

RAPPORT DE STAGE

MAGISTÈRE DE MATHÉMATIQUES DE RENNES, 2^{me} ANNÉE

**Introduction à la théorie du contrôle :
Étude du pendule inversé**

Stagiaire :
Juliette LEGRAND

Maître de stage :
Mme Karine BEAUCHARD
ENS Rennes

02 Mai 2017 - 30 Juin 2017

ENS Rennes

Sommaire

Introduction	3
I Introduction aux systèmes de contrôle	4
II Existence et unicité des solutions	5
III Contrôlabilité d'un système	7
1 Contrôlabilité d'un système non linéaire	8
2 Contrôlabilité des systèmes linéaires	10
3 Systèmes semblables	11
IV Génération et suivi de trajectoire	12
4 Forme de Brunovsky	12
5 Stabilisation par retour d'état ou Feedback	13
6 Contrôle optimal	14
V Application au pendule inversé	16
7 Le pendule inversé	16
7.1 Introduction	16
7.2 Mise en équations du mouvement du pendule	17
7.3 Contrôlabilité du système	18
8 Génération de trajectoire	19
8.1 Génération de trajectoire en boucle ouverte	20
8.2 Contrôle optimal en boucle ouverte	21
8.3 Suivi de trajectoire (boucle fermé)	22
VI Annexes	27
9 Critère de Routh	27

10 Interpolation de Hermite	28
11 Programmes Scilab	30
11.1 Contrôle de référence	30
11.2 Contrôle optimal	33

Introduction

Le but de ce travail de recherche est de faire une petite introduction à la théorie du contrôle, domaine à cheval entre les mathématiques et l'ingénierie. En particulier mon travail s'est porté sur l'étude du pendule inversé et s'est effectué en collaboration avec Antoine PERRIGOT (département *Mécatronique* de l'ENS Rennes).

Durant les premières semaines du stage, nous avons travaillé chacun de notre côté afin de se familiariser avec la théorie du contrôle par la lecture d'ouvrages de références tels que [1], [2] ou encore [3]. Loin de comprendre tous les tenants et les aboutissants de ce domaine de recherche, la lecture de ces ouvrages m'a permis dans un premier temps d'avoir une idée assez claire du travail que nous souhaitions mener.

Une fois les connaissances de base acquises, j'ai pu travailler en collaboration avec Antoine pour la création d'un modèle réel du pendule inversé. Pour sa part, il a réalisé entièrement le pendule : de la partie électronique (moteur, entrée de la consigne, etc...), à la partie mécanique (banc d'essai, création des pièces constituant le pendule, assemblage, etc...). De mon côté j'ai implémenté en Scilab les contrôles nécessaires pour commander le pendule.

Première partie

Introduction aux systèmes de contrôle

Le but de cette partie est de donner une brève introduction à la théorie du contrôle, d'en donner une définition et de décrire ses objets d'études.

La théorie du contrôle est une branche de la théorie des systèmes qui a pour objet l'étude du comportement des systèmes dynamiques sur lesquels on peut agir au moyen d'un contrôle. Le but étant alors d'amener le système d'un état initial à un état final en respectant un certain cahier des charges (stabilité, rapidité, performances,...).

Définition 1 (*Système de contrôle*)

Un système de contrôle est un système dont on peut modifier le comportement au cours du temps. On agit sur un tel système par le biais d'un contrôle (ou commande).

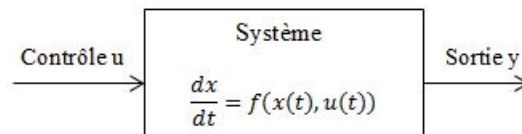


FIGURE 1 – Schéma d'un système de contrôle.

On considère un système de contrôle

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1)$$

où $x : t \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ désigne l'état et $u : t \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ le contrôle, n et m étant deux entiers naturels non-nuls.

Définition 2 (*Trajectoire*)

On appelle trajectoire d'un système de contrôle toute fonction régulière $t \in I \mapsto (x(t), u(t)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ qui satisfait (1) sur un intervalle I de \mathbb{R} non vide.

On rappelle la définition d'un point d'équilibre du système (1)

Définition 3

On appelle point d'équilibre du système $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$ un couple

$$\left\{ \begin{array}{l} (x_e, u_e) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \text{ satisfaisant} \\ f(x_e, u_e) = 0 \end{array} \right.$$

Les objectifs principaux de la théorie du contrôle que l'on va aborder dans la suite sont les notions de contrôlabilité et de stabilisation. Nous allons aussi aborder brièvement la notion de contrôle optimal.

Parmi les systèmes de contrôle, on distingue les systèmes de contrôle linéaires, qui sont de la forme $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$, des systèmes de contrôle non linéaires, de la forme $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$. En toute rigueur, les systèmes de contrôle réels, présents dans la nature, sont non linéaires, mais si l'on se place dans ce contexte l'étude est beaucoup plus complexe. C'est pour cela que l'on a rapidement tendance à linéariser un système dès que l'on peut le faire.

Deuxième partie

Existence et unicité des solutions

Avant d'étudier les notions clés abordées ci-dessus, il faut avant tout s'assurer que les systèmes que nous étudions admettent des solutions et qu'elles sont uniques. Pour cela, le théorème de Cauchy usuel ne suffit pas toujours, c'est ce que nous allons voir.

Soient I un intervalle ouvert de \mathbb{R} , $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, f une application de $I \times \Omega$ dans \mathbb{R}^n et $x_0 \in \Omega$.

On considère le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (2)$$

Le théorème de Cauchy usuel affirme l'existence et l'unicité d'une solution maximale pourvu que f soit continue, et localement lipschitzienne par rapport à x . Mais en théorie du contrôle ces hypothèses doivent être affaiblies car on est amené à considérer des contrôles non continus (aux mieux continus par morceaux), et par conséquent la continuité du second membre n'est plus assurée.

Définition 4 (Solution du problème de Cauchy)

On se place sous les hypothèses suivantes :

- $\forall t \in I, x \rightarrow f(t, x)$ est mesurable,

— $\forall x \in \Omega, t \rightarrow f(t, x)$ est continue.

On appelle solution du problème de Cauchy (2) tout couple (J, x) , où $J \subset I$ est un intervalle tel que $t_0 \in J$, et où $x : J \rightarrow \Omega$ est une application absolument continue telle que pour tout $t \in J$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds.$$

Une solution (J, x) est dite maximale si pour tout autre solution (\tilde{J}, \tilde{x}) , on a $\tilde{J} \subset J$ et $x = \tilde{x}$ sur \tilde{J}

On a alors le théorème suivant :

Théorème 5 (Cauchy-Lipschitz)

Soient I un intervalle ouvert de \mathbb{R} , $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et v une application de $I \times \Omega$ dans \mathbb{R}^n vérifiant les deux propriétés suivantes :

— v est localement lipschitzienne par rapport à x : pour tout compact $K \subset I \times \Omega$, il existe $L > 0$ tel que

$$\|v(t, x_1) - v(t, x_2)\| \leq L \|x_1 - x_2\|, \forall (t, x_1), (t, x_2) \in K,$$

— v est localement intégrable par rapport à t : pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, il existe $\eta \in L^1_{loc}(I, \mathbb{R}^+)$ telle que pour tout $t \in I$, $\|v(t, x)\| \leq \eta(t)$

Alors pour toute condition initiale $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$, il existe une unique solution maximale (J, x) au problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v(x, t), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Si l'on reprend le système de contrôle (1)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

il suffit alors de supposer que pour chaque contrôle u , la fonction $F : (t, x) \rightarrow f(t, x(t), u(t))$ vérifie les hypothèses du théorème 5.

On considère dans la suite le système de contrôle *linéaire* suivant

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (3)$$

où A et B sont deux applications localement intégrables sur I , à valeurs respectivement dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$.

L'ensemble des contrôles u considérés est l'ensemble des applications mesurables et localement bornées sur I , à valeurs dans $\Omega \subset \mathbb{R}^m$.

Le théorème 5 nous assure que, pour tout contrôle u , le système (3) admet une unique solution $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ absolument continue.

Soit $M : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la résolvante du système linéaire homogène $\dot{x} = A(t)x(t)$, définie par $\dot{M}(t) = A(t)M(t)$, $M(0) = Id$ (si $A(t)$ est constante, alors $M(t) = \exp(tA)$).

Prop 6

Soient un contrôle u et $x_0 \in \mathbb{R}^n$. L'unique solution de $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$ valant x_0 à l'instant $t = 0$ est

$$x(t) = M(t)x_0 + \int_0^t M(t)M(s)^{-1}B(s)u(s)ds.$$

Remarque 1. On remarque que l'application x dépend de u . Si on change le contrôle u , on obtient une autre trajectoire $t \mapsto x(t)$ dans \mathbb{R}^n .

On a vu qu'il existait sous certaines hypothèses des contrôles tels que le système (3) admette des solutions. La question qui se pose à présent est de savoir si pour un certain état x_1 de \mathbb{R}^n , s'il existe un contrôle u telle que la trajectoire associée à ce contrôle amène le système de l'état x_0 à l'état x_1 en un temps fini T . C'est ce qu'on appelle le problème de contrôlabilité.

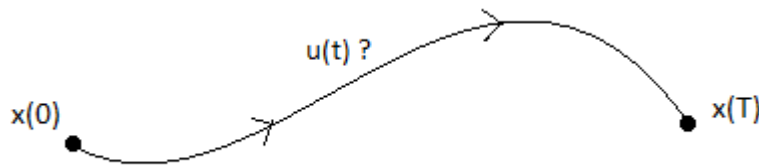


FIGURE 2 – Problème de contrôlabilité.

Troisième partie

Contrôlabilité d'un système

1 Contrôlabilité d'un système non linéaire

Dans cette partie, on considère à nouveau le système de contrôle non linéaire (1)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Définition 7 (*Ensemble accessible*)

L'ensemble des points accessibles à partir de x_0 en un temps $T > 0$ est défini par : $Acc(x_0, T) := \{x_u(T) / u \in L^\infty([0, T], \Omega)\}$, où Ω est un sous-ensemble de \mathbb{R}^m .

x_u est la solution du système (1) associée au contrôle u .

Autrement dit $Acc(x_0, T)$ est l'ensemble des extrémités des solutions du système (1) au temps T lorsqu'on fait varier le contrôle u .

Définition 8 (*Contrôlabilité*)

Le système (1) est dit contrôlable en temps $T > 0$ si, et seulement si, $Acc(x_0, T) = \mathbb{R}^n$.

Autrement dit, pour tous états $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$, il existe un contrôle u qui amène le système de l'état $x(0) = x_0$ à l'état $x(T) = x_1$, ie, tel que la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x, u(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

vérifie $x(T) = x_1$.

On définit à présent la notion de système localement contrôlable en un point d'équilibre.

Définition 9 (*Contrôlabilité locale*)

Soit $(x_e, u_e) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ un point d'équilibre du système de contrôle (1). On dit alors que ce système est localement contrôlable au point d'équilibre (x_e, u_e) si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tous $x_0, x_1 \in B_\eta(x_e) := \{x \in \mathbb{R}^n; |x - x_e| < \eta\}$, il existe une application mesurable $u : [0, \epsilon] \rightarrow \mathbb{R}^m$ telle que

$$\begin{aligned} & |u(t) - u_e(t)| \leq \epsilon, \forall t \in [0, \epsilon], \\ & (\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), x(0) = x_0) \Rightarrow x(\epsilon) = x_1 \end{aligned}$$

Le théorème suivant permet de déduire des résultats de contrôlabilité locale à partir de l'étude du système linéarisé. Ce résultat se déduit du théorème de contrôlabilité des systèmes linéaires 15 que nous allons étudier dans la suite.

Avant d'énoncer le théorème, on définit ce qu'est le système linéarisé en un point d'équilibre d'un système de contrôle.

Définition 10 (*Système linéarisé*)

Soit (x_e, u_e) un point d'équilibre du système (1). Le système de contrôle linéarisé au point (x_e, u_e) du système $\dot{x} = f(x, u)$ est le système de contrôle linéaire

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_e, u_e)x(t) + \frac{\partial f}{\partial u}(x_e, u_e)u(t)$$

Théorème 11 (*Linear test*)

On considère le système (1) avec $f(x_e, u_e) = 0$. On note $A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_e, u_e)$ et $B = \frac{\partial f}{\partial u}(x_e, u_e)$. On suppose que

$$rg([B, AB, \dots, A^{n-1}B]) = n$$

Alors le système est localement contrôlable en (x_e, u_e) .

▷

□

On introduit la notion d'intégrale première qui donne une condition sur la non contrôlabilité des systèmes non linéaires.

Définition 12 (*Intégrale première*)

Une fonction régulière $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \ni (t, x) \mapsto h(t, x) \in \mathbb{R}$ est appelée intégrale première du système (1) si elle est constante le long de toute trajectoire du système.

Une intégrale première est dite triviale si c'est une fonction constante sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Remarque 2. Si h est une intégrale première, sa dérivée le long d'une trajectoire arbitraire du système est nulle. Autrement dit

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} \frac{dx}{dt} = 0$$

Prop 13

Si le système (1) admet une intégrale première non triviale, alors il n'est pas contrôlable.

▷ Supposons que (1) admette une intégrale première non triviale et soit contrôlable. Alors il existe $T > 0$ tel que pour tout $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ et tout instant initial t , une trajectoire reliant x_0 à x_1 sur $[t, t + T]$. Autrement dit $h(t, x_0) = h(t + T, x_1)$.

h est donc une fonction périodique du temps et indépendante de x . La dérivée de h le long des trajectoires du système se réduit alors à $\frac{\partial h}{\partial t}$. Par la remarque précédente, cette dérivée est nulle. h est donc une constante ce qui contredit l'hypothèse de départ. \square

2 Contrôlabilité des systèmes linéaires

On considère à présent un système de contrôle linéaire

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

où A est de taille $n \times n$ et B de taille $n \times m$.

Si A et B ne dépendent pas du temps t , on a une caractérisation algébrique de la contrôlabilité.

Théorème 14 (Matrice de Kalman)

L'espace $Acc(0, T)$ est égal à l'image de la matrice $C := [B, AB, \dots, A^{n-1}B] \in \mathcal{M}_{n, nm}(\mathbb{R})$, appelée matrice de Kalman.

Remarque 3. L'ensemble des points accessibles à partir de 0 en temps T est indépendant de T .

Corollaire 15 (Critère de contrôlabilité de Kalman)

Le système linéaire $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ est contrôlable en temps T (quelconque) si, et seulement si, la matrice de Kalman est de rang n .

Remarque 4. La condition de Kalman ne dépend ni de T ni de x_0 . Autrement dit, si un système linéaire est contrôlable en temps T depuis x_0 , alors il est contrôlable en tout temps depuis tout point.

Preuve du théorème 14 :

▷ On remarque que

$$\begin{aligned} Im(C) &= \mathcal{R}(A, B) \\ &:= Vect(A^i Bz; i = 0, \dots, n-1, z \in \mathbb{R}^m) \end{aligned}$$

Montrons que $Acc(0, T) \subset \mathcal{R}(A, B)$. Par définition, si $x \in \mathcal{R}(A, B)$, alors il existe un contrôle $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ tel que $x(t) = \int_0^t e^{(t-s)A} Bu(s) ds$.

D'après le théorème de Cayley-Hamilton, le polynôme caractéristique de A

annule A . Or ce polynôme est un polynôme normalisé (*ie*, le coefficient de plus haut degré vaut 1) de degré n , ce qui implique que A^n est une combinaison linéaire de I, \dots, A^{n-1} (nb : $\chi_A(X) = X^n - \text{tr}(A)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det A$). Par conséquent, pour tout $j \geq 0$, A^j est une combinaison linéaire de I, \dots, A^{n-1} et laisse donc invariant l'espace vectoriel $\mathcal{R}(A, B)$. D'autre part, pour tout $s \in [0, T]$, $e^{(t-s)A}$ admet le développement suivant :

$$e^{(t-s)A} = I + (t-s)A + \dots + \frac{(t-s)^k A^k}{k!} + \dots$$

$e^{(t-s)A}$ laisse donc également invariant l'espace $\mathcal{R}(A, B)$. On a donc montré que pour tout $s \in [0, T]$, $e^{(t-s)A} B u(s) \in \mathcal{R}(A, B)$.

On a prouvé que $\text{Acc}(0, T) \subset \mathcal{R}(A, B)$. Montrons l'inclusion réciproque $\mathcal{R}(A, B) \subset \text{Acc}(0, T)$. Pour cela montrons que $\text{Acc}(0, T)^\perp \subset \mathcal{R}(A, B)^\perp$. Soient $w \in \mathbb{R}^n$ orthogonal à $\text{Acc}(0, T)$ et l'état \tilde{w} que l'on peut atteindre au temps T par le contrôle $u(t) = B^\top (e^{(T-s)A})^\top w$. Le vecteur w est donc orthogonal à l'état \tilde{w} .

Par une formule précédente, on a

$$\tilde{w} = \int_0^t e^{(t-s)A} B B^\top (e^{(t-s)A})^\top w ds$$

et comme $\langle w, \tilde{w} \rangle = 0$, on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= \langle w, \int_0^t e^{(t-s)A} B B^\top (e^{(t-s)A})^\top w ds \rangle \\ &= \int_0^t ((e^{(t-s)A} B)^\top w)^\top ((e^{(t-s)A} B)^\top w) ds, \end{aligned}$$

ie, pour tout $s \in [0, T]$, $(e^{(t-s)A} B)^\top w = 0$.

En dérivant $n-1$ fois cette égalité par rapport à s , on obtient

$$(e^{(t-s)A} A B)^\top w = (e^{(t-s)A} A^2 B)^\top w = \dots = (e^{(t-s)A} A^{n-1} B)^\top w = 0$$

en prenant $s=t$, on obtient $B^\top w = (A^2 B)^\top w = \dots = (A^{n-1} B)^\top w = 0$. Ceci s'écrit encore :

$$\begin{aligned} \forall j \in 0, \dots, n-1, \forall z \in \mathbb{R}^m, \\ 0 = \langle z, (A^j B)^\top w \rangle = \langle A^j B z, w \rangle \end{aligned}$$

ie, $w \in \mathcal{R}(A, B)^\perp$. On a donc démontré l'inclusion réciproque. \square

3 Systèmes semblables

Dans cette partie, on introduit la définition de systèmes semblables qui nous permet d'étudier la contrôlabilité d'un système en se ramenant à un système que l'on sait contrôlable.

Définition 16 (*Systèmes semblables*)

Les systèmes de contrôle linéaires $\dot{x}_1 = A_1x_1 + B_1u_1$ et $\dot{x}_2 = A_2x_2 + B_2u_2$ sont dits semblables s'il existe une matrice inversible P de taille n telle que $A_2 = PA_1P^{-1}$ et $B_2 = PB_1$.

Prop 17

La condition de Kalman est intrinsèque, i.e. $(B_2, A_2B_2, \dots, A_2^{n-1}B_2) = P(B_1, A_1B_1, \dots, A_1^{n-1}B_1)$.
En particulier, le rang de la matrice de Kalman est invariant par similitude.

Quatrième partie

Génération et suivi de trajectoire

A présent, le système que l'on considère est le système de contrôle linéaire suivant

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

L'étude de la contrôlabilité d'un système nous permet de savoir si l'on peut atteindre un état $x_1 \in \mathbb{R}^n$ quelconque en temps T donné en partant d'un état initial x_0 prescrit.

La question qui se pose alors est de savoir comment atteindre cet état.

Dans un premier temps, nous allons donner une méthode pour calculer des contrôles en boucle ouverte. C'est ce que l'on appelle le problème de génération (ou planification) de trajectoire.

Ensuite, nous verrons que ces contrôles en boucle ouverte ne marchent que très rarement dans la pratique et qu'il faut rajouter un terme de correction. C'est là qu'intervient la notion de suivi de trajectoire, ou stabilisation.

Dans une dernière partie, nous aborderons la notion de contrôle optimal, voir [1] pour plus de détails.

4 Forme de Brunovsky

Le but de cette partie est d'introduire la notion de forme de *Brunovsky* qui est très utile dans le calcul de contrôle. En effet, une fois le système mis sous cette forme, on obtient un paramétrage explicite de toutes les trajectoires en fonction d'une certaine quantité y appelée sortie de Brunovsky. Et on peut alors calculer facilement des contrôles u associés au système.

Théorème 18 (Forme de Brunovsky)

Si la matrice de Kalman est de rang n (ie si le système (3) est contrôlable) et si B est de rang m , alors il existe un changement d'état $x = Mz$ (M inversible de taille $n \times n$) et un bouclage statique régulier $u = Kz + Nv$ (N matrice inversible de taille $m \times m$), tels que les équations du système dans les variables (z, v) se mettent sous la forme suivante (m équations différentielles d'ordre ≥ 1)

$$\begin{aligned}y_1^{(\alpha_1)} &= v_1 \\y_2^{(\alpha_2)} &= v_2 \\&\dots \\y_m^{(\alpha_m)} &= v_m\end{aligned}$$

avec comme état $z = (y_1, y_1^{(1)}, \dots, y_1^{(\alpha_1-1)}, \dots, y_m, y_m^{(1)}, \dots, y_m^{(\alpha_m-1)})$, les α_i étant des entiers positifs (on note $y = (y_1, \dots, y_m)$ et $y^{(\alpha)} = (y_1^{(\alpha_1)}, \dots, y_m^{(\alpha_m)})$). Les m quantités y_i sont appelées sorties de Brunovsky.

Pour les détails de la preuve voir [2].

Remarque 5 (Calcul de contrôle en boucle ouverte). *La mise sous forme de Brunovsky permet de calculer très simplement des commandes u amenant le système d'un état vers un autre.*

En effet si l'on considère une fonction arbitraire $t \mapsto \phi(t) \in \mathbb{R}^m$ et que l'on calcule $x(t)$ et $u(t)$ par les relations

$$x = M(\phi(t), \dots, \phi^{(\alpha-1)}(t)), u = L(\phi(t), \dots, \phi^{(\alpha)}(t))$$

où la matrice L est obtenue à partir des matrices K, N et M , alors $t \mapsto (x(t), u(t))$ est une trajectoire du système. Réciproquement, toutes les trajectoires du système se paramétrisent de cette façon.

Remarque 6. *Dans le cadre non linéaire, les quantités y_i sont aussi appelées sorties plates.*

5 Stabilisation par retour d'état ou Feedback

La remarque 5 faite à la suite du théorème de Brunovsky nous permet de trouver une des trajectoires possibles du système, que l'on appellera trajectoire de référence, $t \in I \mapsto (x_r(t), u_r(t))$ et qui est une trajectoire en boucle ouverte (*i.e.* le contrôle s'effectue sans prendre en compte la réponse du système). Si le système est naturellement stable, il va bien se comporter et suivre la trajectoire de référence.

Cependant, si le système est instable, il faut rajouter à ce contrôle en boucle ouverte un terme de correction de boucle fermée (ou Feedback) pour assurer

le suivi de la trajectoire. C'est ce qu'on appelle la stabilisation : rendre le système insensible à certaines perturbations.

De la condition de Kalman 15 et du théorème de Brunovsky 18, on peut en déduire que la contrôlabilité du système (3) implique la stabilisation par retour d'état.

En effet, reprenons les notations du théorème 18, et soient α_i valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\alpha_i}$ correspondant au spectre d'une matrice réelle de dimension α_i . On note s_k les fonctions symétriques des λ_k homogènes de degré k :

$$\prod_{k=1}^{\alpha_i} (X - \lambda_k) = X^{\alpha_i} - s_1 X^{\alpha_i-1} + s_2 X^{\alpha_i-2} + \dots + (-1)^{\alpha_i} s_{\alpha_i}$$

Alors dès que les λ_k sont à partie réelle strictement négative, le bouclage

$$v_i = s_1 y_i^{(\alpha_i-1)} - s_2 y_i^{(\alpha_i-2)} + \dots + (-1)^{\alpha_i-1} s_{\alpha_i} y_i$$

assure la stabilité de $y_i^{(\alpha_i)} = v_i$. En effet, les pôles du système bouclé sont les λ_k .

On a alors le théorème suivant

Théorème 19 (Placement de pôles)

Si la paire (A,B) vérifie la condition de Kalman, alors pour tout polynôme réel P unitaire de degré n , il existe $K \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ telle que $\chi_{A+BK} = P$, i.e. le polynôme caractéristique de $A+BK$ est égal à P .

▷ Voir [1]. □

Concrètement, on note y_r la sortie de Brunovsky (ou sortie plate) associée à la trajectoire de référence. Une fois que l'on s'est ramené à une écriture du type $y^{(\alpha)} = v$, on stabilise le système autour d'une trajectoire en stabilisant la sortie de Brunovsky autour de la trajectoire correspondante par

$$v = y_r^{(\alpha)} - a_0(y - y_r) - a_1(y^{(1)} - y_r^{(1)}) - \dots - a_{\alpha-1}(y^{(\alpha-1)} - y_r^{(\alpha-1)})$$

où on choisit les coefficients $a_0, a_1, \dots, a_{\alpha-1}$ de manière à ce que le polynôme $X^\alpha + a_{\alpha-1}X^{\alpha-1} + \dots + a_1X + a_0$ ait toutes ses racines à partie réelle strictement négative. Pour cela, on utilise par exemple le critère de Routh (voir §9).

6 Contrôle optimal

Si l'on revient au problème de génération de trajectoire initial, on remarque qu'il n'y a pas unicité des contrôles u permettant de réaliser la trajectoire voulue. La question qui se pose alors est : existe-t-il un contrôle qui joigne l'état x_0 à l'état x_1 et qui minimise une certaine énergie ?

C'est ce qu'on appelle le problème de contrôle optimal.

Dans la suite, nous n'allons aborder qu'un seul type de contrôle optimal, mais cette notion peut se généraliser. On peut minimiser n'importe quelle fonctionnelle $C(u)$ sous certaines conditions (voir [1]).

Théorème 20 (Contrôle minimal)

Soit $G \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice définie par

$$G = \int_0^T e^{(T-s)A} B B^\top (e^{(T-s)A})^\top ds$$

Alors $Im(G) = Acc(0, T)$.

De plus, si le système est contrôlable, alors G est bijective et le contrôle $\bar{u} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ défini par $\bar{u}(s) = (e^{(T-s)A} B)^\top G^{-1} x_1$, envoie l'état $x(0) = 0$ sur l'état $x(T) = x_1$.

Remarque 7. Le système $\dot{X} = AX + Bu$ étant linéaire, la commande optimale \bar{u} qui amène l'état $x(0) = 0$ à l'état $x(T) = x_1$ est aussi la commande optimale qui envoie l'état $x(0) = x_0$ sur l'état $x(T) = e^{AT} x_0 + x_1$.

▷ Soit $v \in \mathbb{R}^n$, on a alors

$$\begin{aligned} Gv &= \int_0^T e^{(T-s)A} B B^\top (e^{(T-s)A})^\top v ds \\ &= \int_0^T e^{(T-s)A} B u_v(s) ds \end{aligned}$$

où $u_v(s) = B^\top (e^{(T-s)A})^\top v$.

Une formule précédente montre alors que $Im(G)$ est l'ensemble des états accessibles au temps T par des contrôles de la forme u_v , noté $\mathcal{A}_{v,T}$.

Mais dans la preuve précédente, on a montré que $\mathcal{A}_{v,T}^\perp \subset \mathcal{R}(A, B)^\perp$. Par conséquent, $\mathcal{R}(A, B) \subset Im(G)$.

De plus $Im(G) \subset Acc(0, T) = \mathcal{R}(A, B)$ (cf théorème précédent).

D'où $Im(G) = \mathcal{R}(A, B)$. □

Théorème 21

Si u est un contrôle permettant d'amener l'état $x(0) = 0$ à l'état $x(T) = x_1$, alors

$$\int_0^T \|u(s)\|^2 ds \geq \int_0^T \|\bar{u}(s)\|^2 ds$$

En d'autres termes, le contrôle \bar{u} est celui qui minimise l'énergie $E(u) = \frac{1}{2} \int_0^T \|u(s)\|^2 ds$

▷

$$\begin{aligned} E(\bar{u} + (u - \bar{u})) &= E(\bar{u}) + \int_0^T \langle (e^{(T-s)A}B)^\top G^{-1}x_1, u(s) - \bar{u}(s) \rangle ds + E(u - \bar{u}) \\ &= E(\bar{u}) + \int_0^T \langle G^{-1}x_1, e^{(T-s)A}B(u(s) - \bar{u}(s)) \rangle ds + E(u - \bar{u}) \end{aligned}$$

Par ailleurs, les trajectoires associées aux contrôles u et \bar{u} ayant les mêmes extrémités 0 et x_1 , on a d'après la proposition 6,

$$\int_0^T e^{(T-s)A}B(u(s) - \bar{u}(s)) ds = 0$$

Par conséquent, $E(\bar{u} + (u - \bar{u})) = E(\bar{u}) + E(u - \bar{u})$.

Donc pour tout contrôle u comme dans le théorème, $E(u) \geq E(\bar{u})$. □

Cinquième partie

Application au pendule inversé

7 Le pendule inversé

7.1 Introduction

Le pendule inversé est un pendule simple dont la masse est située en l'air. Il présente une position d'équilibre instable en position verticale, cette position est maintenue par le contrôle d'un chariot mobile.

Une application simple qui à la portée de tous est de faire tenir en équilibre un stylo sur son doigt. La seule différence étant que dans le cas du pendule inversé on ne bouge que dans le plan.

Dans notre cas, nous allons étudier ce système pour mettre en applications la théorie sur les systèmes de contrôle que nous venons de voir. Mais dans la pratique l'étude du pendule inversé a de nombreux intérêts notamment en robotique avec le Segway.

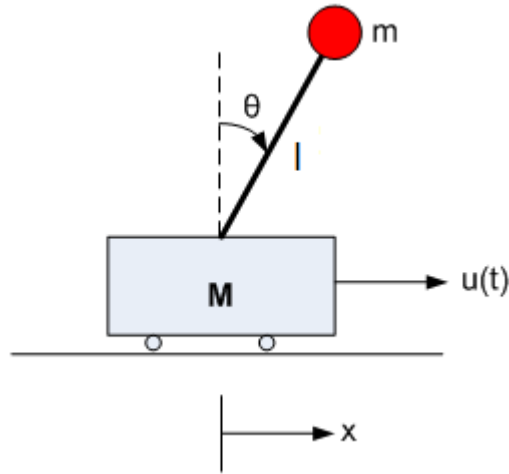


FIGURE 3 – Schéma du pendule inversé.

Notations :

- θ : angle formé entre la tige et la verticale
- m : masse du pendule
- l : longueur de la tige
- g : accélération de la pesanteur
- F : force extérieure, ou contrôle (noté u)
- M : masse du chariot

Dans notre étude, le système part de l'état initial $(x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}) = (0, 0, \delta\theta, 0)$ (avec $\delta\theta$ petit) pour arriver au point d'équilibre $(x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}) = (D, 0, 0, 0)$. Autrement dit, on souhaite amener le pendule d'une position initiale qui n'est pas tout à fait à la verticale, à une position d'équilibre.

7.2 Mise en équations du mouvement du pendule

Pour obtenir les équations du mouvement du pendule, on applique le principe fondamental de la dynamique sur l'ensemble $\{\text{pendule} + \text{chariot}\}$ projeté sur l'axe horizontal puis le long du pendule.

La position du pendule projeté sur l'axe horizontal est donnée par $x - l\sin(\theta)$.

Sa vitesse est donc donnée par $\dot{x} - l\dot{\theta}\cos(\theta)$ et son accélération par $\ddot{x} + l\dot{\theta}^2\sin(\theta) - l\ddot{\theta}\cos(\theta)$.

En appliquant le PFD sur l'ensemble *pendule + chariot* projeté horizontalement, on obtient une première équation

$$M\ddot{x} + m(\ddot{x} + l\dot{\theta}^2 \sin(\theta) - l\ddot{\theta} \cos(\theta)) = u$$

De même, en projetant selon l'axe du pendule on obtient

$$ml\ddot{\theta} - m\ddot{x} \cos(\theta) = mg \sin(\theta)$$

Le système décrivant le mouvement du pendule est le suivant

$$\begin{cases} M\ddot{x} + m(\ddot{x} + l\dot{\theta}^2 \sin(\theta) - l\ddot{\theta} \cos(\theta)) = u \\ ml\ddot{\theta} - m\ddot{x} \cos(\theta) = mg \sin(\theta) \end{cases}$$

On linéarise à présent le système autour du point d'équilibre $(x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}) = (0, 0, 0, 0)$

$$\begin{cases} (M + m)\ddot{x} = ml\ddot{\theta} + u, \\ l\ddot{\theta} = \ddot{x} + g\theta. \end{cases}$$

Le système d'équations différentielles linéarisées régissant les mouvement du pendule inversé est donc le suivant

$$\begin{cases} (M + m)\ddot{x} = ml\ddot{\theta} + u, \\ l\ddot{\theta} = \ddot{x} + g\theta, \\ (x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}) = (0, 0, \delta\theta, 0). \end{cases} \quad (4)$$

7.3 Contrôlabilité du système

Les équations linéarisées du pendule inversé peuvent se mettre sous la forme d'une équation différentielle matricielle d'ordre 1

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + Bu, \\ X_0 = (0, 0, \delta\theta, 0)^\top \end{cases}$$

$$\text{avec } X = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{(m+M)g}{Ml} & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{M}{0} \\ 1 \\ \frac{Ml}{0} \end{pmatrix}$$

$$\text{La matrice de Kalman associée à ce système est } C = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{M} & 0 & \frac{mg}{M^2 l} \\ \frac{1}{M} & 0 & \frac{mg}{M^2 l} & 0 \\ 0 & \frac{1}{Ml} & 0 & \frac{(m+M)g}{M^2 l^2} \\ \frac{1}{Ml} & 0 & \frac{(m+M)g}{M^2 l^2} & 0 \end{pmatrix},$$

qui est de rang 4.

D'après le corollaire 15, le système linéarisé est contrôlable. Et donc le système *réel* (c'est-à-dire le système non linéaire) est localement contrôlable au point d'équilibre donné.

On peut donc atteindre un état quelconque en un temps voulu. Nous allons par la suite déterminer les contrôles qui nous permettrons de réaliser ces trajectoires.

8 Génération de trajectoire

D'après le paragraphe précédent, il existe des contrôles permettant de relier X_0 à $X_f = (D, 0, 0, 0)^\top$. On cherche maintenant à déterminer certains de ces contrôles.

Pour cela, on va déterminer dans un premier temps un contrôle quelconque en boucle ouverte (*ie* qui ne prend pas en compte la rétroaction), puis on déterminera le contrôle optimal étudié précédemment (*cf* §6). Enfin, dans un troisième temps, nous étudierons la stabilisation du système en donnant un contrôle en boucle fermée.

On pose

$$\begin{cases} y_1 = x - l\theta, \\ y_2 = \dot{y}_1 = \dot{x} - l\dot{\theta}, \\ y_3 = \ddot{y}_1 = -g\theta, \\ y_4 = y_1^{(3)} = -g\dot{\theta}, \\ v = y_1^{(4)} = -\frac{g}{Ml}u - \frac{g^2(M+m)}{Ml}\theta. \end{cases}$$

Alors y_1 est une sortie plate du système : y_1 permet de paramétrer toutes les trajectoires du système.

Autrement dit, $x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}$ et u s'écrivent au moyen de $y_1, \dot{y}_1, \ddot{y}_1, y_1^{(3)}$ et $y_1^{(4)}$.

Le système se met alors sous forme de Brunovsky :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} v$$

Remarque 8. On remarque que l'on a

$$\begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

$$\text{avec } M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -l & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -l \\ 0 & 0 & -g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -g \end{pmatrix}.$$

On en déduit donc directement les trajectoires $t \rightarrow \theta(t)$ et $t \rightarrow x(t)$ sans intégrer, en connaissant uniquement la sortie plate y_1 .

8.1 Génération de trajectoire en boucle ouverte

On cherche à amener le système d'un point d'équilibre $(x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}, u) = (0, 0, \delta\theta, 0, 0)$ à un autre point d'équilibre $(x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}, u) = (D, 0, 0, 0, 0)$ dans l'intervalle $[0, T]$.

Transposons ces conditions sur la sortie plate y_1 :

$$\begin{cases} y(0) = -l\delta\theta \\ \dot{y}(0) = 0 \\ \ddot{y}(0) = -g\delta\theta \\ y^{(3)}(0) = 0 \\ y^{(4)}(0) = -\frac{M+m}{Ml}g^2\delta\theta \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} y_1(T) = D \\ y_1^{(k)}(T) = 0, \forall k = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

N'importe quelle courbe $[0, T] \ni t \mapsto y(t)$ satisfaisant ces conditions fournit une trajectoire pour le système.

On utilise par exemple une fonction polynomiale de classe C^4 obtenue à l'aide des polynômes d'interpolation de Hermite, que l'on note y_r (voir annexe 10). On obtient alors une *trajectoire de référence* (x_r, θ_r, u_r) .

Le contrôle $u_r(t) = \frac{-Ml}{g}y_r^{(4)} - (M+m)y_r^{(2)}$ permet de réaliser le mouvement de $(x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta})(0) = (0, 0, \delta\theta, 0)$ à $(x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta})(T) = (D, 0, 0, 0)$.

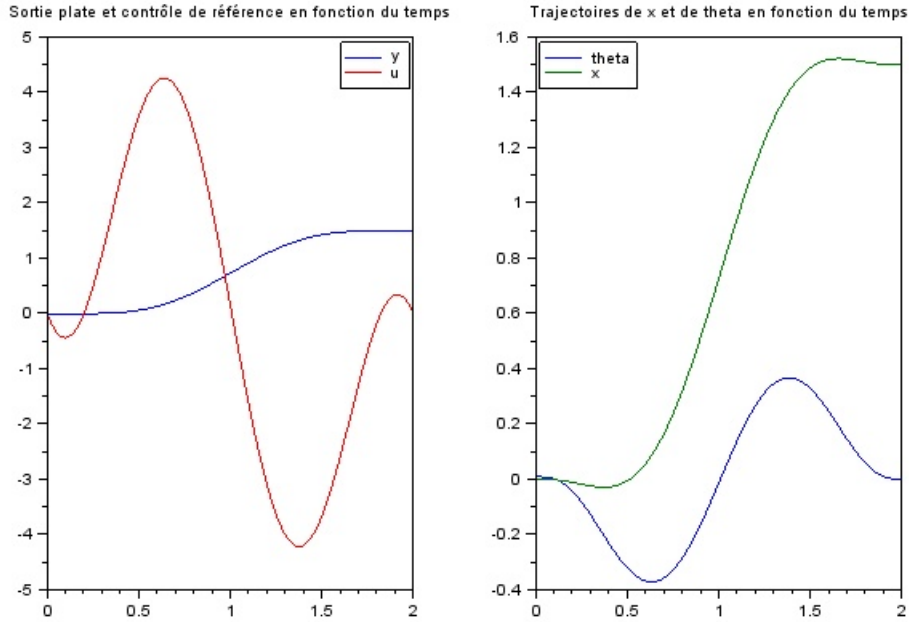


FIGURE 4 – Simulations Scilab du contrôle de référence

8.2 Contrôle optimal en boucle ouverte

On rappelle la formule du contrôle optimal donnée dans le théorème 20

$$\bar{u}(s) = (e^{(T-s)A}B)^\top G^{-1}x_1$$

$$\text{où } G = \int_0^T e^{(T-s)A}BB^\top(e^{(T-s)A})^\top ds$$

Ce contrôle permet d'amener le système de l'état $X(0) = 0$ à l'état $X(T) = X_1$. Or notre système ne part pas de 0. Par la remarque 7, le contrôle optimal que l'on souhaite est donné par l'expression

$$\bar{u}(s) = (e^{(T-s)A}B)^\top G^{-1}(X_f - e^{AT}X_0)$$

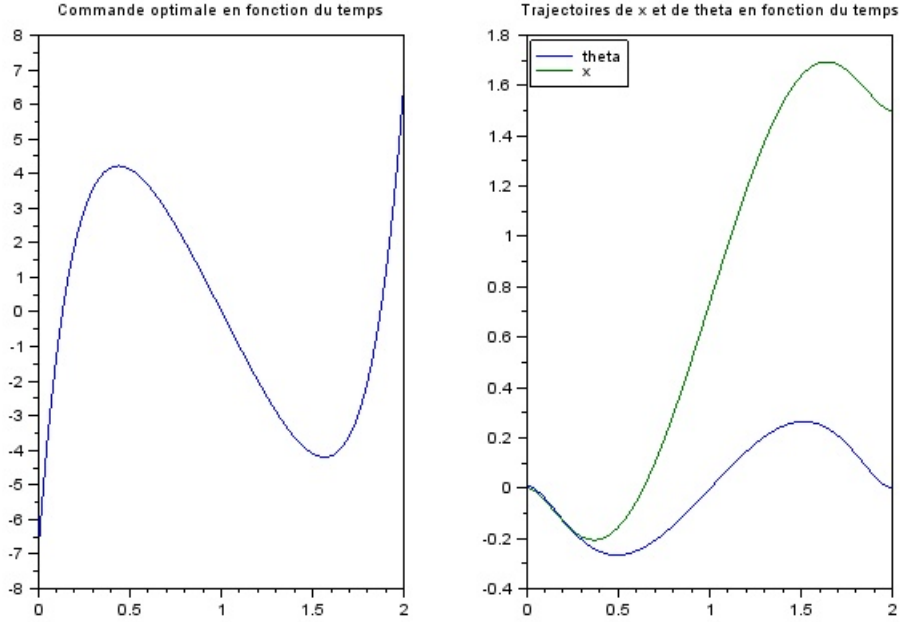


FIGURE 5 – Simulations Scilab du contrôle optimal

8.3 Suivi de trajectoire (boucle fermé)

On reprend le système que l'on a obtenu précédemment

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} v$$

On choisit $v = \dot{y}_{4r} + a_1(y_1 - y_{1r}) + a_2(y_2 - y_{2r}) + a_3(y_3 - y_{3r}) + a_4(y_4 - y_{4r})$.
Il vient alors

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 - y_{1r} \\ y_2 - y_{2r} \\ y_3 - y_{3r} \\ y_4 - y_{4r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 - y_{1r} \\ y_2 - y_{2r} \\ y_3 - y_{3r} \\ y_4 - y_{4r} \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de cette matrice est $X^4 - a_4X^3 - a_3X^2 - a_2X - a_1$. On choisit alors a_1, a_2, a_3 et a_4 pour que les racines de ce polynôme soient toutes à partie réelle strictement négative (*placement de pôles*).

On cherche maintenant la commande u correspondant à v :

$$u = -\frac{Ml}{g}v + (M+m)g\theta$$

On développe les calculs pour obtenir une expression de u au moyen des grandeurs du système :

$$u = (M+m)g\theta - \frac{Ml}{g}[y_{4r}\dot{+} + a_1(x-l\theta - y_{1r}) + a_2(\dot{x} - l\dot{\theta} - y_{2r}) + a_3(-g\theta - y_{3r}) + a_4(-g\dot{\theta} - y_{4r})]$$

A présent, on cherche à déterminer les coefficients a_1, a_2, a_3 et a_4 vérifiant la condition de placement de pôles et permettant d'éliminer le $\dot{\theta}$ dans l'expression de u . En effet, sur notre modèle réel, nous n'avons pas de capteur pour mesurer la vitesse angulaire du pendule. Cependant, nous allons voir que l'on ne peut pas se passer de cette mesure si l'on souhaite respecter la condition de placement de pôles.

▷ 1^{er} cas : $a_2, a_4 \neq 0$

On a alors $a_4 = -a_2 \frac{l}{g}$. Montrons que cette condition est impossible car a_2 et a_4 doivent être de même signe.

Pour cela, on utilise le critère de Routh (voir 22). La table de Routh du polynôme $X^4 - a_4X^3 - a_3X^2 - a_2X - a_1$ est la suivante

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & -a_3 & -a_1 & \\ -a_4 & -a_2 & 0 & \\ b_1 & -a_1 & 0 & \text{où } b_1 = -\frac{a_4a_3 + a_2}{a_4} \\ c_1 & 0 & 0 & \text{où } c_1 = \frac{-b_1a_2 - a_1a_4}{b_1} \\ -a_1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

La table possède 5 lignes, elle est donc complète. D'après le théorème 23, le polynôme qu'on considère a toutes ses racines à partie réelle strictement négative si, et seulement si, $a_4 < 0, b_1 > 0, c_1 > 0$ et $a_1 < 0$.

On a alors :

$$\begin{aligned} b_1 > 0 &\Leftrightarrow -\frac{a_4a_3 + a_2}{a_4} > 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{a_4a_3 + a_2}{a_4} < 0 \\ &\Leftrightarrow a_4a_3 + a_2 > 0(\star) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}c_1 > 0 &\Leftrightarrow -a_2 b_1 - a_4 a_1 > 0 \\ &\Leftrightarrow a_2 \frac{a_4 a_3 + a_2}{a_4} - a_4 a_1 > 0 \\ &\Leftrightarrow a_2(a_4 a_3 + a_2) < a_4^2 a_1\end{aligned}$$

Or $a_1 < 0$, donc $a_2(a_4 a_3 + a_2) < 0$, et par la condition (\star) , on obtient $a_2 < 0$.

On a donc a_2 et a_4 de même signe et donc on ne peut pas avoir $a_4 = -a_2 \frac{l}{g}$.

2^{me} cas : $a_2 = a_4 = 0$

Le polynôme caractéristique devient alors $X^4 - a_3 X^2 - a_1$. Sa table de Routh est

$$\begin{array}{ccc}1 & -a_3 & -a_1 \\ 0 & 0 & 0\end{array}$$

Elle ne possède que deux ligne et est donc incomplète. Ce polynôme ne peut avoir toutes ses racines à partie réelle strictement négative.

Conclusion :

On ne peut pas supprimer la mesure de $\dot{\theta}$. De plus, pour satisfaire les critères de stabilité, il faut

$$a_1, a_2, a_4 < 0 \text{ et } a_2(a_4 a_3 + a_2) < a_4^2 a_1$$

□

Dans notre cas, on a pris par exemple $a_1, a_2, a_4 = -1$ et $a_3 = -3$.

Remerciements

Je remercie très chaleureusement ma maitresse de stage Karine Beauchard, qui a su prendre le temps de s'occuper de moi alors qu'elle était déjà très occupée. Je la remercie pour toutes les réponses qu'elle a su apporter à mes questions tout en m'incitant à trouver ces réponses dans la littérature.

Références

- [1] E. Trélat, *Contrôle optimal : théorie et applications*. Vuibert, 2005.
- [2] N. Petit and P. Rouchon, *Automatique - Dynamique et contrôle des systèmes*, MINES ParisTech, 2009, p. 130 et 131 section 3.3.2 "invariances" : invariance par bouclage statique et action de groupe.
- [3] J.-M. Coron, *Control and Nonlinearity*. American Mathematical Society, 2007, vol. 136.
- [4] G. Allaire, *Analyse numérique et optimisation*, deuxième édition ed., E. de l'Ecole polytechnique, Ed. Ellipses, 2015.
- [5] P. M. Béatrice Laroche and N. Petit, *Commande par platitude. Equations différentielles ordianaires et aux dérivées partielles.*, 2010.
- [6] K. Beauchard, *Dynamique et contrôle de systèmes non linéaires*, cours donné à l'ENS Cachan : MASTER MVA, 2009-2010.
- [7] —, "Dynamique, contrôle et estimation," Cours donnés à l'ENS Cachan : MASTER MVA., 2011-2012.
- [8] F. Jean, *Stabilité et commande des systèmes dynamiques*. Les presses de l'ENSTA, 2011.
- [9] J. Stoer and R. Bulirsch, *Introduction to Numerical Analysis*. Springer-Verlag, 1991, p.52 pour interpolation de Hermite.

Sixième partie

Annexes

9 Critère de Routh

On considère le polynôme complexe

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$$

et on cherche une condition pour que ce polynôme ait toutes ses racines à partie réelle strictement négative.

Définition 22 (*Table de Routh*)

La table de Routh est construite de la manière suivante

a_0	a_2	a_4	a_6	...	éventuellement complété par des 0
a_1	a_3	a_5	a_7	...	éventuellement complété par des 0
b_1	b_2	b_3	b_4	...	où $b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$, $b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}$, ...
c_1	c_2	c_3	c_4	...	où $c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}$, $c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1}$, ...
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots		

Le processus continue tant que le premier élément de la ligne est non nul.
La table de Routh est dite complète si elle possède $n + 1$ lignes dont le premier coefficient est non nul.

Théorème 23

Tous les zéros de P sont à partie réelle strictement négative si, et seulement si, la table complète existe, et les éléments de la première colonne sont de même signe.

10 Interpolation de Hermite

On note $\mathbb{R}_n[x]$ l'ensemble des polynômes réels de degré au plus n :

$$\mathbb{R}_n[x] = \{P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n; a_i \in \mathbb{R}\}.$$

Théorème 24 (Interpolation de Hermite)

Soient $x_0 < x_1 < \dots < x_m$ et $f_i^{(k)}, i = 0, 1, \dots, m, k = 0, 1, \dots, n_i - 1$ des nombres arbitraires. Il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[x]$ avec n défini par $n + 1 = \sum_{i=0}^m n_i$, qui satisfait l'équation suivante :

$$P^{(k)}(x_i) = f_i^{(k)}, i = 0, 1, \dots, m, k = 0, 1, \dots, n_i - 1.$$

L'existence et l'unicité d'un tel polynôme sont montrées dans le lemme suivant :

Lemme 25

L'application $L : \mathbb{R}_n[x] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$
 $P \mapsto (P(x_0), \dots, P^{(n_0-1)}(x_0), \dots, P(x_m), \dots, P^{(n_m-1)}(x_m))$
 est un isomorphisme.

▷ L est une application linéaire de $\mathbb{R}_n[x]$ dans \mathbb{R}^{n+1} qui est injective. En effet, si P est un polynôme de degré inférieur ou égal à n vérifiant $LP = 0$, alors

$$P^{(k)}(x_i) = 0, i = 0, 1, \dots, m, k = 0, 1, \dots, n_i - 1.$$

Par conséquent, pour tout $i = 0, \dots, m$, x_i est une racine de P de multiplicité n_i .

P est donc un polynôme de degré $\leq n$ admettant $n + 1$ racines (comptées avec multiplicité, nb : $n = \sum_{i=0}^m n_i$). P est donc nul.

D'autre part, les espaces de départ et d'arrivée sont de même dimension, $\dim(\mathbb{R}_n[x]) = \dim(\mathbb{R}^{n+1}) = n + 1$. L est donc un isomorphisme. □

On a une formule explicite pour les polynômes d'interpolations de Hermite :

$$P(x) = \sum_{i=0}^m \sum_{k=0}^{n_i-1} f_i^{(k)} L_{ik}(x)$$

Les polynômes L_{ik} sont définis à partir des polynômes auxiliaires suivants

$$l_{ik} := \frac{(x - x_i)^k}{k!} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^m \left(\frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right)^{n_j}, 0 \leq i \leq m, 0 \leq k \leq n_i - 1$$

On définit les polynômes L_{ik} par récurrence descendante de la manière suivante :

$$L_{i,n_i-1}(x) := l_{i,n_i-1}(x), \quad i = 0, 1, \dots, m,$$

puis pour $k = n_i - 2, n_i - 3, \dots, 0$,

$$L_{ik}(x) := l_{ik}(x) - \sum_{\nu=k+1}^{n_i-1} l_{ik}^{(\nu)}(x_i) L_{i\nu}(x)$$

11 Programmes Scilab

11.1 Contrôle de référence

```
1 // **DONNEES INITIALES**
2
3 l=0.2 //longueur du pendule
4 M=0.5 //masse du chariot
5 m=0.5 //masse du pendule
6 g=9.81 //pesanteur
7 delta=0.5*%pi/180 //angle instant initial
8 D=1.5 //position finale du chariot
9 t=[0,2] //points d evaluation, t(initial), t(final)
10 epsilon=0 //frottement sur le chariot
11
12 y0=[-l*delta,0,-g*delta,0,-g^2*(M+m)*delta/(M*l)] //valeurs de y et de ses
13 //derivees a l instant initial
14 y1=[D,0,0,0,0] //valeurs de y et de ses derivees a l instant final
15
16
17 // **INTERPOLATION DE HERMITE**
18
19 s=poly(0,"s") //polynome elementaire
20
21 p=zeros(2,5) //polynomes auxiliaires
22 L=zeros(2,5) //polynomes generalises de Lagrange
23
24 for k = 0:4
25     p(1,k+1)=(s-t(1))^(k)/factorial(k)*((s-t(2))/(t(1)-t(2)))^5
26     p(2,k+1)=(s-t(2))^(k)/factorial(k)*((s-t(1))/(t(2)-t(1)))^5
27 end
28
29 L(1,5)=p(1,5)
30 L(2,5)=p(2,5)
31
32
33 L(1,4)=p(1,4)-horner(derivat(derivat(derivat(derivat(p(1,4))))),t(1))*L(1,5)
34 L(2,4)=p(2,4)-horner(derivat(derivat(derivat(derivat(p(2,4))))),t(2))*L(2,5)
35
36
37 L(1,3)=p(1,3)-horner(derivat(derivat(derivat(p(1,3))))),t(1))*L(1,4)...
38 -horner(derivat(derivat(derivat(derivat(p(1,3))))),t(1))*L(1,5)
```

```

39
40 L(2,3)=p(2,3) - horner(derivat(derivat(derivat(p(2,3)))), t(2))*L(2,4)...
41 -horner(derivat(derivat(derivat(derivat(p(2,3))))), t(2))*L(2,5)
42
43
44 L(1,2)=p(1,2) - horner(derivat(derivat(p(1,2))), t(1))*L(1,3)...
45 -horner(derivat(derivat(derivat(p(1,2))))), t(1))*L(1,4)...
46 -horner(derivat(derivat(derivat(derivat(p(1,2))))), t(1))*L(1,5)
47
48 L(2,2)=p(2,2) - horner(derivat(derivat(p(2,2))), t(2))*L(2,3)...
49 -horner(derivat(derivat(derivat(p(2,2))))), t(2))*L(2,4)...
50 -horner(derivat(derivat(derivat(derivat(p(2,2))))), t(2))*L(2,5)
51
52
53 L(1,1)=p(1,1) - horner(derivat(p(1,1)), t(1))*L(1,2)...
54 -horner(derivat(derivat(p(1,1))), t(1))*L(1,3)...
55 -horner(derivat(derivat(derivat(p(1,1))))), t(1))*L(1,4)...
56 -horner(derivat(derivat(derivat(derivat(p(1,1))))), t(1))*L(1,5)
57
58 L(2,1)=p(2,1) - horner(derivat(p(2,1)), t(2))*L(2,2)...
59 -horner(derivat(derivat(p(2,1))), t(2))*L(2,3)...
60 -horner(derivat(derivat(derivat(p(2,1))))), t(2))*L(2,4)...
61 -horner(derivat(derivat(derivat(derivat(p(2,1))))), t(2))*L(2,5)
62
63 //polynome d'interpolation de Hermite
64 y=sum(L(1, :). * y0 + L(2, :). * y1) //sortie plate interpolee
65
66
67
68 // **EXPRESSION DE LA COMMANDE U
69 ydot=derivat(y)
70 y3=derivat(derivat(derivat(y)))
71 y2=derivat(derivat(y)) //derivee seconde de la sortie plate
72 y4=derivat(derivat(derivat(derivat(y)))) // derivee quatrieme de y
73
74 u=-M*l/g*y4+(M+m)*y2 //commande
75
76
77
78 // **RESOLUTION DE L EDO ET VERIFICATIONS**
79

```



```

80
81 A=[0,1,0,0;0,-epsilon/M,m*g/M,0;0,0,0,1;0,-epsilon/(1*M),(M+m)*g/(1*M),0]
82 B=[0;1/M;0;1/(1*M)]
83
84 function Xdot=f(r,X)
85     Xdot=A*X+B*horner(u,r)
86 endfunction
87
88 X0=[0;0;delta;0]
89 t0=0
90
91 T=[0:0.01:2] //intervalle d evaluation (abscisse temps)
92
93
94 X=ode('rk',X0,t0,T,f)
95
96
97 // **GRAPHIQUES**
98
99 clf()
100
101 subplot(121)
102 plot(T,horner(y,T),'b',T,horner(u,T),'r')
103 legend('y','u',1)
104 title("Sortie plate et contrôle de référence en fonction du temps")
105
106 subplot(122)
107 plot(T,X(3,:),T,X(1,:))
108 title("Trajectoires de x et de theta en fonction du temps")
109 legend('theta','x',2)
110
111 // **Allure des trajectoires**
112
113 P=[1,0,-1/g,0;0,1,0,-1/g;0,0,-1/g,0;0,0,0,-1/g]
114 R=P*[y;ydot;y2;y3]
115 x1=R(1,:)
116 x2=R(2,:)
117 x3=R(3,:)
118 x4=R(4,:)

```

11.2 Contrôle optimal

```
1 // **DONNEES INITIALES**
2
3 l=1 //longueur du pendule
4 M=0.5//masse du chariot
5 m=0.5 //masse du pendule
6 g=9.81 //pesanteur
7 delta=0.5*%pi/180 //angle instant initial
8 D=1.5 //position finale du chariot
9 t=[0,2] //points d evalutation , t(initial), t(final)
10 X0=[0;0;delta;0]
11
12 A=[0,1,0,0;0,0,m*g/M,0;0,0,0,1;0,0,(M+m)*g/(1*M),0]
13 B=[0;1/M;0;1/(1*M)]
14
15
16 function G1=F1(x)
17     G=expm((t(2)-x)*A)*B*B'* (expm((t(2)-x)*A))'
18     G1=G(1,1)
19 endfunction
20 function G2=F2(x)
21     G=expm((t(2)-x)*A)*B*B'* (expm((t(2)-x)*A))'
22     G2=G(1,2)
23 endfunction
24 function G3=F3(x)
25     G=expm((t(2)-x)*A)*B*B'* (expm((t(2)-x)*A))'
26     G3=G(1,3)
27 endfunction
28 function G4=F4(x)
29     G=expm((t(2)-x)*A)*B*B'* (expm((t(2)-x)*A))'
30     G4=G(1,4)
31 endfunction
32
33 function G5=F5(x)
34     G=expm((t(2)-x)*A)*B*B'* (expm((t(2)-x)*A))'
35     G5=G(2,1)
36 endfunction
37 function G6=F6(x)
38     G=expm((t(2)-x)*A)*B*B'* (expm((t(2)-x)*A))'
39     G6=G(2,2)
40 endfunction
```

```

41 function G7=F7(x)
42     G=expm(( t(2)-x)*A)*B*B'*(expm(( t(2)-x)*A))'
43     G7=G(2,3)
44 endfunction
45 function G8=F8(x)
46     G=expm(( t(2)-x)*A)*B*B'*(expm(( t(2)-x)*A))'
47     G8=G(2,4)
48 endfunction
49 function G9=F9(x)
50     G=expm(( t(2)-x)*A)*B*B'*(expm(( t(2)-x)*A))'
51     G9=G(3,1)
52 endfunction
53 function G10=F10(x)
54     G=expm(( t(2)-x)*A)*B*B'*(expm(( t(2)-x)*A))'
55     G10=G(3,2)
56 endfunction
57 function G11=F11(x)
58     G=expm(( t(2)-x)*A)*B*B'*(expm(( t(2)-x)*A))'
59     G11=G(3,3)
60 endfunction
61 function G12=F12(x)
62     G=expm(( t(2)-x)*A)*B*B'*(expm(( t(2)-x)*A))'
63     G12=G(3,4)
64 endfunction
65 function G13=F13(x)
66     G=expm(( t(2)-x)*A)*B*B'*(expm(( t(2)-x)*A))'
67     G13=G(4,1)
68 endfunction
69 function G14=F14(x)
70     G=expm(( t(2)-x)*A)*B*B'*(expm(( t(2)-x)*A))'
71     G14=G(4,2)
72 endfunction
73 function G15=F15(x)
74     G=expm(( t(2)-x)*A)*B*B'*(expm(( t(2)-x)*A))'
75     G15=G(4,3)
76 endfunction
77 function G16=F16(x)
78     G=expm(( t(2)-x)*A)*B*B'*(expm(( t(2)-x)*A))'
79     G16=G(4,4)
80 endfunction
81 G(1,1)=intg(t(1),t(2),F1)

```

```

82 G(1,2)=intg(t(1),t(2),F2)
83 G(1,3)=intg(t(1),t(2),F3)
84 G(1,4)=intg(t(1),t(2),F4)
85 G(2,1)=intg(t(1),t(2),F5)
86 G(2,2)=intg(t(1),t(2),F6)
87 G(2,3)=intg(t(1),t(2),F7)
88 G(2,4)=intg(t(1),t(2),F8)
89 G(3,1)=intg(t(1),t(2),F9)
90 G(3,2)=intg(t(1),t(2),F10)
91 G(3,3)=intg(t(1),t(2),F11)
92 G(3,4)=intg(t(1),t(2),F12)
93 G(4,1)=intg(t(1),t(2),F13)
94 G(4,2)=intg(t(1),t(2),F14)
95 G(4,3)=intg(t(1),t(2),F15)
96 G(4,4)=intg(t(1),t(2),F16)
97
98 G=G./10^17
99 Ginv=inv(G)
100 Ginv=10^(-17).*Ginv
101 Zf=[D;0;0;0]
102 Xf=Zf-expm(A*t(2))*X0 //etat final
103
104 function Umin=mini(x)
105     Umin=(expm((t(2)-x)*A)*B) '* Ginv*Xf
106 endfunction
107
108 T=[0:0.01:2] //intervalle d evaluation (abscisse temps)
109 Um=zeros(1,length(T))
110 for i=1:length(T)
111     Um(i)=mini(T(i))
112 end
113
114 clf()
115 subplot(121)
116 plot(T,Um)
117 title('Commande optimale en fonction du temps')
118
119
120 function Xdot=fc(r,X)
121     Xdot=A*X+B*mini(r)
122 endfunction

```

```
123
124 t0=0
125
126 T=[0:0.01:2] //intervalle d evaluation (abscisse temps)
127
128
129 Xc=ode( 'rk' ,X0,t0 ,T, fc )
130
131 T=[0:0.01:2] //intervalle d evaluation (abscisse temps)
132 subplot(122)
133 plot(T,Xc(3,:),T,Xc(1,:))
134 title("Trajectoires de x et de theta en fonction du temps")
135 legend('theta','x',2)
```