien la démonstration précédente.

Revenons à la cohomologie de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Toute forme différentielle sur  $\mathbb{R}^{n+1}$  est une combinaison linéaire de deux types de formes :

1.  $(\pi^* \phi)f(x, t)$

$$2. (\pi^*\phi)f(x,t)dt$$

où  $\phi$  est une forme sur  $\mathbb{R}^n$ .

On définit alors  $K$  de la manière suivante :

$$1. (\pi^*\phi)f(x,t) \mapsto 0$$

$$2. (\pi^*\phi)f(x,t)dt \mapsto (\pi^*\phi) \int_0^t f(u)du$$

#### Proposition 4.6

$K$  est un opérateur d'homotopie.

**Démonstration :** Sur les formes de type 1 (en posant  $q = \deg \omega$ ) :

$$\begin{aligned} \omega &= (\pi^*\phi)f(x,t) \\ (1 - \pi^*s^*)\omega &= (\pi^*\phi)f(x,t) - (\pi^*\phi)f(x,0) \\ (dK - Kd)\omega &= -Kd\omega = -K \left( (d\pi^*\phi) + (-1)^q \pi^*\phi \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial f}{\partial t} dt \right) \right) \\ &= (-1)^{q-1} \pi^*\phi \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t} dt = (-1)^{q-1} \pi^*\phi [f(x,t) - f(x,0)] \end{aligned}$$

d'où  $1 - \pi^*s^* = (-1)^{q-1}(dK - Kd)$ . Sur les formes de type 2, le calcul est similaire et l'on trouve le même résultat  $1 - \pi^*s^* = (-1)^{q-1}(dK - Kd)$ . ■

*Remarque 14.* La preuve s'adapte quasiment mot pour mot pour montrer le résultat suivant : pour une variété  $M$ , on a un isomorphisme entre  $H^*(M \times \mathbb{R})$  et  $H^*(M)$ .

*Remarque 15.* Dans la démonstration, on a choisi  $s$  la section nulle comme inverse à droite de la projection. Mais si l'on avait choisi une autre section, la démonstration en serait restée valide, et cette remarque est l'origine du corollaire suivant.

#### Corollaire 4.7

Deux applications  $f$  et  $g$  homotopes de  $M$  dans  $N$  induisent les mêmes applications en cohomologie.

**Démonstration :** Par définition, il existe  $F : M \times \mathbb{R} \rightarrow N$  lisse telle que  $\forall t \leq 0, F_t = f$  et  $\forall t \geq 1, F_t = g$ . En posant  $s_0, s_1 : M \rightarrow M \times \mathbb{R}$  qui à  $x$  associent respectivement  $(x,0), (x,1)$ , on a

$$f = F \circ s_0 \quad g = F \circ s_1.$$

En passant au foncteur  $\Omega^*$  :

$$f^* = s_0^* F^* \quad g^* = s_1^* \circ F^*$$

mais  $s_0^*, s_1^*$  sont tous les deux des inverses de  $\pi^*$  sont donc égaux, d'où

$$f^* = g^*. \quad \blacksquare$$

On en déduit en corollaire que :

#### Corollaire 4.8

Deux variétés différentielles ayant le même type d'homotopie ont même cohomologie.

**Exemple 5** (Cohomologie de  $S^n$ ). Utilisons ce dernier résultat pour calculer la cohomologie de  $S^n$  et de  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ,  $n > 1$ .  $S^n$  et  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  ont le même type d'homotopie :  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  se rétracte par déformation sur  $S^n$  via :

$$F : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \times [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}, (x,t) \mapsto (1-t)x + t \frac{x}{\|x\|}.$$

. On va montrer par récurrence sur  $n$  que

$$H^q(S^n) = \begin{cases} \mathbb{R}, & q \in \{0, n\} \\ 0, & q \notin \{0, n\}. \end{cases}$$

On a déjà montré le résultat dans le cas  $n = 1$ . Supposons le résultat vrai pour  $k < n$ ,  $n > 1$ , et considérons  $S^n$ . On considère les ouverts  $U = S^n \setminus \{N\}$ ,  $V = S^n \setminus \{S\}$ , qu'on sait difféomorphes à  $\mathbb{R}^n$  via la projection stéréographique. On peut alors voir que  $U \cap V$  est difféomorphe à  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  (toujours via la projection stéréographique). Par récurrence, on connaît sa cohomologie. On utilise alors la suite de Mayer-Vietoris avec  $U$  et  $V$  :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & H^0(S^n) & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
 & & & & & \swarrow & \\
 & & H^1(S^n) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & & \swarrow & \\
 & & & & & \dots & \\
 & & & & & \swarrow & \\
 & & H^{n-1}(S^n) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
 & & & & & \swarrow & \\
 & & H^n(S^n) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Par connexité de  $S^n$ ,  $H^0(S^n) = \mathbb{R}$ . En utilisant le lemme 4.3, on a alors  $1 - 2 + 1 - \dim(H^1(S^n)) = 0$  d'où  $H^1(S^n) = 0$ . Pour tout  $k \in \{2, \dots, n-1\}$ , on peut extraire des suites exactes  $0 \rightarrow H^k(S^n) \rightarrow 0$ , donc  $H^k(S^n) = 0$ . Pour  $k = n$ , on utilise une dernière fois le lemme :  $1 - \dim H^n(S^n) = 0$  d'où  $H^n(S^n) = \mathbb{R}$ , ce qui conclut la preuve.

**Exemple 6** (Cohomologie de  $\mathbb{P}^n$ ). On va montrer à nouveau par récurrence et à l'aide de la suite de Mayer-Vietoris que

$$H^q(\mathbb{P}^n) = \begin{cases} \mathbb{R}, & q \in \{0, \dots, 2n\}, q \equiv 0[2] \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans le cas  $n = 1$ , le résultat est vrai car  $\mathbb{P}^1$  est difféomorphe à  $S^2$ . Soit  $n > 1$ , et supposons le résultat vrai pour tout  $k < n$ . Considérons  $\mathbb{P}^n$ . On pose  $U = \{[x_0 : \dots : x_n] : x_n \neq 0\}$  et  $V = \mathbb{P}^n \setminus \{[0 : \dots : 0 : 1]\}$ .  $U$  est difféomorphe à  $\mathbb{C}^n$  (ouvert de l'atlas). Via la même carte,  $U \cap V$  est difféomorphe à  $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$  dont la cohomologie est donnée par celle de  $S^{2n-1}$ . Montrons maintenant que  $V$  a le même type d'homotopie que  $\mathbb{P}^{n-1}$ . Posons

$$F : V \times [0, 1] \rightarrow V, ([x_0 : \dots : x_n], t) \mapsto [x_0 : \dots : tx_n].$$

$F$  est bien définie :  $x_0, \dots, x_{n-1}$  ne peuvent pas tous valoir 0 sinon  $[x_0 : \dots : x_n]$  n'appartiendrait pas à  $V$ .  $V$  se rétracte donc par déformation sur  $\{[x_0 : \dots : x_n] : x_n = 0\}$  qui est difféomorphe à  $\mathbb{P}^{n-1}$  (en "oubliant" la dernière coordonnée). On applique donc la suite de Mayer-Vietoris que l'on décompose. La première ligne donne :

$$0 \rightarrow H^0(\mathbb{P}^n) \rightarrow \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow H^1(\mathbb{P}^n) \rightarrow 0.$$

$\mathbb{P}^n$  est connexe donc  $H^0 = \mathbb{R}$ . Par le lemme 4.3, on obtient  $H^1 = 0$ . Ensuite, pour les  $2k$  entre 2 et  $2n-2$ , on a des suites exactes

$$0 \rightarrow H^{2k}(\mathbb{P}^n) \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow 0.$$

qui montrent que  $H^{2k}(\mathbb{P}^n) = \mathbb{R}$ . Pour les  $2k+1$  entre 2 et  $2n-2$ , on a des suites exactes

$$0 \rightarrow H^{2k+1}(\mathbb{P}^n) \rightarrow 0$$

qui montrent que  $H^{2k+1}(\mathbb{P}^n) = 0$ . Finalement, la dernière ligne donne

$$0 \rightarrow H^{2n-1}(V) = \mathbb{R} \rightarrow H^{2n}(\mathbb{P}^n) \rightarrow 0.$$

qui donne  $H^{2n}(\mathbb{P}^n) = \mathbb{R}$ , ce qui conclut la preuve.

### 4.5.2 Cohomologie de De Rham à support compact

Nous allons montrer un résultat similaire à la cohomologie à support quelconque, mais qui dans le cas présent descend la dimension de la cohomologie :

$$H_c^{*+1}(M \times \mathbb{R}) = H_c^*(M).$$

La démonstration se fait quasiment de la même manière : on va définir deux applications  $\pi_*$  et  $e_*$  sur les formes différentielles. On aura l'égalité  $\pi_* \circ e_* = 1$ , mais pas dans l'autre sens. Mais il existera un opérateur d'homotopie pour  $e_* \circ \pi_*$ , ce qui montrera qu'elles sont inversibles en cohomologie.

On ne peut plus considérer l'image réciproque de la projection  $\pi$ , car elle n'envoie pas les formes à support compact sur des formes à support compact. On va cependant définir une application  $\pi_*$ , appelée intégration sur la fibre (et dont nous reverrons une définition plus générale lorsque nous introduirons l'isomorphisme de Thom). Les formes à support compactes sur  $M \times \mathbb{R}$  sont des deux types suivants :

1.  $(\pi^*\phi)f(x, t)$
2.  $(\pi^*\phi)f(x, t)dt$

avec  $\phi$  une forme sur  $M$  et  $f$  à support compact. On définit alors  $\pi_* : \Omega_c^*(M \times \mathbb{R}) \rightarrow \Omega_c^{*-1}(M)$  par

1.  $(\pi^*\phi)f(x, t) \mapsto 0$
2.  $(\pi^*\phi)f(x, t)dt \mapsto \phi \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t)dt$

On définit aussi  $e_* : \Omega_c^*(M) \rightarrow \Omega_c^{*+1}(M \times \mathbb{R})$ . Soit  $e = e(t)dt$  une 1-forme à support compact sur  $\mathbb{R}$  d'intégrale 1. On pose alors

$$e_*(\phi) = \phi \wedge e.$$

Il n'est pas difficile de vérifier que

- $\pi_*$  et  $e_*$  commutent avec la dérivée extérieure  $d$
- $\pi_* \circ e_* = 1$

Définissons alors  $K : \Omega_c^*(M \times \mathbb{R}) \rightarrow \Omega_c^{*-1}(M \times \mathbb{R})$  par

1.  $(\pi^*\phi)f(x, t) \mapsto 0$
2.  $(\pi^*\phi)f(x, t)dt \mapsto \phi \int_{-\infty}^t f(x, u)du - \phi \int_{-\infty}^t e(u)du \int_{-\infty}^{\infty} e(u)du$

#### Proposition 4.9

$K$  est un opérateur d'homotopie pour  $e_* \circ \pi_*$ .

**Démonstration :** Voir BOTT et TU 2013, page 38. ■

D'où on tire notre isomorphisme entre cohomologies à support compact. Par récurrence, on montre alors que :

#### Corollaire 4.10

$$H^q(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{R}, & q = n \\ 0, & q \neq n \end{cases}$$

### 4.5.3 Cohomologie du ruban de Möbius

Afin d'illustrer tous ces résultats, nous allons calculer la cohomologie classique et à support compact du ruban de Möbius. Pour cela, nous allons donner une définition précise du ruban de Möbius :

Considérons le carré  $C = [-1, 1] \times [-1, 1]$  où l'on identifie les côtés gauche et droite en inversant le sens. Plus précisément, on quotiente  $C$  par la relation  $(x, y) \sim (x', y')$  si  $x = x', y = y'$  ou si  $x = 0, x' = 1, y = -y'$  ou si  $x = 1, x' = 0, y = -y'$ . On pose  $\pi$  la projection de  $C$  sur son quotient, et on note  $[x, y]$  les classes

d'équivalence. On obtient alors un espace  $M$  qu'on munit d'une structure de variété différentielle de la manière suivante : on pose  $U = \pi(C \setminus (\{0\} \times [-1, 1]))$ ,  $V = \pi(C \setminus (\{-1, 1\} \times [-1, 1]))$ . On définit alors

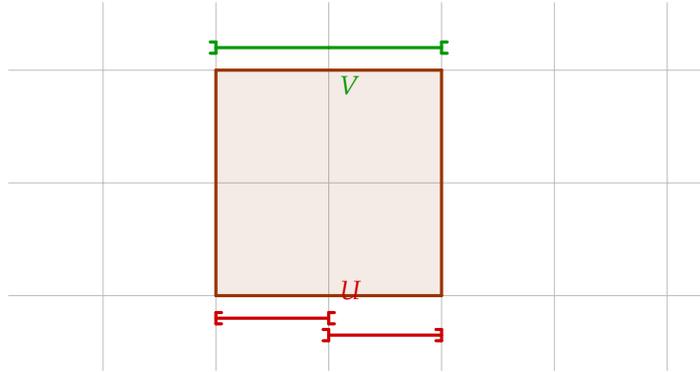
$$\begin{aligned} \phi_U : U &\rightarrow ]-1, 1[ \times ]-1, 1[, [x, y] \mapsto \begin{cases} (x-1, y), & x \leq 0 \\ (x+1, -y), & x \geq 0 \end{cases} \\ \phi_V : V &\rightarrow ]-1, 1[ \times ]-1, 1[, [x, y] \mapsto (x, y) \end{aligned}$$

$\phi_U$  et  $\phi_V$  sont des homéomorphismes. Il nous reste à montrer que la fonction de transition est bien lisse.  $U \cap V$  a deux composantes connexes. Notons  $W_1 = \{[x, y] \in U \cap V : x \in ]-1, 0[ \}$ ,  $W_2 = \{[x, y] \in U \cap V : x \in ]0, 1[ \}$  (ne dépend pas du représentant de la classe). On a alors :

$$g_{UV} : C \setminus (\{-1, 0, 1\} \times [-1, 1]) \rightarrow C \setminus (\{-1, 0, 1\} \times [-1, 1]), (x, y) \mapsto \begin{cases} (x, y), & x \leq 0 \\ (x, -y), & x \geq 0 \end{cases}$$

est bien  $C^\infty$ .

Figure 4 – Ruban de Möbius



Calculons désormais la cohomologie de De Rham de  $M$ .  $M$  se rétracte par déformation sur  $\pi([-1, 1] \times 0)$ , qui est un cercle, via

$$F : M \times [0, 1] \rightarrow M, [x, y] \mapsto [tx, y].$$

$M$  a le même type d'homotopie que  $S^1$  donc

$$H^q(M) = \begin{cases} \mathbb{R} & q \in \{0, 1\} \\ 0 & q \geq 2 \end{cases}.$$

Calculons maintenant la cohomologie à support compact de  $M$ . On utilise la suite de Mayer-Vietoris avec  $U$  et  $V$  tels que définis ci-dessus, en remarquant que  $U, V$  sont difféomorphes à  $\mathbb{R}^2$ , et  $U \cap V$  est difféomorphe à  $\mathbb{R}^2 \amalg \mathbb{R}^2$ . La suite courte exacte définit alors une suite longue exacte, et grâce aux lemmes de Poincaré, on a :

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow H_c^0(U \cap V) = 0 \longrightarrow H_c^0(U) \oplus H_c^0(V) = 0 \longrightarrow H_c^0(M) \\ &\hspace{10em} \swarrow \hspace{1em} \longleftarrow \hspace{1em} \longrightarrow \hspace{1em} \searrow \\ H_c^1(U \cap V) &= 0 \longleftarrow H_c^1(U) \oplus H_c^1(V) = 0 \longrightarrow H_c^1(M) \\ &\hspace{10em} \swarrow \hspace{1em} \longleftarrow \hspace{1em} \longrightarrow \hspace{1em} \searrow \\ H_c^2(U \cap V) &= \mathbb{R}^2 \longleftarrow H_c^2(U) \oplus H_c^2(V) = \mathbb{R}^2 \longrightarrow H_c^2(M) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

On déduit alors :

- $H_c^0(M) = 0$
- $H_c^1(M)$  et  $H_c^2(M)$  sont de dimension 0, 1 ou 2 et de même dimension.

Étudions l'application  $\varphi : H_c^2(U \cap V) = \mathbb{R}^2 \rightarrow H_c^2(U) \oplus H_c^2(V) = \mathbb{R}^2$ . On va montrer que c'est un isomorphisme, ce qui entraînera que  $H_c^1$  et  $H_c^2$  sont tous les deux nuls.

Déterminons tout d'abord des bases de  $H_c^2(U \cap V)$  et  $H_c^2(U) \oplus H_c^2(V)$ . Soient  $\alpha_1$ , respectivement  $\alpha_2$  une forme fermée à support compact dans  $W_1$ , respectivement  $W_2$  d'intégrale 1.  $([\alpha_1], [\alpha_2])$  est une base de  $H_c^2(U \cap V)$  (la famille est libre car les supports des deux formes sont disjoints). De même, si  $\beta_U, \beta_V$  sont des formes fermées à support compact d'intégrale 1 dans  $U, V$ ,  $([\beta_U], [\beta_V])$  est une base de  $H_c^2(U) \oplus H_c^2(V)$  (par définition de la somme directe).

Considérons  $j_{W_1, U}, j_{W_2, U}, j_{W_1, V}, j_{W_2, V}$  les inclusions de  $W_1, W_2$  dans  $U, V$ . Écrivons nos cartes dans nos ouverts en coordonnées : on a des coordonnées  $x_U, y_U, x_V, y_V$  sur  $U, V$ . On choisit des coordonnées sur  $W_1$  et  $W_2$  :  $x_{W_1} = x_U - 1, y_{W_1} = -y_U, x_{W_2} = x_U + 1, y_{W_2} = y_U$ . On a alors, d'après notre fonction de transition :

$$x_{W_1} = x_U - 1 \quad y_{W_1} = -y_U \quad x_{W_2} = x_U + 1 \quad y_{W_2} = y_U.$$

Rappelons que l'expression de  $\varphi$  est donnée par :

$$\varphi(\omega) = (-i_{U_*}(\omega), i_{V_*}(\omega))$$

où  $i_U, i_V$  sont les inclusions de  $U \cap V$  dans  $U, V$ . En séparant  $\omega$  en ses composantes en  $W_1$  et  $W_2$

$$\omega = (\omega_1, \omega_2), \quad \omega_1 = f(x_{W_1}, y_{W_1}) dx_{W_1} dy_{W_1} \quad \omega_2 = f(x_{W_2}, y_{W_2}) dx_{W_2} dy_{W_2}.$$

Écrivons alors  $\varphi$  en coordonnées :

$$\begin{aligned} -j_{(W_1, U)_*}(\omega_1) &= f(x_U - 1, -y_U) dx_U dy_U \\ -j_{(W_2, U)_*}(\omega_2) &= -g(x_U + 1, y_U) dx_U dy_U \\ j_{(W_1, V)_*}(\omega_1) &= f(x_V, y_V) dx_V dy_V \\ j_{(W_2, V)_*}(\omega_2) &= g(x_V, y_V) dx_V dy_V \end{aligned}$$

Résumé dans les bases, cela donne :

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha_1, 0) &= (\beta_U, \beta_V) \\ \varphi(0, \alpha_2) &= (-\beta_U, \beta_V) \end{aligned}$$

qui est bien une application inversible (déterminant 2), ce qui prouve notre résultat.

## 4.6 Théorème de Sard

On présente le théorème de Sard, dont on se servira principalement pour trouver, étant donné une application lisse entre deux variétés  $M$  et  $N$ , un point  $y$  de  $N$  tel que  $f^{-1}(y)$  soit composé de points non critiques.

On rappelle les définitions suivantes : un point critique d'une application lisse  $f : M \rightarrow N$  est un point  $x$  de  $M$  tel que la différentielle en  $p$ ,  $(f_*)_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$  soit surjective. Une valeur critique est l'image d'un point critique. On dispose alors du théorème de Sard dans  $\mathbb{R}^n$  :

### **Théorème 4.11**

L'ensemble des valeurs critiques de  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  lisse est de mesure nulle.

**Démonstration :** Voir SARD 1942. ■

Le théorème ne s'étend pas directement à une application entre variétés : il faut donner un sens à la notion d'ensemble de mesure nulle sur une variété  $M$ . Un sous-ensemble  $S$  d'une variété  $M$  est dit de mesure nulle si on peut le recouvrir par une famille dénombrable d'ouverts d'un atlas  $\{U_i\}_i$  tels que  $\varphi_i(S \cap U_i)$  soit de mesure nulle dans  $\mathbb{R}^n$ . Avec cette définition, on obtient facilement la généralisation suivante :

### **Théorème 4.12**

L'ensemble des valeurs critiques de  $f : M \rightarrow N$  lisse est de mesure nulle.

## 5 Argument de Mayer-Vietoris et conséquences

Dans cette partie, on démontre plusieurs résultats portant sur la cohomologie de De Rham d'une variété grâce à l'argument de Mayer-Vietoris. Sommairement, il consiste en une récurrence sur le nombre d'ouverts d'un recouvrement de  $M$ , et à utiliser la suite de Mayer-Vietoris pour "transporter" des résultats sur des ouverts  $U$  et  $V$  à leur réunion  $U \cup V$ .

Pour pouvoir utiliser cet argument, nous aurons besoin de l'existence d'un bon recouvrement pour  $M$  :

### 5.1 Bon recouvrement

#### Définition 5.1 (Bon recouvrement)

Soit  $M$  une variété différentielle de dimension  $n$ . Un bon recouvrement de  $M$  est une famille d'ouverts  $\{U_i\}_i$  telle que leur union soit égale à  $N$  et telle que toute intersection finie  $U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_n}$  soit difféomorphe à  $\mathbb{R}^n$ .

**Exemple 7.** Le cercle admet le bon recouvrement suivant : on le recouvre par trois "segments" ouverts qui se recoupent deux à deux.

#### Théorème 5.2

Toute variété admet un bon recouvrement. Si la variété est compacte, alors on peut le choisir fini.

**Démonstration :** Voir BOTT et TU 2013, page 42. ■

### 5.2 Dimension finie de la cohomologie de De Rham

On illustre à présent l'argument de Mayer-Vietoris :

#### Proposition 5.3

Si  $M$  a un bon recouvrement fini (en particulier si  $M$  est compact), alors pour tout  $q$ ,  $H^q(M)$  est de dimension finie.

**Démonstration :** Par la suite de Mayer-Vietoris, on a

$$\dots \rightarrow H^{q-1}(U \cap V) \xrightarrow{f} H^q(U \cup V) \xrightarrow{g} H^q(U) \oplus H^q(V) \rightarrow \dots$$

d'où  $H^q(U \cup V) \simeq \ker g \oplus \text{Im } g \simeq \text{Im } f \oplus \text{Im } g$ . Ainsi, si  $H^{q-1}(U \cap V)$ ,  $H^q(U)$  et  $H^q(V)$  sont de dimension finie, alors  $H^q(U \cup V)$  l'est aussi. Raisonnons alors par récurrence sur le cardinal d'un bon recouvrement de  $M$ . Si  $M$  est difféomorphe à  $\mathbb{R}^n$ , alors sa cohomologie est de dimension finie par lemme de Poincaré. Supposons maintenant le résultat vraie pour toutes les variétés admettant un bon recouvrement fini avec  $p$  ouverts ou moins. Soit  $M$  une variété avec un bon recouvrement fini  $\{U_1, \dots, U_{p+1}\}$ . On pose  $U = U_{p+1}$ ,  $V = (U_1 \cup \dots \cup U_p) \cap U_{p+1}$ . Alors  $U$  admet comme bon recouvrement  $\{U_0 \cap U_{p+1}, \dots, U_p \cap U_{p+1}\}$  et  $V$  admet lui-même comme bon recouvrement. Par hypothèse de récurrence,  $U$  et  $V$  ont tous leurs espaces de cohomologie de dimension finie, et par la remarque de début de preuve,  $U \cup V = M$  a tous ses espaces de cohomologie de dimension finie. ■

*Remarque 16.* Cette démonstration reposant sur le nombre d'ouverts d'un recouvrement est ce qu'on appelle argument de Mayer-Vietoris. On va l'utiliser plusieurs fois encore par la suite.

*Remarque 17.* La même preuve montre que la cohomologie à support compact d'une variété avec un bon recouvrement est de dimension finie.

### 5.3 Dualité de Poincaré

Dans cette partie, on ne considère que des variétés orientables. On a déjà vu précédemment (Voir cohomologie et intégration) que l'intégration définissait une application linéaire sur  $H^n(M)$ . De la même manière, comme  $\wedge$  est une antidérivation, on dispose d'une application bilinéaire  $H^p(M) \times H^q(M) \rightarrow H^{p+q}(M)$ , ou de manière équivalente, d'une application linéaire  $H^p(M) \otimes H^q(M) \rightarrow H^{p+q}(M)$ . Si l'on combine les deux

applications, en restreignant le produit extérieur à une forme quelconque et une forme à support compact, on obtient, pour tout  $q$ , une application bilinéaire à valeurs dans  $\mathbb{R}$  :

$$H^q(M) \times H_c^{n-q}(M) \rightarrow \mathbb{R}, \quad ([\omega], [\alpha]_c) \mapsto \langle [\omega], [\alpha]_c \rangle = \int_M \omega \wedge \alpha.$$

( $\omega \wedge \alpha$  est à support compact donc est bien intégrable). La dualité de Poincaré affirme que dans le cas où  $M$  admet un bon recouvrement fini, cette application bilinéaire est non-dégénérée, c'est à dire que si  $\langle [\omega], [\alpha]_c \rangle = 0$  pour tout  $[\alpha]_c$  alors  $[\omega] = 0$ . De manière équivalente, la dualité de Poincaré affirme que l'on a un isomorphisme :

$$H^q(M) \rightarrow (H_c^{n-q}(M))^*, \quad [\omega] \mapsto \langle [\omega], \dots \rangle$$

Pour démontrer ce résultat, nous allons utiliser le lemme des cinq, ainsi que le lemme suivant :

**Lemme 5.4**

Le diagramme suivant, formé à partir des suites de Mayer-Vietoris

$$\begin{array}{cccccccc} \dots & \longrightarrow & H^q(U \cup V) & \longrightarrow & H^q(U) \oplus H^q(V) & \longrightarrow & H^q(U \cap V) & \xrightarrow{d^*} & H^{q+1}(U \cup V) & \longrightarrow & \dots \\ & & \otimes & & \otimes & & \otimes & & \otimes & & \\ \dots & \longleftarrow & H^{n-q}(U \cup V) & \longleftarrow & H^{n-q}(U) \oplus H^{n-q}(V) & \longleftarrow & H^{n-q}(U \cap V) & \xleftarrow{d_*} & H^{n-q-1}(U \cup V) & \longleftarrow & \dots \\ & & \downarrow \int_{U \cup V} & & \downarrow \int_U + \int_V & & \downarrow \int_{U \cap V} & & \downarrow \int_{U \cup V} & & \\ & & \mathbb{R} & & \mathbb{R} & & \mathbb{R} & & \mathbb{R} & & \end{array}$$

est commutatif au signe près, c'est à dire, par exemple, que pour  $\omega \in H^q(U \cup V), \tau = (\tau_U, \tau_V) \in H^{n-q}(U) \oplus H^{n-q}(V)$  (premier carré), on a

$$\int_{U \cup V} \omega \wedge (\tau_U + \tau_V) = \pm \left( \int_U \omega|_U \wedge \tau_U + \int_V \omega|_V \wedge \tau_V \right)$$

**Démonstration :** Les deux premiers carrés sont commutatifs, et le résultat est quasi-immédiat (par exemple, pour le premier carré, on développe le membre de gauche ci-dessus, puis on utilise le fait que  $\tau_U$  (resp.  $\tau_V$ ) a son support inclus dans  $U$  (resp.  $V$ ), pour restreindre l'intégrale à  $U$  ( $V$ ), puis finalement, restreindre  $\omega$  à  $U$  ou  $V$  ne change pas le résultat.

On démontre la commutativité au signe près du troisième carré, qui est moins évidente. On rappelle que  $d^*\omega$  est une forme sur  $H^{q+1}(U \cup V)$  telle que

$$(d^*\omega)|_U = -d(\rho_V \omega) \quad (d^*\omega)|_V = d(\rho_U \omega)$$

, et  $d_*\tau$  est une forme sur  $H^{n-q}(U \cap V)$  telle que

$$\begin{aligned} \text{Extension par 0 de } d_*\tau \text{ à } U &= -d(\rho_U \tau) \\ \text{Extension par 0 de } d_*\tau \text{ à } V &= d(\rho_V \tau) \end{aligned}$$

$\tau$  et  $\omega$  sont des formes fermées donc  $d(\rho_V \tau) = (d\rho_V)\tau$  et  $d(\rho_U \omega) = (d\rho_U)\omega$ .

On a alors

$$\int_{U \cap V} \omega \wedge d_*\tau = \int_{U \cap V} \omega \wedge (d\rho_V)\tau = (-1)^{\deg \omega} \int_{U \cap V} (d\rho_V)\omega \wedge \tau.$$

Maintenant, comme  $d^*\omega$  est à support dans  $U \cap V$  :

$$\int_{U \cup V} d^*\omega \wedge \tau = - \int_{U \cap V} (d\rho_V)\omega \wedge \tau.$$

D'où, en combinant les deux égalités,

$$\int_{U \cap V} \omega \wedge d_*\tau = (-1)^{\deg \omega + 1} \int_{U \cup V} d^*\omega \wedge \tau. \quad \blacksquare$$

Remarque 18. La commutativité au signe près du diagramme du lemme est équivalente à la commutativité au signe près du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & H^q(U \cup V) & \longrightarrow & H^q(U) \oplus H^q(V) & \longrightarrow & H^q(U \cap V) \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \dots & \longrightarrow & (H_c^{n-q}(U \cup V))^* & \longrightarrow & (H_c^{n-q}(U))^* \oplus (H_c^{n-q}(V))^* & \longrightarrow & (H_c^{n-q}(U \cap V))^* \longrightarrow \dots \end{array}$$

On finit alors la preuve de la dualité de Poincaré. Par lemme des cinq et le lemme ci-dessus, si la dualité de Poincaré est vraie pour  $U, V, U \cap V$ , alors elle est aussi vraie pour  $U \cup V$ . Pour initialiser la récurrence, on voit que la dualité de Poincaré est vraie sur  $\mathbb{R}^n$  par les deux versions du lemme de Poincaré. On termine alors par un argument de Mayer-Vietoris, comme précédemment, pour conclure.

### Corollaire 5.5

Si  $M$  est une variété connexe de dimension  $n$  avec un bon recouvrement fini, alors  $H_c^n(M) \simeq \mathbb{R}$ . Si de plus  $M$  est compacte, alors  $H^n(M) \simeq \mathbb{R}$

**Démonstration :**  $M$  admet un bon recouvrement fini donc tous les espaces de cohomologie considérés sont de dimension finie, en particulier, tout espace est isomorphe à son dual. Par dualité de Poincaré, on a

$$H^0(M) \simeq (H_c^n(M))^*.$$

Mais  $H^0(M) \simeq \mathbb{R}$  car  $M$  n'a qu'une seule composante connexe, d'où on obtient le résultat. Dans le cas où  $M$  est compact, on a  $H_c^n(M) \simeq H^n(M)$ , d'où le résultat. ■

## 5.4 Dual de Poincaré d'une sous-variété

Soit  $M$  une variété orientée de dimension  $n$  avec un bon recouvrement fini, et  $S$  une sous-variété de  $M$  fermée dans  $M$ , de dimension  $k$ . On va associer à  $S$  une unique classe de cohomologie  $[\eta_S]$  de  $H^{n-k}(M)$ , appelé dual de Poincaré de  $S$ , de la manière suivante. Soit  $i : S \rightarrow M$  l'inclusion de  $S$  dans  $M$ .  $i^*$  envoie les formes à support compact de  $M$  sur des formes à support compact de  $S$ . Pour tout  $\omega \in \Omega_c^k(M)$ , l'intégrale  $\int_S i^*(\omega)$  est bien définie, et par théorème de Stokes, l'intégration induit une application linéaire sur  $H_c^k(M)$ . Par dualité de Poincaré, à cette application linéaire sur  $H_c^k(M)$  correspond une unique classe  $[\eta_S] \in H^{n-k}(M)$ .

### Définition 5.6 (Dual de Poincaré)

Le dual de Poincaré de  $S$  est l'unique classe de cohomologie  $[\eta_S] \in H^{n-k}(M)$  telle que pour tout  $[\omega]_c \in H_c^k(M)$ ,

$$\int_S i^*(\omega) = \int_M \omega \wedge \eta_S.$$

Dans le cas où  $S$  est en plus compact, toute formes  $\omega \in \Omega_k(M)$  est envoyée sur une forme à support compact ; et on dispose d'une application linéaire sur  $H^k(M)$ . Par dualité de Poincaré, et le fait que tout espace vectoriel de dimension finie est isomorphe à son dual, à cette application linéaire sur  $H^k(M)$  correspond une unique classe  $[\eta_S]_c \in H_c^{n-k}(M)$ .

### Définition 5.7 (Dual de Poincaré compact)

Le dual de Poincaré compact de  $S$  est l'unique classe de cohomologie  $[\eta'_S] \in H_c^{n-k}(M)$  telle que pour tout  $[\omega] \in H^k(M)$ ,

$$\int_S i^*(\omega) = \int_M \omega \wedge \eta'_S.$$

Calculons le dual de Poincaré dans deux situations.

Dans le cas où  $M$  est une variété connexe et compacte et  $S$  réduit à un point,  $[\eta_S]$  est représentée par n'importe quelle  $n$ -forme fermée d'intégrale 1 sur  $M$  (car  $H^n(M) \simeq \mathbb{R}$ )

Considérons  $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, S = \{(x, 0) | x > 0\}$ . On pose  $r, \theta$  les coordonnées polaires sur  $M$ , et on va montrer que le dual de Poincaré de  $S$  est représenté par  $\frac{d\theta}{2\pi}$ . Soit  $\omega = f(r, \theta)dr + g(r, \theta)d\theta$  une forme fermée

à support compact. La condition d'être fermée implique que  $\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial g}{\partial r}$  (il suffit de différentier pour obtenir le résultat).

On souhaite montrer que

$$\int_S \omega = \int_M \omega \wedge \frac{d\theta}{2\pi}$$

c'est à dire que

$$\int_0^\infty f(r, 0) dr = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty f(r, \theta) dr d\theta.$$

Remarquons que cette dernière égalité est vraie dès lors que  $\int_0^\infty f(r, \theta) dr$  ne dépend pas de  $\theta$ . Montrons c'est pas le cas :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} \int_0^\infty f(r, \theta) dr &= \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial r}(r, \theta) dr \\ &= \int_0^\infty \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) dr \\ &= g(\infty, \theta) - g(0, \theta) = 0 \end{aligned}$$

car  $g$  est à support compact, d'où le résultat.

## 6 Cohomologie de De Rham et fibrés vectoriels

Nous nous intéressons désormais à la cohomologie de De Rham des fibrés, plus particulièrement des fibrés vectoriels. Nous allons tout d'abord énoncer et démontrer la formule de Künneth, qui sera notre dernière utilisation de l'argument de Mayer-Vietoris. Aussi, nous allons établir l'existence de l'isomorphisme de Thom, qui généralise le lemme de Poincaré pour la cohomologie à support compact. Néanmoins, on ne considérera plus la cohomologie à support compact sur le fibré, mais celle des formes dont le support est compact sur les fibres. L'isomorphisme de Thom énonce alors que cette cohomologie est celle de la base "décalée" de  $n$  dimensions, où  $n$  est la dimension de la fibre.

### 6.1 Fibrés, formule de Künneth et théorème de Leray-Hirsch

Dans cette partie, on introduit les produits fibrés et fibrés vectoriels, et on énonce deux résultats, la formule de Künneth et le théorème de Leray-Hirsch, qui donnent respectivement la cohomologie d'un produit de variétés  $M \times F$  et d'un fibré de base  $M$  et fibre  $F$  en fonction de la cohomologie de  $M$  et de  $F$ .

#### Définition 6.1 (Produit fibré)

Soit  $E, B, F$  des variétés différentielles, et  $G$  un groupe qui agit de manière lisse sur  $F$ . Une surjection lisse  $\pi : E \rightarrow B$  est un produit fibré de base  $B$ , fibre  $F$  et de groupe structurant  $G$  s'il existe un recouvrement ouvert  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  de  $B$  tel qu'on ait des homéomorphismes

$$\phi_\alpha : E|_{U_\alpha} \xrightarrow{\sim} U_\alpha \times F$$

(où  $E|_{U_\alpha} = \pi^{-1}(U_\alpha)$ ) et tel que les fonctions de transitions sont lisses et à valeur dans  $G$  :

$$g_{\alpha\beta}(x) = \phi_\alpha \phi_\beta^{-1}|_{\{x\} \times F} \in G.$$

On appelle  $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$  une trivialisations de  $E$ .

Si l'on suppose que la fibre  $F$  est  $\mathbb{R}^n$  (respectivement  $\mathbb{C}^n$ ) et que le groupe structurant est inclus dans  $GL(n, \mathbb{R})$  (respectivement  $GL(n, \mathbb{C})$ ), on dit que  $\pi$  est un fibré vectoriel réel (respectivement complexe) de rang  $n$ .

Pour  $x \in B$ , on notera  $E_x$  la fibre en  $x$ , c'est à dire  $\{x\} \times F \subset E$ .

*Remarque 19.* Par définition, l'ensemble sous-jacent à un produit fibré  $E$  de base  $B$  et de fibre  $F$  est en bijection ensembliste avec  $B \times F$ . On peut donc noter les points de  $E$   $(x, y)$  avec  $x \in B, y \in F$ .

**Exemple 8** (Ruban de Möbius). L'exemple typique de fibré vectoriel est le ruban de Möbius  $E$  : on prend comme base  $B$  le cercle, et comme fibre  $\mathbb{R}$ . La propriété d'être un fibré peut se traduire de la manière suivante : si l'on découpe le cercle selon nos ouverts  $U$  et  $V$ , de la figure 3, on a bien que  $E|_U$  et  $E|_V$  sont homéomorphes à  $U \times \mathbb{R}, V \times \mathbb{R}$ . Mais le ruban de Möbius n'est pas un cylindre  $S^1 \times \mathbb{R}$  : il y a une torsion, traduite par le fait que la fonction de transition  $g_{UV}$  "renverse" la fibre en chaque point. Pour montrer plus rigoureusement que le ruban de Möbius n'est pas difféomorphe au cylindre (et donc en particulier par isomorphe au cylindre en tant que fibré sur  $S^1$ , on définit plus loin les morphismes pour les fibrés), on peut comparer leurs cohomologies à support compact. On a montré dans l'exemple plus haut que celle du ruban de Möbius est nulle. Calculons  $H_c^2(S^1 \times \mathbb{R})$ . Le cylindre est orientable (produit de variétés orientables) et admet un bon recouvrement fini (sur le même principe que le cercle, on peut le "découper" en trois plans dont les intersections sont des plans). On peut donc utiliser la dualité de Poincaré pour voir que  $(H_c^2(S^1 \times \mathbb{R}))^*$  est isomorphe à  $H^0(S^1 \times \mathbb{R}) = \mathbb{R}$ . Les dimensions sont finies donc  $H_c^2(S^1 \times \mathbb{R}) = \mathbb{R}$ , ce qui conclut. On a montré par ailleurs que le ruban de Möbius n'est pas orientable (sinon, on pourrait appliquer la dualité de Poincaré et trouver la même cohomologie à support compact que le cylindre).

**Exemple 9** (Fibré tangent). Soit  $M$  une variété. En "recollant" à chaque point  $x$  d'une variété le plan tangent en  $x$ , on obtient un fibré vectoriel appelé fibré tangent de  $M$ , noté  $T_M$ . Soit  $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$  un atlas de  $M$ .  $\psi_\alpha$  induit une application :

$$(\psi_\alpha)_* : T_{U_\alpha} \xrightarrow{\sim} T_{\mathbb{R}^n}$$

qui donne une trivialisatoin du fibré tangent  $T_M$  : plus précisément, les fonctions de transitions du fibré tangent sont données par les matrices jacobiniennes des changements de coordonnées. Par exemple, si l'on reprend l'exemple du cercle (voir page 2), le fibré tangent du cercle a pour trivialisatoin  $\{U, V\}$ , avec pour fonction de transition :

$$h_{UV}(x, v) : T_{S^1|U} \cap T_{S^1|V} \rightarrow T_{S^1|U} \cap T_{S^1|V}, (x_U, v) \mapsto (x_V, -\frac{1}{x_U^2}v)$$

avec  $x_U, x_V$  les coordonnées sur  $U, V$ . On a l'égalité ci-dessus car les deux coordonnées sont liées par la relation  $x_U x_V = 1$ . (Pour plus de détails sur la construction du fibré tangent, voir LAFONTAINE 2012, page 111.)

### Définition 6.2 (Section d'un fibré)

Soit  $\pi : E \rightarrow M$  un fibré. Une section de  $E$  est une application lisse  $s : M \rightarrow E$  telle que  $\pi \circ s = \text{id}_M$ , c'est à dire qu'à un point  $x$  de  $M$ , on associe un point de la fibre en  $x$ .

Un fibré vectoriel admet toujours une section appelée section nulle envoyant  $x$  sur  $(x, 0)$ .

On énonce et démontre maintenant la formule de Künneth :

### Définition 6.3 (Formule de Künneth)

Soit  $M$  une variété avec un bon recouvrement fini,  $F$  une variété. Alors

$$H^*(M \times F) = H^*(M) \otimes H^*(F)$$

c'est à dire que

$$H^n(M \times F) = \bigoplus_{p+q=n} H^p(M) \otimes H^q(F).$$

**Démonstration :** On dispose de deux projections naturelles  $\pi : M \times F \rightarrow M, \rho : M \times F \rightarrow F$  qui donnent lieu à une application  $\Omega^*(M) \otimes \Omega^*(F) \rightarrow \Omega^*(M \times F), \omega \wedge \phi \mapsto \pi^* \omega \wedge \rho^* \phi$ , qui elle-même passe à la cohomologie :

$$\psi : H^*(M) \otimes H^*(F) \rightarrow H^*(M \times F).$$

On va montrer que  $\psi$  est un isomorphisme par argument de Mayer-Vietoris. Dans le cas où  $M = \mathbb{R}^n$ , le résultat est vrai par lemme de Poincaré.

Soient  $U, V$  deux ouverts de  $M$ ,  $n$  un entier fixé. Par la suite de Mayer-Vietoris, on a une suite exacte

$$\dots \rightarrow H^p(U \cup V) \rightarrow H^p(U) \oplus H^p(V) \rightarrow H^p(U \cap V) \rightarrow \dots$$

Tensoriser à droite par un espace vectoriel ne change pas l'exactitude de la suite, on a donc une suite exacte :

$$\dots \rightarrow H^p(U \cup V) \otimes H^{n-p}(F) \rightarrow (H^p(U) \otimes H^{n-p}(F)) \oplus (H^p(V) \otimes H^{n-p}(F)) \rightarrow H^p(U \cap V) \otimes H^{n-p}(F) \rightarrow \dots$$

En sommant pour  $p$  allant de 0 à  $n$ , on a toujours une suite exacte :

$$\dots \rightarrow \bigoplus_{p=0}^n H^p(U \cup V) \otimes H^{n-p}(F) \rightarrow \bigoplus_{p=0}^n (H^p(U) \otimes H^{n-p}(F)) \oplus (H^p(V) \otimes H^{n-p}(F)) \rightarrow \bigoplus_{p=0}^n H^p(U \cap V) \otimes H^{n-p}(F) \rightarrow \dots$$

En composant avec  $\psi$ , on obtient un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} \bigoplus_{p=0}^n H^p(U \cup V) \otimes H^{n-p}(F) & \rightarrow & \bigoplus_{p=0}^n (H^p(U) \otimes H^{n-p}(F)) \oplus (H^p(V) \otimes H^{n-p}(F)) & \rightarrow & \bigoplus_{p=0}^n H^p(U \cap V) \otimes H^{n-p}(F) \\ \downarrow \psi & & \downarrow \psi & & \downarrow \psi \\ H^n((U \cup V) \times F) & \longrightarrow & H^n((U \times F) \oplus H^n((U \times F)) & \longrightarrow & H^n((U \cap V) \times F) \end{array}$$

Par lemme des cinq, avec le diagramme précédent, si le théorème est vrai pour  $U, V$  et  $U \cap V$ , alors il est vrai pour  $U \cup V$ . On conclut alors par argument de Mayer-Vietoris pour obtenir le résultat pour toute variété avec un bon recouvrement fini. ■

Dans un cas particulier, le résultat s'étend pour les produits fibrés :

#### **Théorème 6.4 (Théorème de Leray-Hirsch)**

Soit  $E$  un produit fibré de base  $M$  et de fibre  $F$ , avec  $M$  une variété avec un bon recouvrement fini. S'il existe des classes de cohomologies globales sur  $E$ ,  $e_1, \dots, e_r$  telles que les restrictions de ces classes à chaque fibre engendrent librement la cohomologie de la fibre, alors  $H^*(E)$  est un module libre sur  $H^*(M)$  de base  $\{e_1, \dots, e_r\}$ , c'est à dire :

$$H^*(E) \simeq H^*(M) \otimes \mathbb{R}\{e_1, \dots, e_r\} \simeq H^*(M) \otimes H^*(F).$$

**Démonstration :** La preuve est la même, en remplaçant la définition de  $\psi$  par :

$$\psi : H^*(M) \otimes \mathbb{R}\{e_1, \dots, e_r\} \rightarrow H^*(E)$$

qui à  $\omega \otimes e_i$  associe  $\pi^*(\omega) \wedge e_i$ . ■

## **6.2 Propriétés des fibrés vectoriels**

On commence par définir les morphismes entre nos objets :

### **Définition 6.5**

Un morphisme de fibrés vectoriels  $f : E \rightarrow E'$ , avec  $E, E'$  deux fibrés sur une même base  $B$ , est une application lisse vérifiant les deux conditions suivantes :

- $f$  préserve les fibres :  $f(E_x) \subset f(E'_x)$
- $f$  est une application linéaire sur les fibres, c'est à dire, pour tout  $x \in B$ , l'application  $f_x : y \mapsto y'$  telle que  $f(x, y) = (x, y')$  est linéaire.

Un isomorphisme de fibrés vectoriels est donc un morphisme de fibrés vectoriels tel que l'application induite sur chaque fibre soit un isomorphisme d'espaces vectoriels. Un fibré est alors dit trivial s'il est isomorphe à  $M \times \mathbb{R}^n$ .

On introduit désormais les notions nécessaires pour démontrer l'isomorphisme de Thom.

### **Définition 6.6 (Réduction du groupe structurant et fibré orientable)**

Soit  $\pi : E \rightarrow B$  un fibré vectoriel, et  $H$  un sous-groupe de  $GL(n, \mathbb{R})$ . On dit que le groupe structurant de  $E$  peut être réduit à  $H$  s'il existe un fibré vectoriel  $\rho : E' \rightarrow B$  isomorphe à  $E$  dont le groupe structurant est inclus dans  $H$ .

Un fibré vectoriel est dit orientable si on peut réduire son groupe structurant au groupe  $GL^+(n, \mathbb{R})$ , le groupe des applications linéaires de déterminant strictement positif.

### Définition 6.7 (Trivialisation orientée)

Une trivialisation  $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$  d'un fibré vectoriel  $E$  est dite orientée si les fonctions de transitions associées  $g_{\alpha\beta}$  sont à déterminant positif.

Deux trivialisations orientées  $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$  et  $\{(V_\beta, \psi_\beta)\}_{\beta \in B}$  sont dites équivalentes si pour tout  $x \in U_\alpha \cap V_\beta$ ,  $\phi_\alpha \circ (\psi_\beta)^{-1}(x)$  a un déterminant positif. C'est bien une relation d'équivalence, et il est facile de voir qu'elle possède deux classes d'équivalences appelées orientations de  $E$ .

*Remarque 20.* On voit qu'une trivialisation ne peut être orientée que si le fibré est orientable : en effet, si une trivialisation est orientée, par définition, les fonctions de transitions sont à déterminant positif, donc le fibré est orientable.

*Remarque 21.* Bien que les notions soient liées, il ne faut pas confondre orientabilité de  $E$  en tant que variété et orientabilité de  $E$  en tant que fibré vectoriel. On dispose cependant du résultat suivant :

### Proposition 6.8

Si un fibré vectoriel  $E$  sur  $M$  est orientable (en tant que fibré) et  $M$  est une variété orientable alors  $E$  est orientable.

**Démonstration :** Voir BOTT et TU 2013, page 60. ■

*Remarque 22.* Soit  $M$  une variété orientée de dimension  $m$  avec un atlas orienté  $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$  et  $\pi : E \rightarrow M$  un fibré vectoriel de rang  $n$  orienté sur  $M$  avec trivialisation orientée  $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ . Alors  $E$  est une variété orientée avec atlas orientée

$$E|_{U_\alpha}, (\psi_\alpha \times \text{id}) \circ \phi_\alpha : E|_{U_\alpha} \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n.$$

L'orientation de  $E$  donnée par cet atlas est appelée orientation par produit local.

Nous ne rentrons pas dans le détail des constructions explicites, mais la plupart des constructions des espaces vectoriels s'étendent aux fibrés vectoriels : étant donnés deux fibrés  $E, E'$  sur  $M$ , on peut construire par exemple la somme directe  $E \oplus E'$  (dont la fibre en chaque point est  $E_x \oplus E'_x$  et dont les fonctions de transition consistent en appliquer chaque fonction de transition  $g_{\alpha\beta}$  et  $g'_{\alpha\beta}$  sur chaque membre de la fibre). De la même manière, on peut construire  $E \otimes E'$ , le dual  $E^*$ ,  $\text{Hom}(E, E')$ .

Étant donnés  $\pi : E \rightarrow M$  un fibré vectoriel et  $f : N \rightarrow M$  une application lisse entre variétés, on peut construire un fibré image réciproque  $\psi : f^{-1}E \rightarrow N$  dont la fibre en  $n$  est isomorphe à  $E_{f(n)}$ . Pour plus de détails sur ces constructions, voir BOTT et TU 2013, page 56.

Nous aurons besoin d'un dernier résultat :

### Théorème 6.9

Un fibré vectoriel sur une variété contractile est trivial.

**Démonstration :** Voir BOTT et TU 2013, page 59. ■

## 6.3 Cohomologie d'un fibré vectoriel

Notre but ici est de décrire la cohomologie d'un fibré vectoriel  $\pi : E \rightarrow M$  en fonction de celle de  $M$ .

### Proposition 6.10

$E$  et  $M$  ont même cohomologie à support quelconque :  $H^*(E) \simeq H^*(M)$ .

**Démonstration :** Par invariance par équivalence d'homotopie, il suffit de montrer que  $E$  et  $M$  ont même type d'homotopie. On note  $s : M \rightarrow E$ ,  $x \rightarrow (x, 0)$ , qui est une application lisse. On remarque que  $\pi \circ s = \text{id}_M$  et  $s \circ \pi = \text{id}_{(M \times \{0\})}$ .  $s$  plonge donc  $M$  dans  $E$ , et  $F : E \times [0, 1] \rightarrow E$ ,  $(x, y), t \rightarrow (x, ty)$  est une rétraction par déformation de  $E$  sur  $M \times \{0\}$ , d'où le résultat. ■

### Proposition 6.11

Si  $M$  est orientable et  $E$  est un fibré orientable, et  $E$  et  $M$  ont tous deux des bons recouvrements finis alors  $H_c^*(E) \simeq H_c^{*-n}(M)$

**Démonstration :** Par la proposition 6.8,  $E$  est orientable en tant que variété. On utilise alors la dualité de Poincaré pour passer à la cohomologie à support quelconque où l'on peut utiliser l'invariance par équivalence d'homotopie :

$$H_c^*(E) \simeq (H^{m+n-*}(E))^* \simeq (H^{m+n-*}(M))^* \simeq H_c^{*-n}(M). \quad \blacksquare$$

Néanmoins, le résultat n'est pas vrai en général. Considérons le ruban de Möbius. On a montré précédemment que sa cohomologie à support compact est nulle, alors que celle du cercle est isomorphe à  $\mathbb{R}$  en dimension 0 et 1. Le résultat est faux, bien que les deux variétés aient des bons recouvrements finis (prendre trois "segments" pour  $S^1$ , et trois "bandes" pour le ruban de Möbius).

## 6.4 Cohomologie à support compact sur la fibre

### 6.4.1 Isomorphisme de Thom

Nous allons introduire une troisième cohomologie pour les fibrés vectoriels, celle à support compact sur la fibre, et l'on va montrer l'existence d'un isomorphisme entre cette cohomologie et celle de  $M$ . Cet isomorphisme aura des répercussions ultérieures, notamment un lien direct avec le dual de Poincaré de sous-variétés.

Soit donc  $\pi : e \rightarrow M$  un fibré vectoriel orienté de rang  $n$ . On désigne par  $H_{cv}^*(E)$  l'espace des formes différentielles à support compact dans la fibre ; c'est à dire, la restriction d'une telle forme  $\omega$  à une fibre  $\mathbb{R}^n$  est à support compact, mais n'est pas nécessairement à support compact sur tout  $E$ . Par exemple, si l'on voit  $\mathbb{R}^2$  comme un fibré de rang 1 et de base  $\mathbb{R}$ , où les fibres sont verticales, une forme dont le support est inclus dans  $\mathbb{R} \times [-1, 1]$  est dans  $\Omega_{cv}^*(E)$ . A l'instar de  $\Omega^*(E)$  et  $\Omega_c^*(E)$ , on associe au complexe  $\Omega_{cv}^*(M)$  une cohomologie  $H_{cv}^*(M)$  appelée cohomologie à support compact sur la fibre.

Notre but est de démontrer le résultat suivant : il y a un isomorphisme entre  $H_{cv}^*(E)$  et  $H^{*-n}(M)$ . Pour le montrer, on va tout étendre l'application d'intégration sur la fibre (vue initialement lors de la démonstration du lemme de Poincaré pour la cohomologie de De Rham à support compact). Commençons tout d'abord par la définir pour le fibré trivial  $E = M \times \mathbb{R}^n$ . On note  $t_1, \dots, t_n$  les coordonnées de la fibre  $\mathbb{R}^n$ . Une forme différentielle sur  $E$  à support compact sur la fibre est combinaison linéaire des formes de deux types : celles ne contenant pas la  $n$ -forme produit  $dt_1 \dots dt_n$ , et celles la contenant. On définit alors  $\pi_*$  selon le type (dans la suite,  $\phi$  est une forme sur  $M$ , et  $f$  une fonction sur  $E$  à support compact sur la fibre) :

1.  $\pi_* : (\pi^* \phi) f(x, t_1, \dots, t_n) dt_{i_1} \dots dt_{i_r} \mapsto 0, r < n$
2.  $\pi_* : (\pi^* \phi) f(x, t_1, \dots, t_n) dt_1 \dots dt_n \mapsto \phi \int_{\mathbb{R}^n} f(x, t_1, \dots, t_n) dt_1 \dots dt_n$

Maintenant, définissons  $\pi_*$  dans le cas d'un fibré vectoriel orienté quelconque. On va se baser sur notre construction précédente pour définir localement  $\pi_*$ , et les différentes définitions vont se recoller pour donner lieu à une unique application bien définie sur  $\Omega_{cv}^*(E)$  tout entier.

Soit alors  $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$  une trivialisatation orientée de  $E$ . On rappelle que les  $U_\alpha$  sont des ouverts de  $M$ , et non de  $E$ . Soient  $x_1, \dots, x_m$  (respectivement  $y_1, \dots, y_m$ ) les coordonnées sur  $U_\alpha$  (respectivement  $U_\beta$ ), et  $t_1, \dots, t_m$  (respectivement  $u_1, \dots, u_m$ ) les coordonnées des fibres sur  $E|_{U_\alpha}$  (respectivement  $E|_{U_\beta}$ ).

Sur chaque ouvert  $U$  de la trivialisatation, le fibré  $E|_U$  est trivial : on peut donc définir  $\pi_*$  comme précédemment, c'est à dire, sur  $U_\alpha$ , les formes de type (1) sont envoyées sur 0, et les formes de type (2) sont envoyées sur

$$\pi_* : \omega_\alpha = \pi_* : (\pi^* \phi) f(x_1, \dots, x_m, t_1, \dots, t_n) dt_1 \dots dt_n \mapsto \phi \int_{\mathbb{R}^n} f(x, t) dt.$$

(où l'on a noté  $dt$  pour  $dt_1 \dots dt_n$ ).

#### Proposition 6.12

Sur  $U_\alpha \cap U_\beta$ , on a  $\pi_*(\omega_\alpha) = \pi_*(\omega_\beta)$  où  $\omega_\alpha, \omega_\beta$  sont des formes de type (2), avec

$$\omega_\alpha = \pi_* : (\pi^* \phi) f(x_1, \dots, x_m, t_1, \dots, t_n) dt_1 \dots dt_n$$

$$\omega_\beta = \pi_* : (\pi^* \tau) g(y_1, \dots, y_m, u_1, \dots, u_n) du_1 \dots du_n$$

**Démonstration :** La propriété pour la trivialisaton d'être orientée va être fondamentale : on va vouloir procéder à un changement de variable dans notre intégrale, et pour qu'il fonctionne comme on le souhaite, on va vouloir que le jacobien soit positif, ce qui va se traduire par la propriété de nos fonctions de transitions d'être à valeurs dans  $GL^+(n, \mathbb{R})$ .

On souhaite donc montrer  $\phi \int_{\mathbb{R}^n} f(x, t) dt = \tau \int_{\mathbb{R}^n} g(y, u) du$ . Par définition des formes différentielles sur une variété, on a  $\phi(x) = \tau(y)$ , et  $f(x, t) = g(y, t)$  pour tout  $t$ . Reste à montrer l'égalité des intégrales. Par hypothèse, il existe  $T \in GL^+(n, \mathbb{R})$  tel que  $(t_1, \dots, t_n) = T(u_1, \dots, u_n)$  (comme le fibré est trivial sur  $U_\alpha \cap U_\beta$ , quitte à considérer le fibré isomorphe  $(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^n$ ,  $T$  ne dépend pas de  $x$ ). On a alors  $dt_1 \dots dt_n = \det(T) du_1 \dots du_n$  d'où

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f(x, t) dt &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x, t) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x, T(u)) \det(T) du \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x, T(u)) |\det(T)| du \text{ car } \det(T) > 0 \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x, u) du \text{ par changement de variable} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g(y, u) du \end{aligned}$$

L'intégration sur la fibre  $\pi_*$  se comporte bien vis à vis de la différentielle extérieure  $d$  :

**Proposition 6.13**

$\pi_*$  et  $d$  commutent.

**Démonstration :** Voir BOTT et TU 2013, page 62.

*Remarque 23.* Le fait que les deux opérations commutent entraîne notamment que  $\pi_*$  envoie les formes fermées (respectivement exactes) sur des formes fermées (respectivement exactes), donc induit une application en cohomologie que l'on note aussi  $\pi_* : \pi_* : H_{cv}^*(E) \rightarrow H^{*-n}(M)$ .

On démontre maintenant la formule de projection, qui va nous servir à démontrer l'isomorphisme de Thom :

**Proposition 6.14 (Formule de projection)**

1. Soit  $\pi : E \rightarrow M$  un fibré vectoriel orienté de rang  $n$ ,  $\tau$  une forme sur  $M$  et  $\omega$  une forme sur  $E$  à support compact sur la fibre. Alors

$$\pi_*((\pi^* \tau) \wedge \omega) = \tau \wedge \pi_* \omega.$$

2. Supposons de plus que  $M$  soit orientée, de dimension  $m$ , que  $\omega \in \Omega_{cv}^q(E)$ ,  $\tau \in \Omega_c^{m+n-q}(M)$ . Alors, si l'on munit  $E$  de l'orientation par produit local, on a :

$$\int_E (\pi^* \tau) \wedge \omega = \int_M \tau \wedge \pi_* \omega.$$

**Démonstration :** 1. Deux formes sont égales si et seulement si elles le sont localement ; il suffit donc de montrer la propriété pour les sous-fibrés donnés par la trivialisaton. Or ces derniers sont isomorphes au fibré trivial, il suffit donc de montrer la propriété pour le fibré trivial  $M \times \mathbb{R}^n$ . Si  $\omega$  est une forme de type (1),  $\omega = (\pi^* \phi) f(x, t_1, \dots, t_n) dt_1 \dots dt_r$ ,  $r < n$ , alors :

$$\pi_*((\pi^* \tau) \wedge \omega) = \pi_*((\pi^* \tau \wedge \phi) f(x, t_1, \dots, t_n) dt_1 \dots dt_r) = 0 = \tau \wedge \pi_* \omega.$$

Si  $\omega$  est une forme de type (2),  $\omega = (\pi^* \phi) f(x, t_1, \dots, t_n) dt_1 \dots dt_n$ , alors :

$$\pi_*((\pi^* \tau) \wedge \omega) = \tau \wedge \phi \int_{\mathbb{R}^n} f(x, t) dt_1 \dots dt_n = \tau \wedge \pi_* \omega.$$

2. Soit  $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$  une trivialisaton orientée de  $E$ , et  $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in A}$  une partition de l'unité subordonnée à  $\{U_\alpha\}$ . On a  $\omega = \sum_\alpha \rho_\alpha \omega$  avec  $\rho_\alpha \omega$  à support dans  $U_\alpha$ . On a alors

$$\int_E (\pi^* \tau) \wedge \omega = \sum_\alpha \int_{E|_{U_\alpha}} (\pi^* \tau) \wedge (\rho_\alpha \omega)$$

et

$$\int_M \tau \wedge \pi_* \omega = \sum_{\alpha} \int_{U_{\alpha}} \tau \wedge \pi_*(\rho_{\alpha} \omega).$$

Il suffit donc de démontrer le résultat pour un fibré trivial. La preuve se déroule alors identiquement à la preuve de la première partie de la proposition. ■

La preuve du lemme de Poincaré pour la cohomologie à support compact se transpose quasi mot par mot (voir BOTT et TU 2013, page 38) pour montrer :

**Proposition 6.15**

L'intégration sur la fibre  $\pi_*$  donne un isomorphisme :

$$\pi_* : H_{cv}^*(M \times \mathbb{R}^n) \rightarrow H^{*-n}(M).$$

On démontre maintenant l'isomorphisme de Thom :

**Théorème 6.16 (Isomorphisme de Thom)**

Si un fibré vectoriel  $\pi : E \rightarrow M$  de rang  $n$  est orientable, avec  $M$  admettant un bon recouvrement fini, alors

$$H_{cv}^*(E) \simeq H^{*-n}(M).$$

**Démonstration :** On va à nouveau utiliser un argument de Mayer-Vietoris. Soient  $U$  et  $V$  deux ouverts de  $M$ . En utilisant une partition de l'unité, on a à nouveau une suite de Mayer-Vietoris :

$$0 \rightarrow \Omega_{cv}^*(E|_{U \cup V}) \rightarrow \Omega_{cv}^*(E|_U) \oplus \Omega_{cv}^*(E|_V) \rightarrow \Omega_{cv}^*(E|_{U \cap V}) \rightarrow 0.$$

En combinant la suite longue qu'on tire de cette suite courte, et la suite longue de Mayer-Vietoris pour la cohomologie à support quelconque de  $M$ , on obtient :

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & H_{cv}^*(E|_{U \cup V}) & \longrightarrow & H_{cv}^*(E|_U) \oplus H_{cv}^*(E|_V) & \longrightarrow & H_{cv}^*(E|_{U \cap V}) \xrightarrow{d^*} H_{cv}^{*+1}(E|_{U \cup V}) \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow \pi_* & & \downarrow \pi_* & & \downarrow \pi_* & & \downarrow \pi_* \\ \dots & \longrightarrow & H^{*-n}(U \cup V) & \longrightarrow & H^{*-n}(U) \oplus H^{*-n}(V) & \longrightarrow & H^{*-n}(U \cap V) \xrightarrow{d^*} H^{*-n+1}(U \cup V) \longrightarrow \dots \end{array}$$

Le diagramme est commutatif ; on montre la commutativité du troisième carré. En utilisant la définition de l'application  $d^*$  de  $H^{*-n}(U \cap V)$  dans  $H^{*-n+1}(U \cup V)$ , on a sur  $V$  (la démonstration est identique pour  $U$ ), en utilisant la formule de projection :

$$\pi_*(d^* \omega) = \pi_*((\pi_* d\rho_U) \wedge \omega) = (d\rho_U) \wedge \pi_* \omega = d^*(\pi_* \omega).$$

Le diagramme est donc bien commutatif. Par lemme des cinq, si l'isomorphisme de Thom est vrai pour  $U, V$  et  $U \cap V$  alors il est vrai pour  $U \cup V$ . Pour initialiser la récurrence, montrons que l'isomorphisme de Thom est vrai dans le cas d'un fibré sur  $\mathbb{R}^n$ . Tout fibré sur  $\mathbb{R}^n$  est trivial (car  $\mathbb{R}^n$  contractile). L'isomorphisme de Thom est alors vrai par la proposition précédente. On conclut alors par argument de Mayer-Vietoris. ■

**6.4.2 Classe de Thom**

Dans cette partie, même si nous ne le rappelons pas toujours, les bases de nos fibrés vectoriels sont supposés avoir un bon recouvrement fini, afin de vérifier les hypothèses de l'isomorphisme de Thom.

Soit  $\pi : E \rightarrow M$  un fibré vectoriel orienté, avec  $M$  une variété connexe. Notons  $\mathcal{T} : H^*(M) \xrightarrow{\sim} H_{cv}^{*+n}$  l'isomorphisme de Thom. On sait que  $H^0(M)$  est isomorphe à  $\mathbb{R}$ . Considérons alors l'image de 1 par l'isomorphisme  $\mathcal{T}$  :

**Définition 6.17 (Classe de Thom)**

On appelle classe de Thom d'un fibré vectoriel orientable  $\pi : E \rightarrow M$  sur une variété connexe  $M$  l'image de  $1 \in H^0(M)$  par l'isomorphisme de Thom  $\mathcal{T}(1)$ . On la note  $\Phi(E)$  (ou  $\Phi$  lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté).

On a donc  $\pi_*\Phi = 1$ , donc par la formule de projection

$$\pi_*(\pi^*\omega \wedge \Phi) = \omega \wedge \pi_*(\Phi) = \omega.$$

Donc l'isomorphisme de Thom, inverse de  $\pi_*$  est donné par :

$$\mathcal{T}(\omega) = \pi_*(\omega) \wedge \Phi.$$

### Proposition 6.18

La classe de Thom  $\Phi$  sur un fibré vectoriel orienté  $E$  de rang  $n$  est l'unique classe de cohomologie de  $H_{cv}^n(E)$  qui se restreint au générateur de  $H_c^n(F) \simeq \mathbb{R}$  sur chaque fibre  $F$  (on rappelle que le générateur est l'unique forme d'intégrale 1 sur  $F$ ).

**Démonstration :** Comme  $\pi_*(\Phi) = 1$ , par définition de l'intégration sur la fibre  $\pi_*$ ,  $\Phi|_F$  est la classe d'une forme à support compact d'intégrale 1. Réciproquement, si  $\Phi' \in H_{cv}^n(E)$  se restreint à un générateur sur chaque fibre, alors  $\pi_*(\Phi') = 1$ . En appliquant  $\mathcal{T}$ , on obtient alors  $\Phi = \Phi'$ . ■

On calcule désormais la classe de Thom de la somme directe de deux fibrés  $E$  et  $F$  en fonction des classes de Thom de  $E$  et  $F$  :

### Proposition 6.19

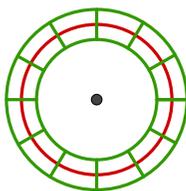
Si  $E, F$  sont deux fibrés vectoriels orientés  $E$  et  $F$ , et  $\pi_1, \pi_2$  sont les projections de  $E \oplus F$  vers  $E, F$ , alors la classe de Thom de  $E \oplus F$  est  $\Phi(E \oplus F) = \pi_1^*\Phi(E) \wedge \pi_2^*\Phi(F)$ .

**Démonstration :** Notons  $m, n$  le rang de  $E, F$ .  $\pi_1^*\Phi(E) \wedge \pi_2^*\Phi(F)$  est une classe de  $H_{cv}^{m+n}(E \oplus F)$  dont la restriction à chaque fibre est un générateur de la cohomologie de la fibre, puisque l'isomorphisme  $H_c^{m+n}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n) \simeq H_c^m(\mathbb{R}^m) \otimes H_c^n(\mathbb{R}^n)$  est donné par le produit extérieur. On conclut alors par la proposition précédente. ■

### 6.4.3 Classe de Thom et dualité de Poincaré

On considère désormais une variété  $M$  de dimension  $n$  orientée et avec un bon recouvrement fini. On va ici mettre en évidence le lien entre le dual de Poincaré d'une sous-variété fermée  $S \subset M$  de dimension  $k$  et la classe de Thom d'un certain fibré de base  $S$ . On définit tout l'abord la notion de voisinage tubulaire de  $S$  : c'est un voisinage ouvert de  $S$  dans  $M$  difféomorphe à un fibré vectoriel de rang  $n - k$  sur  $S$ .

Figure 5 – Voisinage tubulaire du cercle inclus dans le plan privé d'un point



On introduit aussi la notion de suite exacte de fibrés vectoriels. Soient  $E, F, G$  des fibrés vectoriels sur  $M$ . Une suite :

$$0 \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow 0$$

est dite exacte si pour tout  $p \in M$ , la suite d'espaces vectoriels

$$0 \rightarrow E_p \rightarrow F_p \rightarrow G_p \rightarrow 0$$

est exacte.

On définit aussi le fibré normal de  $S \subset M$  :

**Définition 6.20 (Fibré normal)**

Soit  $S$  une sous-variété de  $M$ . Le fibré normal  $N_{S|M}$  (noté  $N$  ou  $N_S$  s'il n'y a pas d'ambiguïté) est l'unique fibré vectoriel sur  $S$  défini par la suite exacte

$$0 \rightarrow T_S \rightarrow T_M|_S \rightarrow N \rightarrow 0$$

où  $T_M|_S$  est la restriction du fibré tangent de  $M$  à  $S$ .

On peut voir  $N$  comme le quotient de  $T_M|_S$  par  $T_S$ .

**Théorème 6.21**

Toute sous-variété  $S \subset M$  admet un voisinage tubulaire  $T$ , et tout voisinage tubulaire  $T$  de  $S$  est difféomorphe au fibré normal de  $S$  dans  $M$ .

**Démonstration :** Voir GUILLEMIN et POLLACK 2010, page 76 ■

**Définition 6.22 (Orientation de la somme directe, orientation du fibré normal)**

- Soient  $A, B$ , deux fibrés vectoriels orientés avec trivialisations orientés  $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}, \{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}$ . L'orientation somme directe de  $A \oplus B$  est donnée par la trivialisation  $\{(U_\alpha, \phi_\alpha \oplus \psi_\alpha)\}$
- $S$  et  $M$  sont orientables, donc  $N_S$  étant le quotient de  $T_M|_S$  par  $T_S$ , l'est aussi. On a  $N_S \oplus T_S = T_M|_S$ , et l'on munit  $N_S$  d'une orientation telle que  $T_M|_S$  soit muni de l'orientation somme directe.

Notons  $j$  l'inclusion de  $S$  dans  $M$ . Appliquons l'isomorphisme de Thom à un voisinage tubulaire  $T$  de  $S$  (qu'on rappelle difféomorphe au fibré normal de  $S$  dans  $M$ ). On obtient une suite d'applications :

$$H^*(S) \xrightarrow{\sim} H_{cv}^{*+n-k}(T) \xrightarrow{j_*} H^{*+n-k}(M)$$

où la première application envoie  $\omega$  sur  $\pi^*(\omega) \wedge \Phi$ ,  $\Phi$  la classe de Thom de  $T$ .  $j_*$  est l'extension par 0 des formes à support compact sur la fibre dans  $T$ , bien défini car une forme à support compact sur la fibre de  $T$  s'annule près de la frontière de  $T$ . On va alors démontrer le résultat suivant :

**Proposition 6.23**

Le dual de Poincaré de  $S$  est la classe de Thom du fibré normal de  $S$ , c'est à dire

$$\eta_S = j_*(\Phi)$$

**Démonstration :** Il suffit de montrer que  $j_*(\Phi)$  vérifie la propriété sur les intégrales définissant  $\eta_S$ . Soit  $\omega$  une  $k$ -forme fermée à support compact dans  $M$ ,  $i : S \rightarrow T$  l'inclusion de  $S$  dans  $T$ , vue comme la section nulle du fibré  $\pi : T \rightarrow S$ .  $\pi$  est une rétraction par déformation de  $T$  sur  $S$  donc  $\pi^*$  et  $i^*$  sont des inverses en cohomologie, c'est à dire que sur l'espace des formes,  $\omega$  et  $\pi^*i^*\omega$  diffèrent d'une forme exacte  $\omega = \pi^*i^*\omega + d\tau$ . Calculons alors

$$\begin{aligned} \int_M \omega \wedge j_*\Phi &= \int_T \omega \wedge \Phi \text{ car } j_*\Phi \text{ est à support dans } T \\ &= \int_T (\pi^*i^*\omega + d\tau) \wedge \Phi = \int_T (\pi^*i^*\omega) \wedge \Phi \text{ par formule de Stokes} \\ &= \int_S i^*\omega \wedge \pi_*\Phi = \int_S i^*\omega \text{ par formule de projection et } \pi_*\Phi = 1 \end{aligned}$$

Remarquons désormais que dans le cas d'un fibré vectoriel  $\pi : E \rightarrow M$ ,  $M$  se plonge dans  $E$  via la section nulle, et le fibré normal de  $M$  dans  $E$  est  $E$  lui-même. Résumons alors nos résultats :

**Corollaire 6.24**

- Le dual de Poincaré d'une sous-variété  $S \subset M$  ( $M$  orienté) et la classe de Thom du fibré normal de  $S$  peuvent être représentés par les mêmes formes.
- Le dual de Poincaré de la section nulle d'un fibré  $\pi : E \rightarrow M$  et la classe de Thom de  $E$  peuvent être représentés par les mêmes formes.

Utilisons ce résultat pour démontrer une égalité sur le dual de Poincaré :

### Définition 6.25

Deux sous-variétés  $R$  et  $S$  de  $M$  s'intersectent transversalement si en tout point  $x$  de  $R \cap S$ ,  $T_x R + T_x S = T_x M$ .

### Proposition 6.26

Si deux sous-variétés  $R$  et  $S$  de  $M$  s'intersectent transversalement, alors on a

$$\eta_{R \cap S} = \eta_R \wedge \eta_S$$

**Démonstration :**  $R$  et  $S$  s'intersectent transversalement, donc on a l'égalité suivante sur les codimensions  $\text{codim } R \cap S = \text{codim } R + \text{codim } S$ , ce qui implique que  $N_{R \cap S} = N_R \oplus N_S$ . On utilise alors notre propriété sur la classe de Thom d'une somme directe  $\Phi(N_{R \cap S}) = \Phi(N_R) \wedge \Phi(N_S)$ . Le résultat suit alors de la proposition précédente. ■

On peut aussi montrer l'égalité  $\eta_{f^{-1}(S)} = f^* \eta_S$  (voir BOTT et TU 2013, page 69).

## 6.5 Forme angulaire globale, classe d'Euler et classe de Thom

On va ici définir la forme angulaire globale et la classe d'Euler d'un fibré vectoriel réel de rang 2 (on peut aussi les définir en rang quelconque, mais cela requiert plus de constructions, et nos résultats suivants ne nécessitent que la construction en rang 2).

Notons  $\pi : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow S^1$  la projection classique. Dans la suite, on dit qu'une  $n$ -forme sur une variété  $M$  orientée de dimension  $n$  est positive si elle est dans la classe d'orientation de  $M$ . Choisissons sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  l'orientation donnée par  $dx dy$ , et sur  $S^1$  l'orientation  $[\sigma]$  telle que  $dr \wedge \pi^* \sigma$  soit positive.  $\psi = \pi^* \sigma$  est alors une forme de  $H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$  appelée forme angulaire globale. Soit  $\rho : r \mapsto \rho(r)$  définie sur  $[0, +\infty[$  une fonction  $C^\infty$  à support compact croissante valant 1 en 0, 0 en  $\infty$ , et constante dans un voisinage de 0. On a  $d\rho = \rho'(r) dr$  une forme à support compact positive d'intégrale 1 sur  $\mathbb{R}$ , d'où  $(d\rho) \wedge \psi$  est un générateur de  $H_c^2(\mathbb{R}^2)$  (la forme est bien définie en 0 car  $\rho'$  est nulle dans un voisinage de 0). On a  $(d\rho) \wedge \psi = d(\rho \wedge \psi)$  car  $\psi$  est fermée.

On énonce un résultat portant sur le groupe structurant d'un fibré vectoriel, utile par la suite :

### Proposition 6.27

Le groupe structurant d'un fibré vectoriel  $E$  peut être réduit à  $O(n)$ . Si de plus, le fibré est orienté, il peut être réduit à  $SO(n)$ .

**Démonstration :** Voir BOTT et TU 2013, page 55. ■

On définit maintenant la forme angulaire globale sur un fibré orienté  $E$  de rang 2 sur une variété  $M$ . Notons  $E^0$  le complémentaire de l'image par la section nulle de  $M$  ( $E^0$  est un produit fibré de fibre  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ). On peut munir  $E$  d'une structure Riemannienne (voir BOTT et TU 2013, page 55) de telle manière que le rayon  $r$  ait un sens sur  $E$ . Si l'on arrive à déterminer une forme  $\psi$  de  $E^0$  dont la restriction à chaque fibre est la forme angulaire de  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , il n'est alors pas difficile de voir que  $d(\rho \wedge \psi)$  représente la classe de Thom.

Construisons alors une telle forme  $\psi$ . Soit  $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$  une trivialisations de  $E$ . Le fibré restreint à chaque  $U_\alpha$  est trivial donc, en utilisant la structure Riemannienne de  $E$ , on peut choisir sur chaque  $U_\alpha$  une base orthonormée (c'est à dire deux sections  $s_1, s_2 : U_\alpha \rightarrow E$  telles que pour tout  $x \in U_\alpha$ ,  $s_1(x), s_2(x)$  soit une base orthonormée de  $E_x$ ). On peut alors définir sur  $E^0|_{U_\alpha}$  des coordonnées polaires  $r_\alpha, \theta_\alpha$ . Sur  $U_\alpha \cap U_\beta$ , les rayons  $r_\alpha$  et  $r_\beta$  sont égaux, mais  $\theta_\alpha$  et  $\theta_\beta$  diffèrent d'une rotation. Par orientabilité de  $E$ , on peut parler du sens trigonométrique dans chaque fibre. On peut alors définir l'angle de rotation dans le sens trigonométrique entre les coordonnées de  $U_\alpha$  et les coordonnées de  $U_\beta$  :

$$\theta_\beta = \theta_\alpha + \pi^*(\varphi_{\alpha\beta}).$$

Remarquons que passer de  $\alpha$  à  $\beta$  puis de  $\beta$  à  $\gamma$  revient à passer directement de  $\alpha$  à  $\gamma$ . On a donc que :

$$\varphi_{\alpha\beta} + \varphi_{\beta\gamma} - \varphi_{\alpha\gamma} \in 2\pi\mathbb{Z}.$$

En particulier, la quantité précédente est constante, et donc sa dérivée extérieure est nulle. On peut donc montrer :

**Proposition 6.28**

Il existe des 1-formes  $\zeta_\alpha$  sur les  $U_\alpha$  telles que  $\frac{1}{2\pi}d\varphi_{\alpha\beta} = \zeta_\beta - \zeta_\alpha$ .

**Démonstration :** On pose  $\zeta_\alpha = \sum_\gamma \epsilon_\gamma d\varphi_{\alpha\gamma}$  avec  $\epsilon_\gamma$  partition de l'unité associée à  $\{U_\gamma\}$ . On a alors

$$\zeta_\beta - \zeta_\alpha = \sum_\gamma \epsilon_\gamma (d\varphi_{\beta\gamma} - d\varphi_{\alpha\gamma}) = d\varphi_{\alpha\beta} \sum_\gamma \epsilon_\gamma = d\varphi_{\alpha\beta}.$$

Il suffit alors de multiplier par  $\frac{1}{2\pi}$  pour obtenir le résultat souhaité. ■

Par la proposition précédente, sur  $U_\alpha \cap U_\beta$ , on a  $d\zeta_\alpha = d\zeta_\beta$ . Les  $d\zeta_\alpha$  se recollent donc sur  $M$  pour donner une 2-forme globale  $e$ . Cette forme est fermée, mais pas toujours exacte (les  $\zeta_\alpha$  ne se recollent pas forcément eux-mêmes). La classe de cohomologie de  $e$  dans  $H^2(M)$  est appelée classe d'Euler de  $E$ , notée  $e(E)$ .

**Proposition 6.29**

La classe de cohomologie de  $e$  ne dépend pas du choix des  $\zeta$  dans notre construction

**Démonstration :** Voir BOTT et TU 2013, page 72. ■

En dérivant l'expression définissant l'angle  $\varphi_{\alpha\beta}$ , on obtient, sur  $E^0|_{U_\alpha \cap U_\beta}$  :

$$\frac{d\theta_\alpha}{2\pi} - \pi^*(\zeta_\alpha) = \frac{d\theta_\beta}{2\pi} - \pi^*(\zeta_\beta)$$

. Ces formes se recollent donc pour former une 1-forme globale sur  $E^0$ , dont on peut vérifier que la restriction à chaque fibre est la forme angulaire. C'est donc la forme  $\psi$  que l'on cherchait à définir. En dérivant à nouveau, on obtient :

$$d\psi = -\pi^*(e).$$

On peut obtenir une expression calculatoire de  $e$  :

**Proposition 6.30**

Soient  $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{SO}(2)$  les fonctions de transitions du fibré (par la proposition sur le groupe structurant, on peut choisir les fonctions de transition à valeurs dans  $\text{SO}(2)$ ). En associant à  $g_{\alpha\beta}$  un nombre complexe par l'isomorphisme de groupe entre  $\text{SO}(2)$  et  $\text{U}(1)$ , on a, sur  $U_\alpha$ , que  $e(E)$  est représentée par la forme

$$-\frac{1}{2\pi i} \sum_\gamma d(\epsilon_\gamma d \log g_{\gamma\alpha}).$$

**Démonstration :** Voir BOTT et TU 2013, page 73. ■

Cette dernière égalité permet de prouver :

**Proposition 6.31**

La classe d'Euler est fonctorielle, c'est à dire, si  $E$  est un fibré orienté de rang 2 sur  $M$ , et  $f : N \rightarrow M$  un morphisme de variétés, alors  $e(f^{-1}(E)) = f^*e(E)$

**Démonstration :** L'affirmation découle directement de l'égalité précédente et du fait que les fonctions de transitions de  $f^{-1}E$  sont données par  $f^*g_{\alpha\beta}$ . ■

On a donc que la classe de Thom est représentée par la forme

$$d(\rho(r) \wedge \psi) = d\rho(r) \wedge \psi - \rho(r)\pi^*e$$

Par cette égalité, on peut montrer le résultat suivant :

**Proposition 6.32**

L'image réciproque de la classe de Thom par la section nulle est la classe d'Euler.

**Démonstration :** Soit  $s : E \rightarrow M$  la section nulle. On a

$$s^* \Phi = d(\rho(0)) \wedge s^* \psi - \rho(0) s^* \pi^* e = e$$

car  $\rho(0) = -1$  dans un voisinage de 0, et  $s^* \pi^* = (\pi \circ s)^* = \text{id}$ . ■

On termine en calculant la classe d'Euler de deux fibrés :

**Proposition 6.33**

Considérons les espaces  $\mathbb{P}^1$  et  $\mathbb{P}^2$ .  $\mathbb{P}^1$  s'injecte dans  $\mathbb{P}^2$ , via  $f([x_0 : x_1]) = [x_0, x_1, 0]$ . Soit  $N$  le fibré normal de  $\mathbb{P}^1$  dans  $\mathbb{P}^2$ . Alors la classe d'Euler de  $N$  est égale au générateur de  $H^2(\mathbb{P}^1)$  (qui est isomorphe à  $\mathbb{R}$  car  $\mathbb{P}^1$  est difféomorphe à  $S^2$ ).

**Démonstration :** On note  $U_0, U_1$  le recouvrement standard de  $\mathbb{P}^1$ . On a comme fonction de transition :

$$g_{01} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}, z \rightarrow \frac{1}{z}.$$

Déterminons maintenant les fonctions de transitions sur le fibré tangent  $T_{\mathbb{P}^1}$ . C'est un fibré de rang 1 complexe, dont la fonction de transition est donnée par la différentielle de  $g_{01}$  :

$$h_{01} : T|_{U_0 \cap U_1} \rightarrow T|_{U_0 \cap U_1}, ([z_0 : z_1], v) \mapsto ([z_0 : z_1], -\frac{z_0^2}{z_1^2} v)$$

En reprenant le même raisonnement avec  $\mathbb{P}^2$ , on peut voir que  $T'$  est un fibré vectoriel de rang 2 complexe dont la fonction de transition est

$$j_{01} : T'|_{U_0 \cap U_1} \rightarrow T'|_{U_0 \cap U_1}, ([z_0 : z_1], (v_1, v_2)) \mapsto ([z_0 : z_1], (-\frac{z_0^2}{z_1^2} v_1, \frac{z_0}{z_1} v_2))$$

En quotientant, on voit donc que le fibré normal  $N$  est un fibré complexe de rang 1 dont la fonction de transition est :

$$k_{01} : N|_{U_0 \cap U_1} \rightarrow N|_{U_0 \cap U_1}, ([z_0 : z_1], v) \mapsto ([z_0 : z_1], \frac{z_0}{z_1} v)$$

Notons  $z = \frac{z_0}{z_1}$  la coordonnée sur  $U_1$  (que l'on identifie à  $\mathbb{C}$ ). Par l'expression calculatoire de la classe d'Euler,  $e(N)$  sur  $U_1$  est

$$e(N) = -\frac{1}{2\pi i} d\rho_0 d \log g_{01} = -\frac{1}{2\pi i} d\rho_0 d \log z.$$

où  $\rho_0$  vaut 1 dans un voisinage de 0, et 0 dans un voisinage de l'infini ( $\rho_0$  correspond à une certaine partition de l'unité).

Soit  $D$  un disque dans  $\mathbb{C}$  de rayon assez grand pour que  $\text{supp } \rho_0 \subset D$ . On note  $C$  la frontière de  $D$ . Soit  $A_r$  la couronne donc le cercle extérieure est  $C$  et le cercle intérieure est  $B_r$ , le cercle de rayon  $r$ . En tant que frontière de  $A_r$  vue comme variété,  $C$  est orienté dans le sens trigonométrique, et  $B_r$  dans le sens opposé.

On a alors

$$\int_{\mathbb{P}^1} e(N) = -\frac{1}{2\pi i} \int_C d\rho_0 d \log z.$$

Calculons cette dernière intégrale :

$$\begin{aligned} \int_C d(\rho_0 \frac{dz}{z}) &= \lim_{r \rightarrow 0} \int_{A_r} d(\rho_0 \frac{dz}{z}) = \lim_{r \rightarrow 0} \left( \int_C \rho_0 \frac{dz}{z} + \int_{B_r} \rho_0 \frac{dz}{z} \right) \text{ par théorème de Stokes} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \int_{B_r} \frac{dz}{z} = -2\pi i \end{aligned}$$

où l'on a un signe moins à cause de l'orientation sur  $B_r$ . Finalement, on trouve

$$\int_{\mathbb{P}^1} e(N) = 1$$

ce qui conclut la démonstration ■

### Proposition 6.34

On appelle sous-fibré universel de  $\mathbb{P}^n\mathbb{C}$  le sous-fibré  $S$  de  $\mathbb{P}^n\mathbb{C}$  défini par

$$S = \{(l, v) : v \in l\}$$

c'est à dire que la fibre en un point  $l$  de l'espace projectif complexe (qui est une droite complexe) est ce même point vu comme droite. On a que la classe d'Euler de ce fibré  $e(S)$  dans le cas  $n = 1$  est égale à l'opposé du générateur de  $H^2(\mathbb{P}^2)$ .

**Démonstration :** On traduit la définition de  $S$  en coordonnées : Un point  $P$  de  $S$  est de la forme  $([z_0 : z_1], v)$  avec  $v = \lambda(z_0, z_1)$ . Dans  $U_0$ , en posant  $z' = \frac{z_1}{z_0}$  la coordonnée de  $U_0$ , on peut donc écrire  $P = ([1 : z'], \lambda_0(1, z'))$ . Si  $P \in U_0 \cap U_1$ , dans les coordonnées de  $U_1$ , on a  $P = ([z : 1], \lambda_1(z, 1))$  avec  $zz' = 1$ . On voit donc que  $\lambda_1 = z' \times \lambda_0 = \frac{\lambda_0}{z}$ . La fonction de transition du fibré est donc

$$g_{01} : S|_{U_0 \cap U_1} \rightarrow S|_{U_0 \cap U_1}, ([z_0 : z_1], v) \mapsto ([z_0 : z_1], \frac{z_1}{z_0} v)$$

D'où l'expression de  $e(S)$  sur  $U_1$  :

$$e(S) = -\frac{1}{2\pi i} d\rho_0 d \log g_{01} = -\frac{1}{2\pi i} d\rho_0 d \log \frac{1}{z} = \frac{1}{2\pi i} d\rho_0 d \log z.$$

Et en reprenant exactement le même raisonnement qu'à l'exemple précédent, on a

$$\int_{\mathbb{P}^1} e(S) = -1 \quad \blacksquare$$

## 6.6 Caractéristique d'Euler et classe d'Euler

On va montrer ici que le nombre d'Euler  $\int_M e(T_M)$  (l'intégrale de la classe d'Euler du fibré tangent) est égal à la caractéristique d'Euler de  $M$  (défini comme  $\chi(M) = \sum_q (-1)^q \dim H^q(M)$ ). On suppose la variété  $M$  compacte, orientée. On suppose aussi qu'elle est de dimension 2 - pour que le fibré tangent soit de rang 2 - bien que cette hypothèse ne soit pas nécessaire.

Soit  $\{\omega_i\}$  des formes telles que  $[\omega_i]$  soit une base de l'espace vectoriel  $H^*(M)$ . Par dualité de Poincaré, on dispose d'une base duale  $\{\tau_j\}$ , c'est à dire que pour tout  $i, j$ , on a

$$\int_M \omega_i \wedge \tau_j = \delta_{ij}.$$

Soient  $\pi_1, \pi_2$  les projections de  $M \times M$  sur  $M$ . Par la formule de Künneth, la cohomologie de  $M \times M$  est donnée par

$$H^*(M \times M) = H^*(M) \otimes H^*(M).$$

Donc une base de  $H^*(M \times M)$  est donnée par les classes de cohomologie des  $\pi_1^* \omega_i \wedge \pi_2^* \tau_j$ , pour tout  $i$  et  $j$ . Écrivons le dual de Poincaré  $\eta_\Delta$  de la diagonale  $\Delta$  dans  $M \times M$  dans cette base :

$$\eta_\Delta = \sum_{i,j} c_{ij} \pi_1^* \omega_i \wedge \pi_2^* \tau_j$$

### Lemme 6.35

$$\eta_\Delta = \sum_i (-1)^{\deg \omega_i} \pi_1^* \omega_i \wedge \pi_2^* \tau_i$$

**Démonstration :** On va calculer  $\int_\Delta \pi_1^* \tau_k \wedge \pi_2^* \omega_l$  pour tout  $k, l$  de deux manières différentes :

L'inclusion  $i : M \rightarrow \Delta$  est un difféomorphisme, donc on a l'égalité suivante :

$$\int_\Delta \pi_1^* \tau_k \wedge \pi_2^* \omega_l = \int_M i^* (\pi_1^* \tau_k \wedge \pi_2^* \omega_l).$$

Mais le produit extérieur et l'application image réciproque commutent, et  $i^* \circ \pi^* = (\pi \circ i)^* = \text{id}^* = \text{id}$  d'où

$$\int_{\Delta} \pi_1^* \tau_k \wedge \pi_2^* \omega_l = \int_M \tau_k \wedge \omega_l = (-1)^{(\deg \tau_k)(\deg \omega_l)} \delta_{ij}.$$

On calcule ensuite l'intégrale en utilisant la définition du dual de Poincaré d'une sous-variété :

$$\begin{aligned} \int_{\Delta} \pi_1^* \tau_k \wedge \pi_2^* \omega_l &= \int_{M \times M} \pi_1^* \tau_k \wedge \pi_2^* \omega_l \wedge n_{\Delta} = \sum_{i,j} c_{ij} \int_{M \times M} \pi_1^* \tau_k \wedge \pi_2^* \omega_l \wedge \pi_1^* \omega_i \wedge \pi_2^* \tau_j \\ &= \sum_{i,j} c_{ij} (-1)^{(\deg \tau_k + \deg \omega_l)(\deg \omega_i)} \int_{M \times M} \pi_1^* (\omega_i \wedge \tau_k) \pi_2^* (\omega_l \wedge \tau_j) \\ &\text{(où le signe vient de l'interversion des formes dans le produit)} \\ &= (-1)^{(\deg \tau_k + \deg \omega_l)(\deg \omega_i)} c_{kl}. \end{aligned}$$

d'où finalement

$$c_{kl} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq l \\ (-1)^{\deg \omega_k} & \text{si } k = l \end{cases}$$

### Lemme 6.36

Le fibré normal  $N_{\delta}$  de la diagonale dans  $M \times M$  est isomorphe au fibré tangent  $T_{\Delta}$ .

**Démonstration :** Le fibré normal est défini par la suite courte exacte :

$$0 \rightarrow T_{\Delta} \rightarrow T_{M \times M}|_{\Delta} \rightarrow N_{\Delta} \rightarrow 0.$$

$T_{\Delta}$  est isomorphe à  $T_M$  (car la diagonale et  $M$  sont difféomorphes)  $T_{M \times M}|_{\Delta}$  est isomorphe à  $T_M \oplus T_M$  (car le fibré tangent de  $M \times M$  est le produit du fibré tangent de  $M$  par lui-même). De plus, on a trivialement

$$[0 \rightarrow T_M \rightarrow T_M \oplus T_M \rightarrow T_M \rightarrow 0.$$

Par les isomorphismes précédents, on obtient  $N_{\Delta}$  isomorphe à  $T_M$ .

### Proposition 6.37

$$\int_M e(T_M) = \sum_q (-1)^q \dim H^q(M)$$

**Démonstration :** On calcule  $\int_{\Delta} \eta_{\Delta}$  de deux manières différentes :

$$\int_{\Delta} \eta_{\Delta} = \int_{\Delta} \Phi(N_{\Delta})$$

car le dual de Poincaré d'une variété fermée orientée est représentée par la même forme que la classe de Thom d'un voisinage tubulaire de  $\Delta$  dans  $M \times M$ . Or, la classe de Thom restreinte à la section nulle est la classe d'Euler (car l'image réciproque par la section nulle de la classe de Thom est la classe d'Euler) donc

$$\int_{\Delta} \eta_{\Delta} = \int_{\Delta} e(N_{\Delta}) = \int_{\Delta} e(T_{\Delta}) = \int_M e(T_M).$$

Maintenant, en utilisant le lemme précédent, on a :

$$\begin{aligned} \int_{\Delta} \eta_{\Delta} &= \sum_i (-1)^{\deg \omega_i} \int_{\Delta} \pi_1^* \omega_i \wedge \pi_2^* \tau_i = \sum_i (-1)^{\deg \omega_i} \int_M i^* (\pi_1^* \omega_i \wedge \pi_2^* \tau_i) \\ &= \sum_i (-1)^{\deg \omega_i} \int_M \omega_i \wedge \tau_i = \sum_i (-1)^{\deg \omega_i} \\ &= \sum_q (-1)^q \dim H^q(M) \text{ (en séparant les } \omega_i \text{ selon chaque } H^q) \\ &= \chi(M). \end{aligned}$$

## 7 Classes de Chern

Dans cette partie, nous introduisons les classes de Chern, un ensemble de classes de cohomologies d'une variété  $M$  associées à un fibré complexe  $E$  sur  $M$ , qui fournissent des informations sur  $E$  : elles sont naturellement transformées par les morphismes de fibrés vectoriels ; et forment donc un ensemble d'invariants de fibrés complexes.

Pour définir les classes de Chern, on commence tout d'abord par définir la première classe de Chern d'un fibré complexe en droites, puis, à partir de cette construction, on définit les  $n$  classes de Chern d'un fibré complexe de rang  $n$  en toute généralité.

### 7.1 La première classe de Chern d'un fibré complexe en droites

On rappelle qu'un fibré complexe de rang  $n$  est un produit fibré dont la fibre est  $\mathbb{C}^n$  et de groupe structurant  $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ . Tout fibré complexe  $E$  de rang  $n$  possède une structure sous-jacente de fibré réel de rang  $2n$ . De plus, tout comme tout fibré vectoriel réel peut avoir son groupe structurant réduit à  $\mathrm{O}(n)$ , on peut montrer qu'on peut réduire le groupe structurant d'un fibré complexe à  $\mathrm{U}(n)$ . De plus, par l'isomorphisme entre  $\mathrm{U}(1)$  et  $\mathrm{SO}(2)$ , on obtient une bijection entre les fibrés complexes en droites et les fibrés réels orientés de rang 2. On définit alors la première classe de Chern d'un fibré complexe en droite  $L$  comme la classe d'Euler du fibré réel sous-jacent  $L_{\mathbb{R}}$  de rang 2 :

$$c_1(L) := e(L_{\mathbb{R}})$$

#### Proposition 7.1

Soient  $L, L'$  deux fibrés complexes en droites. On a alors

- $c_1(L \otimes L') = c_1(L) + c_1(L')$
- $c_1(L^*) = -c_1(L)$

**Démonstration :** – Rappelons que les fonctions de transitions de  $L \otimes L'$  sont  $\{g_{\alpha\beta} \times g'_{\alpha\beta}\}$  où  $g_{\alpha\beta}$  (respectivement  $g'_{\alpha\beta}$ ) sont les fonctions de transitions de  $L$  (respectivement  $L'$ ). En utilisant la formule donnant explicitement la classe d'Euler (citer la formule), on obtient alors le résultat voulu.

– On a  $L \oplus L^* = \mathrm{Hom}(L, L)$  et ce dernier fibré dispose d'une section ne s'annulant pas donnée par l'identité. Ce fibré est donc trivial et sa classe d'Euler est nulle. Par le résultat précédent,  $c_1(L) + c_1(L^*) = 0$ , ce qui prouve l'assertion. ■

Avant de poursuivre, donnons la cohomologie de l'espace projectif complexe  $\mathbb{P}^n \mathbb{C}$ .

#### Proposition 7.2

L'anneau de cohomologie de  $\mathbb{P}^n \mathbb{C}$  est  $\mathbb{R}[x]/(x^{n+1})$ , où  $x$  peut être pris comme la première classe de Chern du dual du fibré tautologique sur  $\mathbb{P}^n \mathbb{C}$ .

**Démonstration :** On a déjà calculé la cohomologie de  $\mathbb{P}^n : H^{2k}(\mathbb{P}^n) = \mathbb{R}$  pour  $0 \leq 2k \leq n$  et 0 sinon. Le résultat est donc vrai dès lors que  $x$  est une classe non nulle de  $H^2(\mathbb{P}^n)$ . On ne démontre pas que la première classe de Chern du dual du fibré tautologique convient ; voir BOTT et TU 2013, page 268. ■

### 7.2 Projectivisé d'un fibré vectoriel et classes de Chern

Soit  $\rho : E \rightarrow M$  un fibré vectoriel complexe avec fonctions de transitions  $g_{\alpha\beta}$ . On désigne la fibre au point  $p$  par  $E_p$  et le groupe projectif par  $\mathrm{PGL}(n, \mathbb{C})$ . Le projectivisé de  $E$ ,  $\pi : P(E) \rightarrow M$ , est le produit fibré dont la fibre en chaque point  $p$  est l'espace projectif  $P(E_p)$ , et les fonctions de transitions sont les fonctions à valeurs dans  $\mathrm{PGL}(n, \mathbb{C})$  induites par les  $g_{\alpha\beta}$ . Un point de  $P(E)$  est une droite  $l_p$  de la fibre  $E_p$ .

On dispose de plusieurs fibrés complexes sur  $P(E)$ , résumé sur le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & S & \longrightarrow & \pi^{-1}E & \longrightarrow & Q \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & & P(E) & \xrightarrow{\pi} & E \\
 & & & & & & \downarrow \rho \\
 & & & & & & M
 \end{array}$$

$\pi^{-1}E$  est l'image réciproque par  $\pi$  du fibré  $\rho : E \rightarrow M$  : la fibre en un point  $l_p$  de  $P(E)$  est l'espace  $E_p$  entier. Quand restreint à une fibre  $\pi^{-1}(p)$ , ce fibré est trivial :

$$\pi^{-1}E|_{P(E)_p} = P(E)_p \times E_p$$

car  $\rho : E_p \rightarrow \{p\}$  est un fibré trivial.

$S$  est le sous-fibré universel sur  $P(E)$  défini par

$$S = \{(l_p, v) \in \pi^{-1}E : v \in l_p\}.$$

$Q$  est déterminé par la suite exacte

$$0 \rightarrow S \rightarrow \pi^{-1}E \rightarrow Q \rightarrow 0.$$

Soit  $x = c_1(S^*)$ .  $x$  est une classe de cohomologie de  $H^2(P(E))$ . On peut remarquer que la restriction du sous-fibré universel  $S$  sur  $P(E)$  à une fibre  $P(E)_p$  est le sous-fibré universel  $S'$  de  $P(E_p)$ . Alors, par le caractère fonctoriel de la classe d'Euler, il s'ensuit que  $c_1(S')$  est la restriction de  $x$  à  $P(E_p)$ . Les classes de cohomologies  $1, x, \dots, x^{n-1}$  sont donc des classes globales dont la restriction à chaque fibre  $P(E_p)$  engendre librement la cohomologie de la fibre. Par théorème de Leray-Hirsch, la cohomologie  $H^*(P(E))$  est un module libre sur  $H^*(M)$  de base  $\{1, x, \dots, x^{n-1}\}$ .  $x^n$  s'écrit donc de manière unique comme une combinaison linéaire d'éléments de cette base à coefficients dans  $H^*(M)$ , et on définit alors :

### Définition 7.3 (Classes de Chern)

Les classes de Chern de  $E$  sont les éléments  $c_1(E) \in H^2(M), \dots, c_n(E) \in H^{2n}(M)$  tels que

$$x^n + c_1(E)x^{n-1} + \dots + c_n(E) = 0.$$

On appelle classe de Chern totale et on note  $c(E)$  la forme suivante :

$$c(E) = 1 + c_1(E) + \dots + c_n(E).$$

*Remarque 24.* Dans l'équation ci-dessus, on a écrit  $c_i(E)$ , mais la véritable écriture serait plutôt  $\pi^*c_i(E)$  : il faut ramener les classes de cohomologie de  $M$  à  $P(E)$  pour que l'expression ait du sens.

*Remarque 25.* La cohomologie de  $P(E)$  est alors donnée par  $H^*(P(E)) = H^*(M)[x]/(x^n + c_1(E)x^{n-1} + \dots + c_n(E))$  avec  $x = c_1(S^*)$ . On peut y voir une généralisation de la cohomologie de l'espace projectif complexe :  $\mathbb{C}^{n+1}$  est un fibré sur un point, dont l'anneau de cohomologie est  $\mathbb{R}$  ; et on va voir un peu plus loin que les classes de Chern d'un fibré trivial sont nulles. On retrouve alors bien l'expression de la cohomologie de  $P^n\mathbb{C}$ .

*Remarque 26.* Les deux définitions de  $c_1$  pour un fibré complexe en droites coïncident : voir BOTT et TU 2013 page 271.

### Proposition 7.4 (Fonctorialité des classes de Chern)

Soit  $f$  un morphisme entre deux variétés  $Y$  et  $X$ , et  $E$  un fibre vectoriel complexe sur  $X$ . Alors  $c(f^{-1}E) = f^*c(E)$ .

**Démonstration :** On sait déjà que la première classe de Chern d'un fibré en droites est fonctoriel (classe d'Euler). Soit  $S_E$  le sous-fibré universel sur  $P(E)$ . On a  $f^{-1}P(E) = P(f^{-1}E)$  et  $f^{-1}S_E^* = S_{f^{-1}E}^*$ . donc, en posant  $x_E = c_1(S_E^*)$ , on a  $x_{f^{-1}E} = f^*x_E$ . On applique désormais  $f^*$  à l'égalité suivante :

$$x_E^n + c_1(E)x_E^{n-1} + \dots + c_n(E) = 0.$$

On obtient

$$x_{f^{-1}E}^n + f^*c_1(E)x_{f^{-1}E}^{n-1} + \dots + f^*c_n(E) = 0$$

et par unicité des coefficients, on obtient :

$$c_i(f^{-1}E) = f^*c_i(E).$$

■

### Proposition 7.5

Soit  $E = M \times \mathbb{C}^n$  le fibré trivial de rang  $n$  sur  $M$ . Alors toutes les classes de Chern de  $E$  sont nulles.

**Démonstration :** Soit  $f : M \rightarrow \{p\}$  une application constante, et  $E'$  le fibré trivial de rang  $n$  sur  $\{p\}$ .  $H^{2i}(\{p\}) = 0$  pour  $i \in \{1, \dots, n\}$  donc les classes de Chern de  $E'$  sont nulles. Il n'est pas difficile de voir que  $E$  est l'image réciproque de  $E'$  par  $f$ , et donc, par functorialité des classes de Chern, on obtient  $c_i(E) = 0$  pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ . ■

## 7.3 Principe de partition et formule de Whitney

Le but de cette partie est de montrer la formule de Whitney : pour deux fibrés complexes  $E, E'$  sur  $M$ , on a  $c(E \oplus E') = c(E)c(E')$  ( $c(E)$  est la classe totale de Chern  $1 + c_1(E) + \dots + c_n(E)$ ).

Pour démontrer ce résultat, on introduit le principe de partition, qui s'interprète de la manière suivante : une égalité polynômiale en les classes de Chern est vraie pour tout fibré complexe si et seulement si elle est vraie pour toute somme de fibrés en droites. Un sens de l'équivalence est trivial, l'autre nécessite la construction d'une variété appelée variété scindée, que l'on va introduire maintenant.

### Définition 7.6 (Variété scindée)

Soit  $\rho : E \rightarrow M$  un fibré vectoriel complexe de rang  $n$  sur  $M$ . Une variété scindée de  $E$  est une variété  $F(E)$  muni d'un morphisme  $\sigma : F(E) \rightarrow M$  tel que :

- l'image réciproque de  $E$  par  $\sigma$  se scinde en une somme directe de fibrés en droites  $\sigma^{-1}E = L_1 \oplus \dots \oplus L_n$ .
- $\sigma^*$  est un morphisme injectif de  $H^*(M)$  dans  $H^*(F(E))$ .

### Proposition 7.7

Pour tout fibré vectoriel complexe  $E \rightarrow M$ , il existe une variété scindée  $F(E)$  pour  $E$ .  
De plus, pour un nombre fini de fibrés vectoriels complexes  $E_1, \dots, E_n$  sur  $M$ , il existe une variété (qu'on appelle aussi scindée)  $N$  telle que l'image réciproque de chaque  $E_i$  se scinde en une somme directe de fibrés en droites et telle que  $H^*(M)$  s'injecte via  $\sigma$  dans  $H^*(N)$ .

**Démonstration :** Voir BOTT et TU 2013, page 273. ■

On présente à présent le principe de partition. Supposons que l'on souhaite démontrer une égalité polynômiale en les classes de Chern pour tous fibrés  $E$  et  $F$  :

$$P(c(E), c(F), c(E \otimes F)) = 0$$

( $P$  ne dépend pas de  $E$  ou  $F$ ). Soit  $\sigma : N \rightarrow M$  une variété scindée pour  $E$  et  $F$ . Par functorialité des classes de Chern, et parce que  $\sigma^*$  est un morphisme d'algèbre, on a :

$$\sigma^*P(c(E), c(F), c(E \otimes F)) = P(c(\sigma^{-1}E), c(\sigma^{-1}F), c(\sigma^{-1}E \otimes \sigma^{-1}F)).$$

Avec  $\sigma^{-1}E$  et  $\sigma^{-1}F$  des sommes directes de fibrés en droites. Supposons que notre égalité polynômiale soit vraie pour toute somme de fibrés en droites. Alors

$$\sigma^*P(c(E), c(F), c(E \otimes F)) = 0$$

et par injectivité de  $\sigma^*$ , on obtient finalement :

$$P(c(E), c(F), c(E \otimes F)) = 0.$$

Illustrons ce principe en démontrant la formule du produit de Whitney :

### Proposition 7.8 (Formule du produit de Whitney)

Soient  $E, E'$  deux fibrés vectoriels complexes sur  $M$ . On a alors

$$c(E \oplus E') = c(E)c(E').$$

Nous aurons besoin de deux lemmes pour démontrer ce résultat.

### Lemme 7.9

Soit  $X$  un espace topologique normal (pour tous fermés disjoints  $F$  et  $G$ , il existe deux ouverts disjoints  $U$  et  $V$  tels que  $F \subset U$ ,  $G \subset V$ ). et  $U_1, \dots, U_n$  un recouvrement ouvert fini de  $X$ . Alors il existe un recouvrement ouvert fini  $V_1, \dots, V_n$  de  $X$  avec, pour tout  $i$ ,  $\overline{V}_i \subset U_i$ .

**Démonstration :** Montrons tout d'abord que si un espace topologique  $X$  est normal alors pour tout fermé  $F$  et tout ouvert  $O$  contenant  $F$ , il existe un ouvert  $U$  tel que :

$$F \subset U \subset \overline{U} \subset O.$$

Soient  $F, O$  tels que définis au-dessus.  $F$  et  $O^c$  sont deux fermés disjoints, donc il existe  $U, V$  ouverts disjoints tels que  $F \subset U$ ,  $O^c \subset V$ . Il suffit maintenant de montrer que  $\overline{U} \subset O$ .

$U$  et  $V$  sont disjoints donc  $U \subset V^c$ , et en passant cette dernière inclusion à l'adhérence, on a  $\overline{U} \subset V^c$ . En passant  $O^c \subset V$  au complémentaire, on a  $V^c \subset O$ , ce qui nous donne l'inclusion recherchée.

Démontrons maintenant le lemme. Posons  $F = (U_2 \cup \dots \cup U_n)^c$ ,  $O = U_1$ . Il existe  $V_1$  ouvert tel que  $F \subset V_1 \subset \overline{V}_1 \subset U_1$ .  $\{V_1, U_2, \dots, U_n\}$  est donc bien un recouvrement ouvert de  $X$ . En répétant l'argument  $n$  fois, on obtient le recouvrement souhaité. ■

### Lemme 7.10

Soit  $M$  une variété,  $U$  ouvert de  $M$  et  $A$  fermé inclus dans  $U$ . Il existe une fonction lisse  $f$  qui vaut 1 sur  $A$  et 0 en dehors de  $U$ .

**Démonstration :** Une variété différentielle est un espace topologique normal (par théorème de plongement de Whitney, toute variété différentielle s'injecte dans un espace  $\mathbb{R}^n$ , donc est métrique, donc est normale).

Soit alors  $U$  ouvert tel que  $A \subset U \subset \overline{U} \subset O$  (caractérisation de la preuve précédente).  $\{U, \overline{U}^c\}$  est un recouvrement ouvert de  $M$ . Soit  $\rho_U, \rho_a$  une partition de l'unité associée. Montrons que  $\rho_U$  répond à notre problème.

$A \subset \overline{U}$  donc  $\overline{U}^c \subset A^c$ , c'est à dire  $A$  et  $\overline{U}^c$  sont disjoints : nécessairement,  $\rho_U \equiv 1$  sur  $A$ . De plus,  $U \subset O$  donc  $O^c \subset U^c$ , c'est à dire  $O^c$  et  $U$  sont disjoints :  $\rho_U$  est nulle en dehors de  $O$ . ■

**Démonstration formule de Whitney :** Par principe de partition, il suffit de montrer le résultat pour une somme directe de fibrés en droites  $L_1 \oplus \dots \oplus L_n$ . Par abus de notation, on note  $\pi^{-1}E = L_1 \oplus \dots \oplus L_n$  l'image réciproque de  $E$  par  $\pi$  (où  $\pi : P(E) \rightarrow M$  est le fibré projectivisé de  $E$ ). Sur  $P(E)$ , le sous-fibré universel  $S$  se scinde.

$$\begin{array}{ccc} S \subset \pi^{-1}E & & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ P(E) & \xrightarrow{\pi} & M \end{array}$$

Soit  $s_i$  la projection de  $S$  sur  $L_i$ .  $s_i$  est une section de  $\text{Hom}(S, L_i) = S^* \otimes L_i$ . En tout point  $y$  de  $P(E)$ , la fibre  $S_y$  est un espace de dimension 1 de  $(\pi^{-1}E)_y$ , donc  $s_1, \dots, s_n$  ne peuvent être simultanément nulles. Les espaces

$$U_i = \{y \in P(E) : s_i(y) \neq 0\}$$

forment donc un recouvrement ouvert de  $P(E)$ . Sur  $U_i$ ,  $(S^* \otimes L_i)|_{U_i}$  est un fibré vectoriel de rang 1 admettant par définition une section non nulle :  $(S^* \otimes L_i)|_{U_i}$  est donc trivial. Soit  $\xi$  une 2-forme globale de  $P(E)$  représentant  $c_1(S^* \otimes L_i)$ . On a alors  $\xi_i|_{U_i} = d\omega_i$  avec  $\omega_i$  une 1-forme sur  $U_i$  (car le fibré est trivial sur  $U_i$ , donc les classes de Chern sont nulles). Notre but est de trouver une forme globale sur  $P(E)$  qui représente  $c_1(S^* \otimes L_i)$  et qui s'annule sur  $U_i$ .  $\xi_i - d\omega_i$  ne convient pas car  $\omega_i$  n'est définie que sur  $U_i$ . Mais nos deux lemmes nous permettent de trouver une telle forme :

Par le premier lemme, il existe un recouvrement ouvert  $\{V_1, \dots, V_n\}$  de  $M$  tel que pour tout  $i$ ,  $\overline{V}_i \subset U_i$ . Par le deuxième lemme, pour tout  $i$ , il existe une fonction lisse  $\rho_i$  valant 1 sur  $\overline{V}_i$  et 0 en dehors de  $U_i$ .

$\rho_i \omega_i$  est donc une forme globale égale à  $\omega_i$  sur  $V_i$  donc  $\xi_i - d(\rho_i \omega_i)$  est une forme globale représentant  $c_1(S^* \otimes L_i)$  et nulle sur  $V_i$ .

Comme les  $V_i$  recouvrent  $P(E)$ , on a

$$\prod_{i=1}^n c_1(S^* \otimes L_i) = 0.$$

En posant  $x = c_1(S^*)$ , on a alors :

$$\prod_{i=1}^n (x + c_1(L_i)) = x^n + \sigma_1 x^{n-1} + \dots + \sigma_n = 0$$

où  $\sigma_i$  est le  $i$ -ème polynôme élémentaire symétrique en  $c_1(L_1), \dots, c_1(L_n)$ . Mais la deuxième partie de l'égalité est exactement l'égalité définissant les classes de Chern, d'où  $\sigma_i = c_i(E)$  et

$$c(E) = 1 + c_1(E) + \dots + c_n(E) = 1 + \sigma_1 + \dots + \sigma_n = \prod_{i=1}^n (1 + c_1(L_i)) = \prod_{i=1}^n c(L_i)$$

d'où le résultat. ■

## 7.4 Formule du genre et classes de Chern

Grâce aux classes de Chern, on va démontrer le résultat suivant :

### Proposition 7.11

Soit  $C \subset \mathbb{P}^2\mathbb{C}$  une courbe complexe lisse telle que  $C$  est l'ensemble des zéros d'un polynôme homogène  $f \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$  de degré  $d$ . Alors  $d(3-d) = \chi(C)$  (caractéristique d'Euler de  $C$ ).

**Démonstration :** On a une suite exacte

$$0 \longrightarrow S \longrightarrow U \longrightarrow Q \longrightarrow 0$$

où  $S, U, Q$  sont respectivement le fibré tautologique, le fibré trivial complexe de rang 3 et le quotient de  $U$  par  $S$  sur  $\mathbb{P}^2$ . On peut tensoriser à droite par  $S^*$  puis restreindre notre suite exacte à la courbe  $C$  pour obtenir

$$0 \longrightarrow (\mathbb{P}^2 \times \mathbb{C})_C \longrightarrow (U \otimes S^*)_C \longrightarrow (T_{\mathbb{P}^2})|_C \longrightarrow 0.$$

(pour le troisième membre, un vecteur tangent de  $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$  en  $l$  droite de  $\mathbb{C}^3$  peut être vu comme un "mouvement infinitésimal" de la droite  $l$ . Un tel mouvement correspond à une application linéaire de  $l$  dans l'espace quotient  $\mathbb{C}^3/l$ , qui peut être représenté par un supplémentaire de  $l$  dans  $\mathbb{C}^3$ . on a donc  $T_{\mathbb{P}^2} \simeq \text{Hom}(S, Q) = Q \otimes S^*$ ). On a une deuxième suite exacte :

$$0 \longrightarrow T_C \longrightarrow (T_{\mathbb{P}^2})|_C \longrightarrow N_{C|\mathbb{P}^2} \longrightarrow 0.$$

De la première suite exacte, et par la formule du produit de Whitney, on a

$$\begin{aligned} c((T_{\mathbb{P}^2})|_C) c((\mathbb{P}^2 \times \mathbb{C})_C) &= c((U \otimes S^*)_C) \\ &= i^* c((U \otimes S^*)) = i^* c(S^* \oplus S^* \oplus S^*) \quad (i : C \rightarrow \mathbb{P}^2) \\ &= i^*(1+x)^3 = i^*(1+3x) \quad (x = c_1(S)) \end{aligned}$$

où l'égalité de la deuxième ligne vient du fait que le produit tensoriel d'un fibré  $F$  et du fibré trivial de rang  $n$  est isomorphe à la somme directe de  $n$  copies de  $F$ , et l'égalité de la dernière ligne vient du fait que  $x$  est de degré 2 réel,  $C$  est de dimension 2 réelle, donc  $x^2 = x^3 = 0$ .

De plus,  $c((\mathbb{P}^2 \times \mathbb{C})_C) = 1$  (car fibré trivial). On a donc finalement  $c((T_{\mathbb{P}^2})|_C) = i^*(1+3x)$ . En utilisant la deuxième suite exacte, on a  $c(T_C) c(N_{C|\mathbb{P}^2}) = i^*(1+3x)$  d'où  $(1+c_1(T_C))(1+c_1(N)) = 1+3i^*x$ . En développant, et en utilisant le fait que  $c_1(T_C) c_1(N) = 0$  (car c'est une forme de degré 4), on a finalement

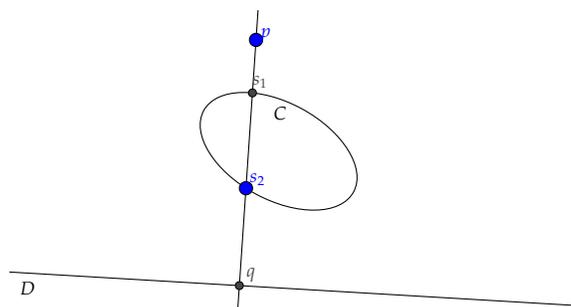
$$e(T_C) + e(N) = 3i^*x.$$

On va chercher à intégrer cette égalité sur  $C$  pour obtenir le résultat souhaité. Calculons les intégrales de ces formes séparément :

On a  $\int_C e(T_C) = \chi(C)$  d'après la proposition 6.37.

Pour calculer les deux autres intégrales, on va introduire une droite  $L$  de  $\mathbb{P}^2$ . Soit  $p$  un point de  $\mathbb{P}^2$  n'appartenant pas à  $C$ , et  $D$  une droite ne passant pas par  $p$ . Considérons l'application  $\pi$  qui à un point  $s$  de la courbe associe l'unique point d'intersection entre  $D$  et la droite passant par  $p$  et  $s$ . C'est un morphisme de variétés. Par théorème de Sard, il existe  $q_0$  point de  $D$  tel que  $\pi^{-1}(q_0)$  ne contienne pas de points critiques. Il n'est alors pas difficile de voir que la droite  $L$  passant par  $q_0$  et  $p$  et la courbe  $C$  s'intersectent transversalement (les points d'intersection de  $L$  et  $C$  est exactement l'ensemble  $\pi^{-1}(q_0)$ ).

Figure 6 – Projection dans  $\mathbb{P}^2$



$L$  est une courbe de degré 1 donc, par théorème de Bézout,  $L$  et  $C$  se coupent en  $d \times 1 = d$  points, comptés avec multiplicité. Mais la multiplicité en chaque point est simple car les courbes se coupent transversalement :  $L \cap C$  est la réunion de  $d$  points.

Montrons désormais que  $x (= c_1(S^*))$  et le dual de Poincaré de  $L$  dans  $\mathbb{P}^2$   $\eta_L$  sont d'intégrale 1 sur  $L$ . Par des calculs précédents (propositions 6.33 et 6.34), on sait que  $\int_L e(S) = -1$  et  $\int_L e(N_L) = 1$ . Par la première égalité, on a  $\int_L x = -\int_L e(S) = 1$ . Pour la deuxième égalité, remarquons que la classe d'Euler  $e(N_L)$  est l'image réciproque de la classe de Thom par la section nulle, et que la classe de Thom de  $N_L$  et le dual de Poincaré de  $L$  sont dans la même classe de cohomologie, d'où

$$\int_L \eta_L = \int_L e(N_L) = 1.$$

Rappelons que la cohomologie de  $\mathbb{P}^2$  est  $\mathbb{R}[x]/(x^3)$ .  $H^2(\mathbb{P}^2)$  est donc une droite ; et deux formes de degré 2 sont cohomologues si et seulement si leurs intégrales sur  $L$  sont égales. En particulier  $x$  et  $\eta_L$  sont cohomologues. On a aussi

$$d = \int_{\mathbb{P}^2} \eta_{L \cap C} = \int_{\mathbb{P}^2} \eta_L \wedge \eta_C = \int_L \eta_C = \int_C \eta_L.$$

(car  $L \cap C$  est la réunion de  $d$  points). Or  $H^2(\mathbb{P}^2)$  est une droite donc  $\eta_C$  est un multiple de  $\eta_L$  ; par le calcul précédent,  $\eta_C = d\eta_L$ .

Calculons alors nos deux intégrales restantes :

$$\int_C e(N_C) = \int_C \eta_C = \int_{\mathbb{P}^2} \eta_C \wedge \eta_C = d^2.$$

$$3 \int_C x = 3 \int_{\mathbb{P}^2} \eta_L \wedge \eta_C = d.$$

d'où finalement

$$\chi(C) + d^2 = 3d.$$

ce qui nous donne l'égalité souhaitée. ■

## Références

- [1] Raoul BOTT et Loring W TU. *Differential forms in algebraic topology*. T. 82. Springer Science & Business Media, 2013.
- [2] Victor GUILLEMIN et Alan POLLACK. *Differential topology*. T. 370. American Mathematical Soc., 2010.
- [3] Jacques LAFONTAINE. *Introduction aux variétés différentielles*. EDP sciences, 2012.
- [4] Saunders MACLANE. *Homology*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [5] Arthur SARD. "The measure of the critical values of differentiable maps". In : *Bulletin of the American Mathematical Society* 48.12 (1942), p. 883–890.
- [6] Frank W WARNER. *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*. Scott, Foresman and Co., Glenview, Ill. 1971.