Métaplan des leçons mathématiques

Julie Parreaux

2018 - 2019

Table des matières

Première partie

Leçons d’algèbre

Leçon 101 : Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

Références pour la leçon

[9] Audin, *Géométrie.*
[14] Berhuy, *Algèbre : le grand combat.*
[18] Boyer, *Algèbre et géométries.*
[22] Caldero et Germoni, *Histoires hédonistes de groupes et de géométrie, tome 1.*
[23] Caldero et Germoni, *Histoires hédonistes de groupes et de géométrie, tome 2.*
[24] Caldero et Germoni, *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométrie, tome 2.*
[28] Combes, *Algèbre et géométrie.*
[38] Garnier, *Groupes et géométrie pour l'agrégation.*
[68] Ulmer, *Théorie des groupes.*

Développements de la leçon

Cardinal du cône nilpotent — Coloriage d'un cube

Motivation

Défense

Les actions de groupes sont un outil puissant de la théorie des groupes. Elles sont également à la base de la théorie de la géométrie (unification des différentes théorie). Les applications des actions de groupes sont nombreuses : rendre plus facile un problème en géométrie, dénombrer des ensembles finis (coloriage, sur des corps finis, ...)

Ce qu'en dit le jury

Dans cette leçon, il faut bien dominer les deux approches de l'action de groupe : l'approche naturelle et l'approche via le morphisme du groupe agissant vers le groupe des permutations de l'ensemble sur lequel il agit. La formule des classes et ses applications immédiates sont incontournables. Des exemples de natures différentes doivent être présentés : actions sur un ensemble fini, sur un espace vectoriel (en particulier les représentations), sur un ensemble de matrices, sur des groupes ou des anneaux. Les exemples issus de la géométrie ne manquent pas (groupes d'isométries d'un solide ou d'un polygone régulier). Il est important de savoir calculer des stabilisateurs et des orbites notamment dans le cadre de l'action par conjugaison. Les théorèmes de Sylow peuvent avoir leur place dans cette leçon.

Parmi les applications des actions de groupes, on pourra citer des résultats de dénombrement, comme par exemple la formule de Lucas qui permet de calculer efficacement les cœfficients binomiaux.

S'ils le désirent, les candidats peuvent aller plus loin en décrivant les actions naturelles de $PGL(2, \mathbb{F}_q)$ sur la droite projective, ou de $SL_2(\mathbb{Z})$ sur le demi-plan de Poincaré

En notant que l'injection du groupe de permutations dans le groupe linéaire par les matrices de permutations donne lieu à des représentations, ils pourront facilement en déterminer le caractère.

Métaplan

I. Actions de groupe [14, p.171] Les actions de groupes permettent d'étudier et de représenter les éléments d'un groupe en étudiant des sous-groupe ou des ensembles induits par l'action du groupe.

- ⇝ *Définitions* : Action de groupe + Morphisme (Une action n'est à priori pas un morphisme !)
- ⇝ *Définition* : Action de groupe fidèle (via l'action et du morphisme)
- ⇝ *Exemples* : Action triviale (le noyau de l'action est le noyau du morphisme sous-jacent est l'ensemble (= éléments qui agissent trivialement)) ; action par permutation ; action par multiplication dans $\mathbb{Z}$
- ⇝ *Définitions* : Stabilisateur + action libre + exemples via les précédents
- ⇝ *Propositions* [22, p.15] : Propriété du stabilisateur
- ⇝ *Propositions*[68, p.31] : Caractérisation du noyau (caractérisation de la fidélité)
- ⇝ *Lemme* : Existence d'une relation d'équivalence
- ⇝ *Définitions* : Orbite + action transitive + points fixes + exemples via les précédents
- ⇝ *Proposition* [22, p.16] : Caractérisation des actions transitives

II. Action de groupes sur un ensemble fini Les notions d'orbites et de stabilisateurs tels que nous les avons présenté donnent des propriétés intéressantes sur le groupe ou sur l'ensemble. Plus particulièrement, si au moins un de ceux-ci est fini, nous avons du dénombrement.

A. *Formule des classes et conséquences* Les orbites forment une partitions de l'ensemble. Si l'ensemble est fini, on peut en déduire des propriétés sur son cardinal.

- ⇝ *Proposition* [68] : Lien entre orbite et stabilisateur
- ⇝ *Lemme* [14, p.175] : Équation aux classes
- ⇝ *Application* [24, p.57] : Dénombrement de matrice sur un corps fini : matrice inversibles, groupe spécial linéaire, famille libre (et donc d'application injective), endomorphisme diagonalisable.
- ⇝ *Application* [23] : Cône nilpotent
- ⇝ *Proposition* : Formule de Burnside
- ⇝ *Application* [68, p.138] : Les sous-groupe de $SO_3(\mathbb{R})$
- ⇝ *Application* [28, p.44] : Collier de perles

B. *Étude des p-groupes via les actions de groupes [68, p.69]* Les actions de groupes sont bien pratiques pour étudier les p-groupes qui sont une classe de groupe fini particulière.

- ⇝ *Définition* : $p-$groupe
- ⇝ *Proposition* : Points fixe d'un p-groupe
- ⇝ *Théorème* : Théorème de Cauchy
- ⇝ *Exemples* : $G = \{e\}$; D_4
- ⇝ *Théorème* : Caractérisation des $p-$groupes
- ⇝ *Proposition* : centres des $p-$groupes
- ⇝ *Application* : p^2 toujours abélien
- ⇝ **Culture générale** : *Théorème* : Théorèmes de Sylow

III. Actions d'un groupe sur lui-même Les actions d'un groupe sur lui-même peuvent être correctement caractérisée : elles se classent par catégorie.

A. *Action par translation [68, p.31]* Les actions par translations permettent de facilité l'étude des groupes finis en diminuant leur taille : on montre qu'ils sont isomorphes à un groupe de taille inférieur.

- ⇝ *Définition* : Action par translation à gauche
- ⇝ *Remarque* : Même chose à droite
- ⇝ *Remarque* : Dans le cas de matrices, on change la base d'un vecteur
- ⇝ *Exemple* : G opère sur $\mathcal{P}(G)$

⇝ *Exemple* : G opère sur $G \setminus H$ (en pratique : étude des groupe fini sur ordinateur)

⇝ *Proposition* : $\mathrm{Stab}(G) = \{e\}$; l'action est fidèle, libre et transitive

⇝ *Application* : Théorème de Cayley

B. *Action par conjugaison [68, p.33]* Dans le cadre de groupe sur les matrices, l'action par conjugaison permet de définir des classes de similitudes et des invariants. De plus, on définit grâce à celle-ci la notion de matrices équivalente.

⇝ *Définition* : Groupe agissant par conjugaison + centralisateur

⇝ *Définition* : Dans le cas d'un groupe de matrice : changement de base

⇝ *Proposition* : Action jamais libre mais fidèle et transitive que si $G = \{e\}$

⇝ *Proposition* : Caractérisation du centralisateur ⇝ *Définition* : Éléments conjugués

⇝ *Définition* : Normalisateur ⇝ *Proposition* : Caractérisation d'un sous-groupe distingué

⇝ *Définition* : Classe de similitude ⇝ *Exemple* : $GL_n(\mathbb{C})$

⇝ *Définition* : Invariant ⇝ *Exemple* : spectre

IV. Actions sur un ensemble de matrices

Il existe des actions groupes particulière sur les matrices nous permettant de caractériser un nombre important de propriétés.

A. *Action par équivalence [22, p.5]* Pour toute application φ on peut lui associé une représentation matricielle dans une base adéquate. C'est ce que fait cette action (elle nous permet de reformuler le théorème du rang)

⇝ *Cadre* : $G = GL_n(K) \times GL_n(K)$ où K est un corps ⇝ *Définitions* : action ; orbite et stabilisateur

⇝ *Exemple* : $I_{m,n,r}$

⇝ *Théorème* : Caractérisation des orbites avec le rang (reformuler le théorème du rang)

B. *Action par congruence [22, p.250]* L'action par congruence permet de donner une classification de deux matrices congruentes afin de classer les formes quadratiques.

⇝ *Définition* : Groupe agissant par congruence ⇝ *Théorème* : Caractérisation orbites selon corps

⇝ *Exemples* : I_n et le groupe orthogonal ⇝ *Application* : Loi de réciprocité quadratique

V. Application à la géométrie

La première application des actions de groupes est en géométrie : elles ont permis l'unification de la théorie.

A. *Isométrie [9, p.52]* Les isométries sont des applications sur un espace que l'on définie par les actions de groupes. De plus, on les utilisent pour caractériser le groupe des isométries dans certains cas.

⇝ *Définition* [18, p.108] : espace affine via les actions de groupe

⇝ *Définition* : groupe isométrie + isométrie positive (conservation de l'orientation)

⇝ *Théorème* : générateur du groupe des isométrie ⇝ *Application* : les isométrie en dimension 3

⇝ *Théorème* [22] : Caractérisation des isométrie du tétraèdre

⇝ *Théorème* [22] : Caractérisation des isométrie du cube ⇝ *Application* [22] : Coloriage du cube

B. *Angles [38, p.313]* On sait depuis très longtemps manipuler les angles : mais comment définir cette notion ? Les actions de groupes et les rotations nous permettent de définir des objets que nous ne connaissons pas bien.

⇝ *Définition* : Ensembles des demi-droites $\mathcal{D}$ et des vecteurs unitaires $\mathcal{U}$

⇝ *Proposition* : Ces ensembles sont en bijection

⇝ *Théorème* : Le groupe $O^+(\mathcal{P})$ agit simplement transitivement sur $\mathcal{U}$ et $\mathcal{UD}$

⇝ *Définition* : relation d'équivalence issues de ces actions + notions d'angle

⇝ *Théorème* : Bijection canonique sur l'ensemble des angles

⇝ *Définition* : Groupe des angle de demi-droites vectorielles **Attention** : l n'existe pas de groupe des angles : ils sont toujours affiliés à un sous-groupe

⇝ *Théorème* : théorème fondamental de la mesure des angles.

⇝ *Application* : angle géométrique et somme des angles d'un triangle

Leçon 104 : Groupes finis. Exemples et applications.

Références pour la leçon

[11] Bailly-Maitre, *Arithmétique et cryptologie.*
[14] Berhuy, *Algèbre : le grand combat.*
[21] Calais, *Éléments de la théorie des groupes.*
[22] Caldero et Germoni, *Histoires hédonistes de groupes et de géométrie, tome 1.*
[23] Caldero et Germoni, *Histoires hédonistes de groupes et de géométrie, tome 2.*
[24] Caldero et Germoni, *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométrie, tome 2.*
[28] Combes, *Algèbre et géométrie.*
[53] Nourdin, *Agrégation de mathématiques épreuve orale.*
[68] Ulmer, *Théorie des groupes.*

Développements de la leçon

Simplicité de $\mathfrak{A}_n$ — Cardinal du cône nilpotent

Motivation

Défense

Quelles sont les particularités des groupes finis ? Les groupes finis ont un cardinal fini, les notions d'ordres d'indices et d'exposant prennent alors tous leurs sens. De plus, les actions de groupes donnent des applications propres comme le dénombrement.

Pourquoi les étudions nous ? Outre leur "facilité" d'étude dû à leur cardinal fini : on peut par exemple en tracé une table des loi, de nombreuses applications sont données par ces groupes particulier. On les étudie pour l'arithmétique puis la cryptographie qu'on a réussi à développer sur ces groupes. De plus, nous avons étudier des sous-groupes finis intéressant (vus comme groupe fini) dans le cadre de la géométrie par exemple.

Ce qu'en dit le jury

Dans cette leçon il faut savoir manipuler correctement les éléments de différentes structures usuelles ($\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\mathfrak{S}_n$, etc.) comme, par exemple, en proposer un générateur ou une famille de générateurs, savoir calculer un produit de deux permutations, savoir décomposer une permutation en produit de cycles à supports disjoints. Il est important que la notion d'ordre d'un élément soit mentionnée et comprise dans des cas simples. Le théorème de structure des groupes abéliens finis doit être connu. Il est bon de connaître les groupes d'ordre p et p^2 pour p premier ainsi que les groupes d'ordre inférieur à 8.

Les exemples doivent figurer en bonne place dans cette leçon. Les groupes d'automorphismes fournissent des exemples très naturels. On peut aussi étudier les groupes de symétries $\mathfrak{A}_4$, $\mathfrak{S}_4$, $\mathfrak{A}_5$ et relier sur ces exemples géométrie et algèbre, les représentations ayant ici toute leur place ; il est utile de connaître les groupes diédraux.

S'ils le désirent, les candidats peuvent ensuite mettre en avant les spécificités de groupes comme le groupe quaternionique, les sous-groupes finis de $SU(2)$ ou les groupes $GL_n\left(\mathbb{F}_q\right)$.

Métaplan

I. Groupes finis ? [21, p.8] Qu'est-ce qu'un groupe fini ? Peux-ton les classifier ? Comment faire lorsqu'ils sont plus grand ?

- $\rightsquigarrow$ *Définitions* : groupes, groupes fini (et l'ordre d'un groupe), sous-groupe, groupe cyclique.
- $\rightsquigarrow$ *Exemple* d'un groupe fini avec une table de Cayley (abélien et non abélien) (Différencier des groupes comme $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$).
- $\rightsquigarrow$ *Proposition* [14, p.385] : Classification des groupes fini de taille ≤ 15 (Donner des exemples)

<table>
<tr><td>2</td><td>$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$</td><td>3</td><td>$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$</td><td>4</td><td>$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}\,;(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$</td><td>5</td><td>$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$</td><td>6</td><td>$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}\,;D_3$</td></tr>
<tr><td>7</td><td>$\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$</td><td>8</td><td colspan="5">$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}\,;\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\,;(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3\,;D_4, Q_8$</td><td>9</td><td>$\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}\,;(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$</td></tr>
<tr><td>10</td><td>$\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}\,;D_5$</td><td>11</td><td>$\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$</td><td>12</td><td colspan="5">$\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}\,;\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\,;(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})\times_\rho\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}\,;D_6,\mathfrak{A}_4$</td></tr>
<tr><td>13</td><td>$\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$</td><td>14</td><td>$\mathbb{Z}/14\mathbb{Z}\,;D_7$</td><td>15</td><td>$\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$</td><td colspan="4"></td></tr>
</table>

II. L'ordre, l'indice et l'exposant d'un groupe fini L'apport indéniable d'un groupe fini est son cardinal fini. En effet, il est alors possible de raisonner sur ce cardinal et d'en étudier des relations. Il est alors facile de mettre en avant les notions d'ordre, d'indice et d'exposant.

A. *Théorème de Lagrange et ordre d'un élément [11, p.115]* On étudie l'ordre d'un élément car il nous donne des renseignements précieux sur la structure du groupe fini.

- $\rightsquigarrow$ *Théorème* : Théorème de Lagrange (Garder en tête : les classes de g modulo H sont équipotentes.)
- $\rightsquigarrow$ *Définition* : Ordre d'un élément (Garder en tête que l'existence d'un tel élément n'est pas assuré)
- $\rightsquigarrow$ *Corollaire* : Ordre d'un élément divise ordre du groupe
- $\rightsquigarrow$ *Application en arithmétique* [53, p.211] : p, q premiers impairs vérifiant $q|2^p - 1$. Alors $q = 1[p]$.
- $\rightsquigarrow$ *Corollaire* [68, p.25] : Un groupe d'ordre p premier est cyclique.
- $\rightsquigarrow$ *Exemple* : $\mathbb{F}_p^*$ vu comme groupe est cyclique.

B. *Groupe quotient et indice d'un sous-groupe [21, p.77]* L'indice d'un sous-groupe permet de caractériser les sous-groupes distingué. Il donne également quelques relations sur le cardinal des groupes mis en jeu.

- $\rightsquigarrow$ *Définition* [21, p.149] : Sous-groupe distingué
- $\rightsquigarrow$ *Définition* [21, p.149] : Groupe quotient (le quotienté est un groupe si le sous-groupe qui le quotiente est distingué)
- $\rightsquigarrow$ *Définition* : Indice d'un groupe
- $\rightsquigarrow$ *Remarque* : L'indice peut être fini sans que le groupe ni le sous-groupe le sois : $\mathbb{Z}$ et $n\mathbb{Z}$.
- $\rightsquigarrow$ *Théorème* : Théorème de Poincaré $\rightsquigarrow$ *Théorème* : Formule des indices
- $\rightsquigarrow$ *Application* : Indice 2 = sous-groupe distingué

C. *Exposant d'un groupe et indicateur de Carmicaël [11, p.127]* Trouver l'ordre d'un élément n'est pas toujours simple : nous cherchons alors un multiple de tous les ordres d'un élément qui est raisonnable

- ⇝ *Définition* : Exposant de groupe
- ⇝ *Proposition* : Relation de divisibilité de l'ordre d'un groupe et de son exposant
- ⇝ *Définition* : Indicateur de Carmicaël ⇝ *Proposition* : propriété de l'indicatrice de Carmicaël
- ⇝ *Application* : Pour tout x impaire et non multiple de 3, $x^2 - 1$ est multiple de 24.

D. *Groupes abéliens finis et étude de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ [53, p.207]* Lorsque le groupe fini est abélien, il existe un théorème de structure qui nous permet de nous concentrer uniquement sur l'étude des groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

- ⇝ *Théorème* : Théorème de structure pour les groupes abéliens fini
- ⇝ *Remarque* : théorème de structure des groupe abélien de type fini.
- ⇝ *Proposition* : Soient m et n deux entiers ≥ 1. Pour que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et$\mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$ soient isomorphes (en tant que groupes), il faut et il suffit que $m = n$.
- ⇝ *Proposition* : Soit $n \geq 2$ un entier. Pour que tout groupe d'ordre n soit cyclique, il faut et il suffit que n et $\varphi(n)$ soient premiers entre eux (où φ désigne la fonction d'Euler).
- ⇝ *Propriétés sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$* [11, p.121] : générateurs ; éléments inversibles
- ⇝ *Application* [11, p.220] : cryptographie (Diffie-Hellman)

III. Actions de groupes finis [68, p.27] Un des intérêt des groupes finis est l'étude des actions de groupes via ses groupes. On peut alors définir des notions de dénombrement ou étudier certains types de groupes

- ⇝ *Définitions* : Actions de groupe (action et morphisme)
- ⇝ *Définition* : Orbites
- ⇝ *Définition* : Stabilisateurs
- ⇝ *Définition* : Point fixes

A. *Théorème de Cayley et étude de $\mathfrak{S}_n$ [14, p.201]* Les actions de groupes permettent d'établir le théorème de Cayley qui justifie l'étude restreinte aux groupes $\mathfrak{S}_n$.

- ⇝ *Théorème* : Théorème de Cayley (actions transitives, justification de l'étude de $\mathfrak{S}_n$)
- ⇝ *Proposition* : Existence de sous-groupe distingué
- ⇝ *Étude de $\mathfrak{S}_n$* : générateurs (et applications), produit de transpositions, décomposition en cycles, ...
- ⇝ *Étude de $\mathfrak{A}_n$* : définition, générateurs, simplicité

B. *Équation aux classes et dénombrement [14, p.172]* Les orbites forment une partitions de l'ensemble. Si l'ensemble est fini, on peut en déduire des propriétés sur son cardinal.

- ⇝ *Proposition* [68] : Lien entre orbite et stabilisateur ⇝ *Lemme* [14, p.175] : Équation aux classes
- ⇝ *Application* [24, p.57] : Dénombrement de matrice sur un corps fini : matrice inversibles, groupe spécial linéaire, famille libre (et donc d'application injective), endomorphisme diagonalisable.
- ⇝ *Application* [23] : Cône nilpotent ⇝ *Proposition* : Formule de Burnside
- ⇝ *Application* [68, p.138] : Les sous-groupe de $SO_3(\mathbb{R})$ ⇝ *Application* [28, p.44] : Collier de perles

C. *Étude des p-groupes via les actions de groupes [68, p.69]* Les actions de groupes sont bien pratiques pour étudier les p-groupes qui sont une classe de groupe fini particulière.

- ⇝ *Définition* : $p-$groupe
- ⇝ *Proposition* : Points fixe d'un p-groupe
- ⇝ *Théorème* : Théorème de Cauchy
- ⇝ *Exemples* : $G = \{e\}$; D_4
- ⇝ *Théorème* : Caractérisation des $p-$groupes
- ⇝ *Proposition* : centres des $p-$groupes
- ⇝ *Application* : p^2 toujours abélien
- ⇝ **Culture générale** : *Théorème* : Théorèmes de Sylow

Leçon 105 : Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.

Références pour la leçon

[14] Berhuy, *Algèbre : le grand combat.*
[21] Calais, *Éléments de la théorie des groupes.*
[22] Caldero et Germoni, *Histoires hédonistes de groupes et de géométrie, tome 1.*
[44] Hauchecorne, *Les contre-exemples en mathématiques.*
[59] Ramis, Deschamps et Odoux, *Cours de mathématiques spéciale, tome 1.*
[68] Ulmer, *Théorie des groupes.*

Développements de la leçon

Coloriage du cube — Simplicité de $\mathfrak{A}_n$

Motivation

Défense

L'étude du groupe $\mathfrak{S}_n$ est primordiale car celui-ci intervient dans de nombreux domaines des mathématiques : on le voit en algèbre linéaire, en géométrie. De plus, dans la théorie des groupes, il tient une place à part puisque grâce aux actions de groupes (via le morphisme de structure), il est au cœur de la théorie des actions de groupes. le groupe symétrique est également (via le théorème de Cayley) un bon moyen de bien connaître les groupes finis, et en particulier les groupes finis non-abéliens.

Les actions de groupes sont un bon moyen de bien connaître un groupe. Étant donné la place privilégiée de $\mathfrak{S}_n$, ceux-ci est encore plus vrai dans ce cadre. Le but de la leçon est alors l'étude du groupe $\mathfrak{S}(E)$ pour E contenant au moins deux éléments qui n'est à priori pas un groupe abélien (sauf dans le cas où $|E| = 2$).

Ce qu'en dit le jury

Parmi les attendus, il faut savoir relier la leçon avec les notions d'orbites et d'actions de groupes. Il faut aussi savoir décomposer une permutation en cycles à supports disjoints, tant sur le plan théorique (preuve du théorème de décomposition), que pratique (sur un exemple). Il est important de savoir déterminer les classes de conjugaisons du groupe symétrique par la décomposition en cycles, d'être capable de donner des systèmes de générateurs.

L'existence du morphisme signature est un résultat non trivial mais ne peut pas constituer, à elle seule, l'objet d'un développement. Il est bon d'avoir en tête que tout groupe fini se plonge dans un groupe symétrique et de savoir calculer la signature des permutations ainsi obtenues dans des cas concrets.

Les applications sont nombreuses, il est très naturel de parler du déterminant, des polynômes symétriques ou des fonctions symétriques des racines d'un polynôme. On peut également parler du lien avec les groupes d'isométries des solides.

S'ils le désirent, les candidats peuvent aller plus loin en s'intéressant aux automorphismes du groupe symétrique, à des problèmes de dénombrement, aux représentations des groupes des permutations ou encore aux permutations aléatoires.

Métaplan

I. Le groupe des permutations On commence par donner quelques premières définitions et propriétés notamment autours de la commutativité et des actions de groupes.

A. *Le groupe des permutations [14, p.201]* On justifie ici pourquoi on étudie uniquement les groupes $\mathfrak{S}_n$. On donne également quelques éléments sur la commutativité.

- $\rightsquigarrow$ *Définition* : Ensemble des permutations
- $\rightsquigarrow$ *Proposition* : Groupe des permutations
- $\rightsquigarrow$ *Proposition* : Conservation de l'isomorphisme par les permutations (justification de $\mathfrak{S}_n$)
- $\rightsquigarrow$ *Proposition* : Cardinal de $\mathfrak{S}_n$
- $\rightsquigarrow$ *Proposition* [44, p.21] : Caractère non-abélien de $\mathfrak{S}_n$
- $\rightsquigarrow$ *Proposition* [44, p.21] : Centre de $\mathfrak{S}_n$
- $\rightsquigarrow$ *Définition* : Support (donne la commutativité)
- $\rightsquigarrow$ *Proposition* : Propriété du support
- $\rightsquigarrow$ *Proposition* : Caractérisation de la commutativité à l'aide du support

B. *Actions de groupe et S_n [14, p.171]* Les actions de groupes et le groupes symétriques sont très liés (via le morphisme structurel). On va aussi regarder l'action de $\mathfrak{S}_n$ sur un ensemble.

- $\rightsquigarrow$ *Définition* : Action de groupe (via le morphisme structurel) ; orbite ; stabilisateur
- $\rightsquigarrow$ *Proposition* [68, p.42] : Action de $\mathfrak{S}_n$ sur $\mathfrak{S}_m$
- $\rightsquigarrow$ *Théorème* : Théorème de Cayley
- $\rightsquigarrow$ *Définition* : Polynôme symétrique et alterné via les actions de groupe
- $\rightsquigarrow$ *Proposition* : Symétrique $\Rightarrow$ alterné et symétrique pour toute transpositions
- $\rightsquigarrow$ *Théorème* : Définition des polynômes symétriques élémentaires
- $\rightsquigarrow$ *Remarque* : Relation coefficients-racines

II. Décomposition de permutation en produits de cycles [14, p.204] La décomposition en produits de cycles est une opération très importante qui résulte de l'action naturelle de $\mathfrak{S}_n$ sur lui-même. Elle nous donne le premier système de générateurs ainsi que les classes de conjugaison.

A. *Notion de cycles* La notion de cycle découle directement de la notion d'orbite par cette action

- $\rightsquigarrow$ *Définition* : Orbite
- $\rightsquigarrow$ *Proposition* : Propriétés : singleton, partition, ordre.
- $\rightsquigarrow$ *Définition* : Cycle, transposition + notations
- $\rightsquigarrow$ *Proposition* : Caractérisation des cycles
- $\rightsquigarrow$ *Lemme* : Ordre d'un cycle
- $\rightsquigarrow$ *Application* : Inverse d'une transposition
- $\rightsquigarrow$ *Proposition* [21, p.112] : Nombre de transposition

B. *Décomposition en produits de cycles* On donne maintenant le résultat de la décomposition en cycle. On donne également la méthode pour trouver la décomposition en cycle en pratique, ainsi que quelques conséquences.

- $\rightsquigarrow$ *Théorème* : Décomposition en cycle
- $\rightsquigarrow$ *Méthode* : En pratique sur un exemple
- $\rightsquigarrow$ *Théorème* : Ordre d'une permutation quelconque

C. *Système de générateurs* Les systèmes de générateurs est l'un des premiers outils que nous possédons pour décrire un groupe de manière simplifiée. Le premier système de générateur est donné par cette décomposition en cycles.

- $\rightsquigarrow$ *Proposition* : Par cycle
- $\rightsquigarrow$ *Application* : Calcul de l'ordre d'un élément
- $\rightsquigarrow$ *Proposition* : Par transition
- $\rightsquigarrow$ *Application* : Définir un morphisme : Isométrie du cube
- $\rightsquigarrow$ *Proposition* : Par $(1\ 2)(1 \dots n)$

- ⇝ *Remarque* : Ne fonctionne pour n'importe quelle transition (exemple pour $n = 4$)
- ⇝ *Application* : Les groupes finis engendré par deux éléments : $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
- ⇝ *Application* : Contre-exemple à la réciproque : tout groupe fini simple est engendré par deux éléments.

D. *Classes de conjugaison* On termine par donnée les classes de conjugaison de $\mathfrak{S}_n$ via leur définition par la décomposition en cycle distincts.

- ⇝ *Définition* : Deux permutations conjuguées dans $\mathfrak{S}_n$
- ⇝ *Lemme* : Conjugaison d'un cycle
- ⇝ *Théorème* : Caractérisation de la conjugaison de deux permutations
- ⇝ *Définition* : Type d'une permutation
- ⇝ *Corollaire* : Bijection entre les types et les classes de conjugaisons
- ⇝ *Exemple* : Classes de conjugaison de $\mathfrak{S}_4$.

III. Le groupe alterné $\mathfrak{A}_n$ [14, p.215] Un sous-groupe bien connu de $\mathfrak{S}_n$ est $\mathfrak{A}_n$ le groupe alterné.

A. *Signature d'une permutation* Le morphisme signature nous permet de définir le groupe alterné.

- ⇝ *Théorème* : Morphisme de signature
- ⇝ *Définition* : Signature
- ⇝ *Application* : Déterminant
- ⇝ *Définition* : Groupe alterné
- ⇝ *Proposition* [68, p.50] : Cardinal
- ⇝ *Proposition* : Calcul de la signature
- ⇝ *Application* : Signature d'un cycle

B. *Le groupe alterné* Le groupe alterné est le sous-groupe distingué de $\mathfrak{S}_n$.

- ⇝ *Proposition* : Générateurs de $\mathfrak{A}_n$
- ⇝ *Proposition* : Les 3-cycles sont conjugués dans $\mathfrak{A}_n$
- ⇝ *Proposition* : $\mathfrak{A}_n$ est un sous-groupe distingué dans $\mathfrak{S}_n$
- ⇝ *Application* (Cayley) : $\mathfrak{S}_n$ se plonge dans $\mathfrak{A}_m$.
- ⇝ *Théorème* : $\mathfrak{A}_n$ est simple pour $n \neq 4$
- ⇝ *Contre-exemple* : $\mathfrak{A}_4$ est pas simple (sous-groupe engendré par les double transpositions)
- ⇝ *Application* : Sous-groupes distingué de $\mathfrak{S}_n$.

Leçon 106 : Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $GL(E)$. Applications.

Références pour la leçon

[22] Caldero et Germoni, *Histoires hédonistes de groupes et de géométrie, tome 1.*
[24] Caldero et Germoni, *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométrie, tome 2.*
[26] Cognet, *Algèbre linéaire.*
[34] Francinou, Gianella et Nicolas, *Oraux X-ENS, Algère 2*
[40] Gourdon, *Algèbre.*
[53] Nourdin, *Agrégation de mathématiques épreuve orale.*
[56] Perrin, *Cours d'algèbre.*

Développements de la leçon

Cardinal du cône nilpotent — Caractérisation de $O_{p,q}$

Motivation

Défense

Le groupe linéaire est un des premiers groupes que l'on peut introduire pour parler de théorie des groupes en algèbre linéaire. Il est composé des automorphismes d'un espace vectoriel. On est alors amené à utiliser des notions d'algèbre linéaire pour étudier un groupe.

Ce qu'en dit le jury

Cette leçon ne doit pas se résumer à un catalogue de résultats épars sur $GL(E)$. Il est important de savoir faire correspondre les sous-groupes du groupe linéaire avec les stabilisateurs de certaines actions naturelles (sur des formes quadratiques, symplectiques, sur des drapeaux, sur une décomposition en somme directe, etc.). On doit présenter des systèmes de générateurs de $GL(E)$ et étudier la topologie de ce groupe en précisant pourquoi le choix du corps de base est important. Les liens avec le pivot de Gauss sont à détailler. Il faut aussi savoir réaliser $\mathfrak{S}_n$ dans $GL_n(K)$ et faire le lien entre signature et déterminant, et entre les classes de conjugaison et les classes de similitude.

S'ils le désirent, les candidats peuvent aller plus loin en remarquant que la théorie des représentations permet d'illustrer l'importance de $GL_n(\mathbb{C})$ et de son sous-groupe unitaire.

Métaplan

Cadre : K est un corps et E un K-espace vectoriel de dimension finie n.

I. Le groupe linéaire [56, p.95] Le groupe linéaire est le groupe formé des applications linéaires inversibles dont l'outil matriciel permet son étude.

A. *Groupes $GL(E)$ et $SL(E)$*

- ⇝ *Définition* : groupe linéaire
- ⇝ *Remarque* : $GL(E) \simeq GL_n(K)$ (outil matriciel)
- ⇝ *Proposition* [40, p.115] : caractérisation de $GL(E)$
- ⇝ *Proposition* [53, p.208] : $GL_n(E) \simeq GL_m(E)$
- ⇝ *Proposition* : morphisme déterminant
- ⇝ *Définition* : groupe linéaire spécial
- ⇝ *Remarque* : $SL(E) \simeq SL_n(K)$ (interprétation)
- ⇝ *Remarque* : $SL(E)$ distingué dans $GL(E)$

B. *Système de générateurs pour ces groupes* On cherche les générateurs les plus simples : ici ils sont donnés par des hyperplans. La méthode du pivot de Gauss est soit une application soit un élément pour exhiber les générateurs.

- ⇝ *Définition-Proposition* : Dilatation
- ⇝ *Remarque* : Définition des réflexions
- ⇝ *Définition-Proposition* : Transvection
- ⇝ *Proposition* : Conjugaison des transvections
- ⇝ *Théorème* : Générateur de $SL(E)$
- ⇝ *Corollaire* : Générateur de $GL(E)$
- ⇝ *Application* : Pivot de Gauss
- ⇝ *Application* : Calcul de l'inverse

C. *Exemple de sous-groupes de $GL(E)$ et de $SL(E)$* Deux exemples de sous-groupes : les centres et les sous-groupes finis.

- ⇝ *Théorème* : Centre
- ⇝ *Application* : La non-simplicité des groupes
- ⇝ *Remarque* : Groupe projectif linéaire
- ⇝ *Définition* [26, p.207] : Matrice de permutation
- ⇝ *Remarque* [26, p.207] : lien entre déterminant et signature
- ⇝ *Théorème* : Cayley
- ⇝ *Corollaire* : Un groupe fini G se plonge dans $GL_n(K)$
- ⇝ *Théorème* [34, p.185] : Burnside

II. Actions de $GL(E)$ $GL(E)$ agit sur de nombreux espaces : les matrices, les groupes ; avec plusieurs actions classiques

A. *Actions naturelles*

- ⇝ *Définition* : Action transitivement à gauche
- ⇝ *Remarque* : Changement de base pour un vecteur
- ⇝ *Définition* : Action par conjugaison
- ⇝ *Remarque* : Changement de base
- ⇝ *Définition* : Classe de similitude
- ⇝ *Définition* : Invariant

B. *Action par équivalence [22, p.5]* Pour toute application φ on peut lui associé une représentation matricielle dans une base adéquate. C'est ce que fait cette action (elle nous permet de reformuler le théorème du rang)

- ⇝ *Cadre* : $G = GL_n(K) \times GL_n(K)$ où K est un corps
- ⇝ *Définitions* : Action ; orbite et stabilisateur
- ⇝ *Exemple* : $I_{m,n,r}$
- ⇝ *Théorème* : Caractérisation des orbites avec le rang (reformuler le théorème du rang)

C. *Action par congruence [22, p.250]* L'action par congruence permet de donner une classification de deux matrices congruentes afin de classer les formes quadratiques.

- ⇝ *Définition* : Groupe agissant par congruence
- ⇝ *Théorème* : Caractérisation des orbites selon le corps
- ⇝ *Exemples* : I_n et le groupe orthogonal
- ⇝ *Application* : Loi de réciprocité quadratique

III. Le rôle du corps de base Le corps de base joue un rôle essentiel dans certaines propriétés du groupe linéaire. Nous allons en étudier certaine.

A. *Groupe linéaire fini : corps finis [24, p.60]*

- ⇝ *Proposition* : Cardinal de $GL_n(\mathbb{F}_q)$
- ⇝ *Théorème* : Nombre de matrice diagonalisable sur $GL_n(\mathbb{F}_q)$
- ⇝ *Définition* : Groupe spécial projectif
- ⇝ *Théorème* : Cardinal du cône nilpotent

B. *Groupe linéaire réel et complexe*

- ⇝ *Cadre* : $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
- ⇝ *Proposition* : $GL_n(K)$ est dense dans $\mathcal{M}_n(K)$
- ⇝ *Application* : $\chi_{AB} = \chi_{BA}$
- ⇝ *Application* : Différentielle du déterminant
- ⇝ *Proposition* : $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs
- ⇝ *Remarque* : $GL_n(\mathbb{R})$ ne l'est pas
- ⇝ *Application* : ensemble des projecteurs de rang p est connexe
- ⇝ *Proposition* : $SL(\mathbb{C})$ et $SL(\mathbb{R})$ sont connexes par arcs

IV. Groupe orthogonal

Le groupe orthogonal est un sous-groupe particulier de $GL(E)$. On peut le voir et l'utiliser avec de nombreux points de vus : forme quadratique, action de groupe, orthogonalité, ...

A. *Groupe orthogonal et groupe orthogonal spécial [56, p.141]* Le groupe orthogonal peut également être vu comme le groupe du stabilisateur de I_n par l'action de congruence sur $GL(E)$

- ⇝ *Définition* [22, p.259] : Groupe orthogonal
- ⇝ *Remarque* : Sous-groupe de $GL(E)$.
- ⇝ *Proposition* : Dimension : $\frac{n(n-1)}{2}$
- ⇝ *Proposition* : Morphisme déterminant
- ⇝ *Définition* : Groupe orthogonal spécial
- ⇝ *Application* [22, p.259] : Angle du plan

B. *Décomposition polaire [22, p.347]* Le principe diviser pour régner appairait aussi dans les mathématiques : les décompositions de Dunford ou polaire en sont des exemples intéressants : elle permet de régner sur les groupes classiques.

- ⇝ *Théorème* : Compacité de $O_n(\mathbb{R})$ et $SO_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
- ⇝ *Application* : décomposition polaire est un homéomorphisme
- ⇝ *Corollaire* : spectre d'une matrice inversible
- ⇝ *Application* : Sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$ contenant $O_n(\mathbb{R})$ est $O_n(\mathbb{R})$
- ⇝ *Proposition* : Sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{R})$ conjugué à $O_n(\mathbb{R})$

C. *Étude du groupe $O_{p,q}$ [22, p210]* Le groupe orthogonal peut également être vu comme le groupe du stabilisateur de $I_(p,q)$ par l'action de congruence sur $GL(E)$

- ⇝ *Définition* : $O_{p,q}$
- ⇝ *Théorème* : Caractérisation de $O_{p,q}$

Leçon 108 : Exemples de parties génératrices de groupe. Applications.

Références pour la leçon

[11] Bailly-Maitre, *Arithmétique et cryptologie.*
[14] Berhuy, *Algèbre : le grand combat.*
[21] Calais, *Éléments de la théorie des groupes.*
[53] Nourdin, *Agrégation de mathématiques épreuve orale.*
[56] Perrin, *Cours d'algèbre.*

Développements de la leçon

Simplicité de $\mathfrak{A}_n$	Générateurs de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$

Motivation

Défense

- Étudier et identifier la structure des groupes ;
- Simplifier des études de morphismes (cas d'égalité) ;
- Montrer des propriétés sur les groupes ;

Ce qu'en dit le jury

C'est une leçon qui doit être illustrée par des exemples très variés qui peuvent être en relation avec les groupes de permutations, les groupes linéaires ou leurs sous-groupes, comme $\mathrm{SL}_n(K)$, $O_n(K)$ ou $SO_n(R)$. Les groupes $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$, fournissent aussi des exemples intéressants. La connaissance de parties génératrices s'avère très utile dans l'analyse des morphismes de groupes ou pour montrer la connexité par arcs de certains sous-groupes de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ par exemple.

Tout comme dans la leçon 106, la présentation du pivot de Gauss et de ses applications est envisageable.

Il est important de présenter les différents systèmes de générateurs du groupe symétrique et de savoir mettre en évidence l'intérêt du choix de ces systèmes dans divers exemples.

Le candidat pourra également parler des générateurs du groupe diédral et, si il le souhaite, il pourra donner une présentation par générateurs et relations d'un groupe (groupe diédral, groupe symétrique, ou groupe des tresses).

Il est également possible de parler du logarithme discret et de ces applications à la cryptographie (algorithme de Diffie-Hellman, cryptosystème de El Gamal).

Métaplan

I. Introduction [21, p.27-29] On rappelle la notion de parties génératrices. La taille des parties génératrices ne montre pas la complexité du dit groupe. *Cadre* : G est un groupe de type fini ; E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie où $\mathbb{K}$ est un corps.

- $\rightsquigarrow$ *Définition* : Groupe engendré par une partie que l'on note $< S >$
- $\rightsquigarrow$ *Exemple* : $S = x$; $G = \mathbb{Z}$ et $< S >= \{x^n; n \in \mathbb{Z}\}$ $\rightsquigarrow$ *Définition* : Partie génératrice d'un groupe
- $\rightsquigarrow$ *Exemple* : $G = \mathbb{Z}$ qui est engendré par $\{1\}$.
- $\rightsquigarrow$ *Définition* : Le rang d'un groupe G est le cardinal minimal d'une partie génératrice de G.
- $\rightsquigarrow$ *Exemple* : Par ce qui précède, le rang de $\mathbb{Z}$ est 1. $\rightsquigarrow$ *Définition* : Un groupe de type fini
- $\rightsquigarrow$ *Exemple* : $\mathbb{Z}$ est de type fini
- $\rightsquigarrow$ *Contre-exemple* : $U = \cup_{n\in\mathbb{N}} U_n$ où U_n est l'ensemble des racines de l'unités.

II. Les groupes monogènes et cycliques [14, p.156] Ce sont les groupes qui possède le système de générateur le plus simple : un élément. Ils sont de rang un.

A. *Définitions et caractérisations des groupes monogènes et cycliques*

- $\rightsquigarrow$ *Définition* : Groupe monogène $\rightsquigarrow$ *Exemple* : $\mathbb{Z}$ est monogène.
- $\rightsquigarrow$ *Définition* : Groupe cyclique $\rightsquigarrow$ *Exemple* : $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$ est cyclique.
- $\rightsquigarrow$ *Théorème* : Caractérisation des groupes monogène.
- $\rightsquigarrow$ *Application* : Deux groupes monogènes infinis sont isomorphes.
- $\rightsquigarrow$ *Application* : Deux groupes cycliques de même ordre sont isomorphes.
- $\rightsquigarrow$ *Proposition* Tout groupe fini d'ordre premier p est cyclique $\rightsquigarrow$ *Contre-exemple* à la réciproque.
- $\rightsquigarrow$ *Application* : Si $q = p^n$ avec p premier alors $\mathbb{F}_q^*$ est cyclique.
- $\rightsquigarrow$ Sous-groupe d'un groupe cyclique.

B. *Étude des générateurs des groupes monogènes et cycliques*

- $\rightsquigarrow$ *Définition* : Indicatrice d'Euler ϕ
- $\rightsquigarrow$ *Théorème* : Caractérisation des générateurs d'un groupe monogène
- $\rightsquigarrow$ *Application* : Si G est un groupe cyclique d'ordre n, alors il possède $\phi(n)$ générateurs distincts

C. *Problème du logarithme discret et application à la cryptographie [11, p.217]* Une application aux générateurs d'un groupe est la cryptographie grâce à la difficulté du problème du logarithme discret.

- $\rightsquigarrow$ *Définition* : le problème du logarithme discret.
- $\rightsquigarrow$ *Remarque* : Le problème est dure si n est un facteur d'un grand nombre premier.
- $\rightsquigarrow$ *Applications* : Diffie-Helmann et cryptosystème d'elderman

II. Exemples de groupes de rang 2

A. *Le groupe symétrique [14, p.214]* Le groupe symétrique est un bon moyen de connaître les groupes finis. Donc le connaître est primordial

- $\rightsquigarrow$ *Définition* : Groupe symétrique $\rightsquigarrow$ *Définition* : Signature
- $\rightsquigarrow$ *Théorème* : Système de générateurs du groupe symétrique.
- $\rightsquigarrow$ *Applications* : contexte d'utilisation de ces systèmes de générateurs
- $\rightsquigarrow$ *Théorème* : décomposition de cycle à support disjoint
- $\rightsquigarrow$ *Application* : Le groupe des isométrie conservant le tétraèdre (le cube) est isomorphe à $\mathfrak{S}$. C'est un exemple assez trivial d'utilisation des générateurs du groupe afin de montrer la surjectivité d'un morphisme (étude de morphismes)

B. *Le groupe alternée [14, p.215]*

- $\rightsquigarrow$ *Définition* : Groupe alterné $\rightsquigarrow$ *Théorème* : Système de générateur du groupe alterné
- $\rightsquigarrow$ *Définition* : Simplicité $\rightsquigarrow$ *Principe* : Preuve de la simplicité
- $\rightsquigarrow$ *Théorème* : A_n est simple pour $n > 5$ $\rightsquigarrow$ *Application* : Sous-groupes distingué de $\mathfrak{S}_n$.
- $\rightsquigarrow$ *Application* : Pas de surjection entre $\mathfrak{S}_n$ et $\mathfrak{S}_{n+1}$

C. *Le groupe* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ *et l'utilisation de la géométrie* On utilise la géométrie et les actions de groupes pour trouver les générateurs. On a un groupe de matrice de rang 2.

- ⇝ *Définitions* : Droite projective et homographie
- ⇝ *Proposition* : Propriétés des homographies
- ⇝ *Définition* : Le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$
- ⇝ *Propriété* : L'ensemble de ces générateurs

III. Les groupes de rang r quelconque

- ⇝ *Théorème* [53, p.207] : théorème de structure pour les groupes abéliens de type fini
- ⇝ *Application* : Dans ce cas on étudie uniquement les groupes $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

A. *Le groupe linéaire [56, p.95]* On cherche les générateurs les plus simples : ici ils sont donnés par des hyperplans. La méthode du pivot de Gauss est soit une application soit un élément pour exhiber les générateurs.

- ⇝ *Définition* : $\mathrm{GL}(E)$, $\mathrm{SL}(E)$, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$
- ⇝ *Définitions* : Transvection et dilatation
- ⇝ *Théorème* : $\mathrm{SL}(E)$ est engendré par les transvections
- ⇝ *Théorème* : $\mathrm{GL}(E)$ est engendré par les transvections et les dilatations
- ⇝ *Application* : $\mathrm{SL}(E)$ est connexe par arcs
- ⇝ *Application* : Le pivot de Gauss et sa complexité
- ⇝ *Application* : Le calcul du centre de $\mathrm{SL}(E)$ et de $\mathrm{GL}(E)$

B. *Le groupe orthogonal [56, p.141]* Le groupe orthogonal est un sous-groupe de $GL(E)$ qui possède son propre système de générateurs.

- ⇝ *Définition* : $\mathrm{O}(E)$, $\mathrm{SO}(E)$, $\mathrm{O}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{SO}_n(\mathbb{K})$
- ⇝ *Définition* : Symétrie orthogonale
- ⇝ *Définition* : Réflexion
- ⇝ *Définition* : Renversement
- ⇝ *Théorème* : $\mathrm{SO}(E)$ est engendré par les renversement
- ⇝ *Théorème* : $\mathrm{O}(E)$ est engendré par les symétries hyperplans
- ⇝ *Théorème* : Cartan–Dieudonné
- ⇝ *Théorème* : $SO_3(\mathbb{R})$ est simple
- ⇝ *Application* : $SO_n(\mathbb{R})$ est connexe par arc

Leçon 120 : Anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Applications.

Références pour la leçon

[13] Beck, Malik et Peyre, *Objectif agrégation.*
[14] Berhuy, *Algèbre : le grand combat.*
[32] Al Fakir, *Algèbre et théorie des nombres.*
[33] Francinou, Gianella et Nicolas, *Oraux X-ENS, algèbre 1.*
[40] Gourdon, *Algèbre.*
[48] Lamoitier, *Arithmétique modulaire.*
[56] Perrin, *Cours d'algèbre.*
[68] Ulmer, *Théorie des groupes.*

Développements de la leçon

Équation de Sophie Germain — Loi de réciprocité quadratique

Motivation

Défense

L'anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est bien connu depuis longtemps : il nous sert dans de nombreuses applications arithmétiques ou cryptographique. Cet ensemble définit à partir de $\mathbb{Z}$ un ensemble que nous connaissons bien est riche structurellement puisqu'il possède une structure de groupe (cyclique), d'anneau et de corps (fini) sous certaines hypothèses. De plus, on l'utilise en cryptographie (via ses générateurs ou via les nombres premiers) et en arithmétique lorsque l'on souhaite résoudre des équations arithmétiques.

Ce qu'en dit le jury

Dans cette leçon, l'entier n n'est pas forcément un nombre premier. Il est utile de connaître et d'étudier le groupe des inversibles de l'anneau et les idéaux de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Il est nécessaire de bien maîtriser le théorème chinois et sa réciproque. S'ils le désirent, les candidats peuvent poursuivre en donnant une généralisation du théorème chinois lorsque deux éléments ne sont pas premiers entre eux, ceci en faisant apparaître le PGCD et le PPCM de ces éléments.

Il faut bien sûr savoir appliquer le théorème chinois à l'étude du groupe des inversibles et, ainsi, retrouver la multiplicativité de l'indicatrice d'Euler. Toujours dans le cadre du théorème chinois, il est bon de distinguer clairement les propriétés de groupes additifs et d'anneaux.

Enfin, il est indispensable de présenter quelques applications arithmétiques des propriétés des anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, telles que l'étude de quelques équations diophantiennes bien choisies. De même, les applications cryptographiques telles que l'algorithme RSA sont naturelles dans cette leçon.

S'ils le désirent, les candidats peuvent aller plus loin en s'intéressant au calcul effectif des racines carrées dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, au logarithme discret, ou à la transformée de Fourier rapide. Il est également possible de parler des nombres p-adiques.

Métaplan

Prérequis *Définition* : Relation de congruence sur $\mathbb{Z}$ et leurs classes d'équivalences.

I. Structures de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ On peut munir l'ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ de différentes structures algébriques. Il est un bon exemples pour l'introduction des ces notions car c'est un groupe, un anneaux et un corps (finis) sous certaines hypothèses.

A. *Structure de groupe [14, p.156]* Le groupe additif de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ fait parti des groupes les plus simples puisqu'il est cyclique.

- ⇝ *Proposition* : Structure de groupe via le quotient
- ⇝ *Proposition* : $\bar{1}$ est générateur
- ⇝ *Application* : $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est cyclique
- ⇝ *Proposition* : Caractérisation des générateurs
- ⇝ *Application* : Logarithme discret
- ⇝ *Proposition* : Sous-groupes
- ⇝ *Proposition* : Structure pour les groupes cycliques
- ⇝ *Théorème* [68] : Structure pour les groupes abéliens de type fini

B. *Structure d'anneau [40, p.31]* La structure d'anneau est certainement la plus connu des structures pour $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Comme pour la structure de groupe, elle provient d'un quotient. Elle nous permet de définir l'indicatrice d'Euler qui possède de nombreuses applications. Lorsque p est premier, on a également une structure de corps.

- ⇝ *Proposition* : Structure d'anneau via le quotient
- ⇝ *Proposition* : Caractérisation des inversibles
- ⇝ *Application* : Résolution d'équation diophantiennes $ax \equiv b[n]$.
- ⇝ *Application* : Calcul d'un inverse.
- ⇝ *Définition* : Indicatrice d'Euler
- ⇝ *Proposition* : Caractérisation de la structure de corps
- ⇝ *Application* : Valeur de φ si p premier
- ⇝ *Proposition* : $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$
- ⇝ *Théorème* [56, p.74] : Cyclicité du groupe des inversibles
- ⇝ *Application* : inversibles pour p premier
- ⇝ *Définition* : Caractéristique d'un anneau
- ⇝ *Proposition* : Caractéristique de notre corps
- ⇝ *Proposition* : Morphisme de corps via la caractéristique non nul d'un corps

C. *Étude des morphismes [40, p.31]* Le théorème chinois possède de nombreuses application en arithmétique : c'est un isomorphisme très important.

- ⇝ *Théorème* : Théorème chinois
- ⇝ *Remarque* : Calcul de la réciproque
- ⇝ *Application* : Calcul de φ
- ⇝ *Application* [13, p.244] : Algorithme de Berlekamp
- ⇝ *Application* : Résoudre des systèmes de congruence

II. Arithmétique Une des applications importantes de l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est l'arithmétique des entiers : en cryptographie ou pour résoudre des équations diophantiennes. Nous allons étudier deux grandes notions dans cette arithmétique : la primalité (et son application à la cryptographie) et les résidus quadratique (et leur application aux équations diophantiennes)

A. *Primalité [48, p.189]* La primalité, la recherche de primalité est une notion importante en arithmétique car elle est à la base de la sûreté de nombreux protocoles cryptographique. De plus, comme nous avons vu précédemment les nombres premiers donnent de nombreuses propriétés aux anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Les connaître et savoir les trouver sont des notions importantes.

- ⇝ *Théorème* [32, p.96] : Infinité de nombre premiers
- ⇝ *Proposition* [32, p.96] : Théorème de Dirichlet faible
- ⇝ *Théorème* : Petit théorème de Fermat
- ⇝ *Remarque* : Réciproque est fausse (il nous faut une meilleur caractérisation pour les trouver)
- ⇝ *Théorème* [33, p.167] : Théorème de Sophie-Germain
- ⇝ *Théorème* : Théorème de Wilson ⇝ *Remarque* : Complexité trop importante
- ⇝ *Application* : Tests de primalité : Fermat, Miller–Rabin, ...
- ⇝ *Théorème* [48, p.222] : RSA ⇝ *Application* [48, p.222] : Chiffrement RSA
- ⇝ *Remarque* : Sécurité du chiffrement : factorisation

B. *Résidus quadratiques [32, p.119]* Les résidus quadratiques interviennent dans la recherche de nombres premiers : ils sont à la base d'un certains nombres de tests de primalité. De plus, ils permettent de résoudre des équations diophantiennes du second degré.

- ⇝ *Définition* : Symbole de Legendre ⇝ *Théorème* : Loi de réciprocité quadratique
- ⇝ *Application* : 3 est un carré modulo p si et seulement si $p \equiv +/-1[12]$
- ⇝ *Théorème* : Nombre de Mercène ⇝ *Application* : Test de primalité Lucas–Lehmer
- ⇝ *Application* : PRIMES est dans NP ⇝ *Application* : solution d'équation diophantienne

Leçon 121 : Nombres premiers.

Références pour la leçon

[4] El Amrani, *Arithmétique dans Z et dans K[X].*
[22] Caldero et Germoni, *Histoires hédonistes de groupes et de géométries, tome 1.*
[32] Al Fakir, *Algèbre et théorie des nombres.*
[40] Gourdon, *Algèbre.*
[48] Lamoitier, *Arithmétique modulaire.*

Développements de la leçon

Équation de Sophie Germain — Loi de réciprocité quadratique

Motivation

Défense

Les nombres premiers sont partout en mathématiques ou dans la science en général. En effet, lorsqu'on étudie l'arithmétique, ils ont une place centrale qu'on a essayé de reproduire dans les autre anneaux, comme dans les anneaux factoriels. Idée : on aime fragmenter les choses pour revenir au problème initial.

On les retrouve aussi dans d'autres sciences, comme en cryptographie, où la sécurité de nombreux protocoles découlent de la difficulté à les trouver et à factoriser un entier quelconque.

Les nombres premiers donnent de nombreux résultats en arithmétiques : factorisation, extension des notions, corps finis, ... Leurs répartitions et leurs détections ne sont pas encore bien comprises, il nous faut donc de nombreux tests qui ne sont pas correct (ou complet) afin d'avoir une certitude importante qu'on a bien un nombre premier. Enfin, on en déduit les applications à l'arithmétique comme RSA.

Ce qu'en dit le jury

Le sujet de cette leçon est très vaste. Aussi les choix devront être clairement motivés. La réduction modulo p n'est pas hors-sujet et constitue un outil puissant pour résoudre des problèmes arithmétiques simples. La répartition des nombres premiers est un résultat historique important qu'il faudrait citer. Sa démonstration n'est bien sûr pas exigible au niveau de l'agrégation.

Quelques résultats sur les corps finis et leur géométrie sont les bienvenus, ainsi que des applications en cryptographie.

Métaplan

I. Arithmétique et corps finis

A. *Nombre premier [4, p.95]* La notion de nombre premier vu comme un élément irréductible est tellement centrale en arithmétique a été étendue aux autres anneaux afin qu'on puisse faire de l'arithmétique sur ceux-ci.

- $\rightsquigarrow$ *Définition* : Nombre premier — $\rightsquigarrow$ *Exemple*
- $\rightsquigarrow$ *Proposition* : Tout entier supérieur à 2 admet un diviseur premier
- $\rightsquigarrow$ *Théorème* : Théorème fondamental de l'arithmétique — $\rightsquigarrow$ *Définition* : Valeurs p-adique
- $\rightsquigarrow$ *Corollaire* : Décomposition avec les exposants p-adique — $\rightsquigarrow$ *Définitions* : Pgcd et ppcm
- $\rightsquigarrow$ *Application* : exprimer pgcd et ppcm avec les exposants p-adique
- $\rightsquigarrow$ *Lemme* : Lemme de Gauss — $\rightsquigarrow$ *Lemme* : Lemme d'Euclide
- $\rightsquigarrow$ *Remarque* : On souhaite étendre la notion d'élément irréductible dans tous les anneaux. Un anneau qui admet une décomposition à facteur irréductible est un anneau factoriel.
- $\rightsquigarrow$ *Théorème* : Sophie Germain

B. *$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ avec p premier [39, p.31]* Le théorème chinois motive l'étude des $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, puisque tout anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ peut être étudier comme produit fini de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ avec p premier. Puis on donne ces propriétés intéressantes.

- $\rightsquigarrow$ *Théorème* : Théorème chinois — $\rightsquigarrow$ *Remarque* : Extension pour un produit fini
- $\rightsquigarrow$ *Application* : Système linéaire de congruence
- $\rightsquigarrow$ *Proposition* : $n\mathbb{Z}$ est un idéal premier si et seulement si n est premier
- $\rightsquigarrow$ *Corollaire* : $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps si et seulement si n est premier
- $\rightsquigarrow$ *Définition* : Indicatrice d'Euler — $\rightsquigarrow$ *Proposition* : Propriétés de l'indicatrice d'Euler
- $\rightsquigarrow$ *Théorème* : Théorème de Fermat — $\rightsquigarrow$ *Remarque* : Réciproque est fausse
- $\rightsquigarrow$ *Théorème* [22, p.182] : Loi de réciprocité quadratique
- $\rightsquigarrow$ *Remarque* : Elle reste vrai dans le cas où n est non premier : utilisation du symbole de Jacobi.
- $\rightsquigarrow$ *Théorème* [48, p.189] : Critère de primalité avec le symbole de Legendre

II. Répartition et tests de primalité

A. *La répartition des nombres premiers [32, p.96]* Comment les nombres premiers sont-ils répartis ? En existe-t-il une infinité ? Il y a une infinité de nombre premier et ils sont assez nombreux pour faire diverger la série de l'inverse des nombres premiers. La méthode la plus ancienne, le crible d'Ératosthène, pour trouver la liste des nombres premiers inférieur à n.

- $\rightsquigarrow$ *Proposition* : l'ensemble des nombres premiers est infini.
- $\rightsquigarrow$ *Proposition* : la somme des $1/p$ impair diverge
- $\rightsquigarrow$ *Proposition* : si n ne possède aucun diviseur p premier, alors n est premier.
- $\rightsquigarrow$ *Exemple* : 89 est un nombre premier car $2, 3, 5, 7$ ne le divise pas.
- $\rightsquigarrow$ *Application* : Crible d'Ératosthène
- $\rightsquigarrow$ *Théorème* (Dirichlet, progression arithmétique) Admis : Pour tout nombre a, b premier entre eux, il existe une infinité de nombre premier p de la forme $pb \pmod a$
- $\rightsquigarrow$ *Théorème* (De La Vallée Poussin) Admis : répartition des nombres premiers $\frac{x}{\log x} \sim \pi(x)$.

B. *Tests de primalité [48, p.189]* Si on me donne un nombre, est-il premier ?

- $\rightsquigarrow$ *Définition* : Problème PRIMES — $\rightsquigarrow$ *Proposition* : PRIMES est co-NP
- $\rightsquigarrow$ *Algorithme* : Test de primalité de Fermat — $\rightsquigarrow$ *Proposition* : Complexité
- $\rightsquigarrow$ *Définition* [32, p.184] : Nombre pseudo-premier
- $\rightsquigarrow$ *Définition* [32, p.184] : Nombre de Carmichael
- $\rightsquigarrow$ *Proposition* : Les nombres pseudo-premier passent le test de Fermat.

- ⇝ *Théorème* Admis : Le nombre de nombre pseudo-premier pour une base donnée est un petit o du nombre de nombre premier
- ⇝ *Algorithme* : Test de primalité de Miller–Rabin ⇝ *Proposition* : Complexité
- ⇝ *Théorème* : Le nombre de témoins est au moins $\frac{n-1}{2}$
- ⇝ *Théorème* : La probabilité d'échec du test est 2^{-s}
- ⇝ *Algorithme* : Test de primalité de Solovary–Strassen ⇝ *Proposition* : Complexité
- ⇝ *Définition* : Nombre pseudo-premiers d'Euler et Jacobi
- ⇝ *Théorème* : La probabilité d'échec du test est 2^{-s}
- ⇝ *Algorithme* : Test de primalité de Lucas–Lehmer ⇝ *Remarque* : Factorisation de $n-1$
- ⇝ *Application* : PRIMES est dans NP, donc PRIMES est dans NP∩co-NP
- ⇝ *Théorème* Admis : PRIMES est dans P La complexité est en $O(n^{12})$
- ⇝ *Définition* : Nombres de Fermat ⇝ *Application* : Test de primalité des nombres de Fermat

III. Factorisation et cryptographie

Factoriser un entier en produit de nombres premiers est un problème "difficile". Ceci garantie la sécurité de nombreux problèmes cryptographiques comme RSA.

- ⇝ *Méthode* [48, p.205] : Factorisation naïve
- ⇝ *Méthode* [48, p.205] : Polard-Rhô
- ⇝ *Méthode* [48, p.205] : Méthode de Fermat
- ⇝ RSA [48, p.222] : définition / proposition

Leçon 123 : Corps finis. Applications.

Références pour la leçon

[13] Beck, Malik et Peyre, *Objectif agrégation.*
[23] Caldero et Germoni, *Histoires hédonistes de groupes et de géométries, tome 1.*
[32] Al Fakir, *Algèbre et théorie des nombres.*
[40] Gourdon, *Algèbre.*
[48] Lamoitier, *Arithmétique modulaire.*
[56] Perrin, *Cours d'algèbre*

Développements de la leçon

Algorithme de Berlekamp — Loi de réciprocité quadratique

Motivation

Défense

Hisotique Les travaux d'Abel, de Gauss, ... ont donné les structures de groupes. On en ensuite voulue les généralisé en construisant des anneaux, des algèbres à divisions et des corps.

Applications Cryptographie ; transformée de Fourier discrète ; Code correcteurs

Ce qu'en dit le jury

Une construction des corps finis doit être connue et une bonne maîtrise des calculs dans les corps finis est indispensable. Les injections des divers $\mathbb{F}_q$ doivent être connues. Les applications des corps finis (y compris pour $\mathbb{F}_q$ avec q non premier !) ne doivent pas être oubliées, par exemple l'étude de polynômes à coefficients entiers et de leur irréductibilité peut figurer dans cette leçon. Le calcul des degrés des extensions et le théorème de la base télescopique sont incontournables. La structure du groupe multiplicatif doit aussi être connue. L'étude des carrés dans un corps fini et la résolution d'équations de degré 2 sont envisageables.

S'ils le désirent, les candidats peuvent aller plus loin en détaillant des codes correcteurs ou en étudiant l'irréductibilité des polynômes à coefficients dans un corps fini.

Métaplan

Cadre : Un corps A est un anneaux commutatif non nul tel que $A^* = A \setminus \{0\}$. Il est fini si $|A|$ est fini.

I. Corps finis et structures [56] On considère K un corps fini (on sait qu'il en existe un) et on souhaite étudier ses propriétés.

- ⇝ *Proposition* : $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps si et seulement si p premier
- ⇝ *Application* : Existence de tel corps

A. *Caractéristique et cardinal* Deux paramètres permettent de caractériser un corps fini : son cardinal et sa caractéristique.

- ⇝ *Définition* : Morphisme de la caractéristique ⇝ *Définition* : Caractéristique
- ⇝ *Remarque* : $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est le sous corps premier de K
- ⇝ *Proposition* : K est un $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-espace vectoriel de dimension finie
- ⇝ *Application* : $K = pn + rq$ et il n'existe donc pas de corps à 6 éléments
- ⇝ *Proposition* [24, p.57] : Dénombrement dans les espaces vectoriels sur des corps finis.
- ⇝ *Application* : Géométrie

B. *Groupe des inversibles* Dans un corps, le groupe des inversible est l'ensemble du corps privé de 0. Dans le cas fini, il possède quelques propriétés intéressantes.

- ⇝ *Proposition* : K^* est cyclique ⇝ *Remarque* : Tout sous-groupe de K^* est cyclique.
- ⇝ *Remarque* : Tout sous-groupe fini de L est cyclique même si L est un corps.
- ⇝ *Application* [48, p.158] : Diffie-Helmann

C. *Automorphismes de K* On en profite pour introduire le morphisme de Frobenius qui est un automorphisme dans le cas d'un corps fini.

- ⇝ *Définition* : Morphisme de Frobenius φ ⇝ *Remarque* : Si $K = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$
- ⇝ *Proposition* : Si K est fini, φ est un automorphisme
- ⇝ *Proposition* : Si $Q \in K[X]$, $Q(X^p) = Q(X)^p \Leftrightarrow$ les coefficients de Q sont dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

D. *Existence et sous-corps* Nous concluons cette section par l'étude de l'existence d'un corps de cardinal non premier et les sous-corps (ainsi que leur relation) de ce dernier.

- ⇝ *Théorème* : Pour tout $p \in P$, pour tout $n \geq 1$, il existe un unique (à isomorphisme près) corps de cardinal p^n, noté $\mathbb{F}_{p^n}$.
- ⇝ *Théorème* : Construction de ce corps comme quotient de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$ par un polynôme irréductible de degré n.
- ⇝ *Exemple* : Construction de F_4 (table des opérations).
- ⇝ *Proposition* : F_p est un sous corps de $\mathbb{F}_{p^n}$ si et seulement si $d|n$
- ⇝ *Application* : Calcul des sous corps de $\mathbb{F}_8$ ⇝ *Proposition* : Inclusion des différents $\mathbb{F}_q$

II. Polynômes sur les corps finis Sur les corps finis l'étude des polynômes et de leur irréductibilité est intéressante car moins facile que dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. De plus, nous expliciterons une méthode algorithmique afin de factoriser des polynômes réductibles.

A. *Critère d'irréductibilité [56]*

- ⇝ *Définition* : Polynôme irréductible
- ⇝ *Proposition* : $P \in \mathbb{F}_q[X]$ est irréductible si et seulement si P n'a pas de racines dans les extensions de $\mathbb{F}_q$ de degré inférieur ou égal à $\frac{n}{2}$.
- ⇝ *Proposition* : $P \in \mathbb{F}_q[X]$ de degré n, soit K une extension de degré m avec $\text{pgcd}(m, n) = 1$. Alors P est irréductible sur K.
- ⇝ *Proposition* [40] : Critère d'Eisenstein
- ⇝ $P \in \mathbb{Q}[X]$: si sa réduction sur $\mathbb{F}_q$ (avec $a_n \neq 0$) est irréductible alors P irréductible sur $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Z}$.
- ⇝ *Remarque* : Réciproque est fausse.

B. *Factorisation des polynômes [13]*

- ⇝ Algorithme de Berlekamp ⇝ *Application* : Factorisation des polynômes

III. Corps finis et arithmétique On conclut cette leçon avec un peu d'arithmétique et l'utilisation des corps finis dans l'étude des carrés ou des nombres premiers.

A. *Carrés sur les corps finis [32, p.119]*

- ⇝ *Définition* : Ensembles des carrés ⇝ *Proposition* : Cyclicité de ces groupes
- ⇝ *Remarque* : Difficulté de trouver des générateurs ⇝ *Proposition* : Caractérisation des carrés

- ⇝ *Corollaire* : Caractérisation de -1 est un carré
- ⇝ *Application* : Classification des formes quadratiques sur $\mathbb{F}_q$ par le discriminant.
- ⇝ *Définition* : Symbole de Legendre
- ⇝ *Proposition* : Propriétés de ce symbole
- ⇝ *Proposition* : Loi de réciprocité quadratique
- ⇝ *Application* : Calcul si un nombre est un carré
- ⇝ *Application* : Résolution d'équation du second degré

B. *Primalité : trouver de grands nombres premiers [48]*

- ⇝ *Proposition* : Test de primalité de Fermat
- ⇝ *Proposition* : Test de primalité de Miller-Rabin
- ⇝ *Application* : RSA
- ⇝ *Proposition* : Lucas–Lehmer (Mersenne)

Leçon 126 : Exemples d'équations en arithmétique.

Références pour la leçon

[28] Combes, *Objectif agrégation.*
[32] Al Fakir, *Algèbre et théorie des nombres.*
[33] Francinou, Gianella et Nicolas, *Oraux X-ENS, Algèbre 1*
[45] Hindry, *Arithmétique.*
[48] Lamoitier, *Arithmétique modulaire.*
[56] Perrin, *Cours d'algèbre*

Développements de la leçon

Loi de réciprocité quadratique

Équation de Sophie Germain

Motivation

Défense

Les équations en arithmétiques mettent en place des méthodes de résolutions qui diffèrent des méthodes de résolutions en analyse : généralement elles sont plus complexes. On s'intéresse ici à des problème indécidable en toute généralité (l'ensemble des solutions d'une équation diophantienne est dans RE), cependant dans quelques cas, nous pouvons les résoudre en utilisant des outils arithmétiques. On étudiera également l'équation de Fermat source de beaucoup de recherche qui fut démontrer en 1995 à l'aide d'un ordinateur.

Ce qu'en dit le jury

Ce nouvel intitulé traduit le souhait d'élargir le contexte de la leçon, au delà des seules équations sur $\mathbb{Z}$ pour étudier aussi des équations dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et dans les corps finis.

Malgré le changement d'intitulé, les équations diophantiennes occupent une place importante et doivent absolument être abordées dans cette leçon. On doit présenter les notions de bases servant à aborder les équations de type $ax + by = d$ (identité de Bezout, lemme de Gauss) mais aussi bien entendu la méthode de descente de Fermat et l'utilisation de la réduction modulo un nombre premier p. La leçon peut aussi dériver vers la notion de factorialité, illustrée par des équations de type Mordell, Pell-Fermat, et même Fermat (pour $n = 2$, ou pour les nombres premiers de Sophie Germain).

La résolution des systèmes linéaires sur Z peut être abordée. Il est naturel de s'intéresser à la résolution des systèmes de congruences, à la recherche de racines carrées dans les corps finis. Les candidats peuvent plus généralement aborder la recherche des racines des polynômes dans les corps finis.

S'il le désirent, les candidats peuvent étudier les coniques sur les corps finis et la recherche de points sur ces coniques.

Métaplan

I. Équations diophantiennes linéaires [48, p.163] On met en place la résolution des équations les plus simples en arithmétique. Cependant, elles demandent déjà quelques outils nouveaux (ou inhabituels) pour les traiter.

A. *Équations linéaires dans $\mathbb{Z}$*

- $\rightsquigarrow$ *Théorème* : Bézout
- $\rightsquigarrow$ *Algorithme* : Euclide étendu
- $\rightsquigarrow$ *Théorème* : Gauss
- $\rightsquigarrow$ *Théorème* : Résolution de l'équation $ax + by = c$

B. *Équations linéaires aux congruences*

- $\rightsquigarrow$ *Méthode* : calcul de l'inverse modulaire via Bézout
- $\rightsquigarrow$ *Application* : Résolution $ax \equiv b[n]$
- $\rightsquigarrow$ *Remarque* : Lien avec le cas précédent

C. *Systèmes d'équations aux congruences*

- $\rightsquigarrow$ *Théorème* : Théorème chinois
- $\rightsquigarrow$ *Application* : Résolution de système d'équation

II. Méthode plus poussée Cependant les méthodes classiques ne sont pas à bannir : nous allons voir deux méthodes qui nous permettent de décidé de l'absence de solution.

A. *Réduction modulaire* S'il n'existe pas de solution modulo n alors, il n'en n'existe pas dans $\mathbb{Z}$.

- $\rightsquigarrow$ *Proposition* : Si une équation arithmétique a une solution dans $\mathbb{Z}$ alors elle en a une modulo n.
- $\rightsquigarrow$ *Application* : Contraposée pour montrer qu'une équation n'a pas de solution.
- $\rightsquigarrow$ *Exemple* [28] : $x^2 = 3y + 5$ pas de solution $[3]$ donc pas dans $\mathbb{Z}$

B. *Utilisation de l'analyse* Si la résolution dans un cas analytique donne une solution non entière : alors pas de solution.

- $\rightsquigarrow$ *Idée* : Utiliser des méthodes de résolutions d'équations dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ pour montrer que les solutions ne sont pas entières.
- $\rightsquigarrow$ *Exemple* : $n^2 + 5n + 2 = 0$ par calcul du discriminant : solution non entière

III. Équations diophantiennes quadratiques On passe maintenant à l'ordre supérieures. On va alors introduire la notion de carré dans un corps finis.

A. *Carrés sur les corps finis [32, p.119]* On peut les introduire car ce sont les solutions d'une équation de la forme $x^2 + py = q$.

- $\rightsquigarrow$ *Définition* : Ensembles des carrés
- $\rightsquigarrow$ *Proposition* : Cyclicité de ces groupes
- $\rightsquigarrow$ *Remarque* : Difficulté de trouver des générateurs
- $\rightsquigarrow$ *Proposition* : Caractérisation des carrés
- $\rightsquigarrow$ *Corollaire* : Caractérisation de -1 est un carré
- $\rightsquigarrow$ *Application* : Classification des formes quadratiques sur $\mathbb{F}_q$ par le discriminant.
- $\rightsquigarrow$ *Définition* : Symbole de Legendre
- $\rightsquigarrow$ *Proposition* : Propriétés de ce symbole
- $\rightsquigarrow$ *Proposition* : Loi de réciprocité quadratique
- $\rightsquigarrow$ *Application* : Calcul si un nombre est un carré

B. *Application aux équations $cy^2 + bc + c = 0[n]$ [48, p.173]*

- $\rightsquigarrow$ *Méthode* : Cas $x^2 \equiv p$
- $\rightsquigarrow$ *Méthode* : Cas général pour n premier
- $\rightsquigarrow$ *Remarque* : Plus compliqué si n est composite

C. *Application à la somme de deux carrées [56, p.56]*

- $\rightsquigarrow$ *Définition* : Entier de Gauss
- $\rightsquigarrow$ *Théorème* : Somme des deux carrés

IV. Équation de Fermat

Les équations de Fermat objet du grand théorème de Fermat on été un long mystère dans les mathématiques. Il faudra atteindre les années 1995 afin qu'une preuve en soit donnée (cette preuve était assisté par ordinateur).

A. *Les équations de Fermat [45, p.81]*

- ⇝ *Théorème* (Admis) : Équation de Fermet en général
- ⇝ *Méthode* : Régression de Fermat
- ⇝ *Théorème* : Dans le cas 2
- ⇝ *Application* [28] : Triplet pythagoricien

B. *Équation de Sophie Germain [33, p.157]*

Un cas facile pour montrer le théorème de Fermat. Histoire intéressante car Sophie Germain était une des rare femmes de son milieu et utilisait un pseudonyme pour publier ses travaux

- ⇝ *Définition* : Nombre premier de Sophie Germain
- ⇝ *Théorème* : Équation de Sophie Germain

Leçon 141 : Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de Rupture. Exemples et applications.

Références pour la leçon

[14] Berhuy, *Algèbre : le grand combat.*
[13] Beck, Malik et Peyre, *Objectif agrégation.*
[41] Gozard, *Théorie de Galois.*
[56] Perrin, *Cours d'algèbre*

Développements de la leçon

Décomposition de Dunford — Algorithme de Berlekamp

Motivation

Défense

- $\rightarrow$ Construction des corps finis
- $\rightarrow$ Analogie à $\mathbb{C}$ (irréductibilité des polynômes)
- $\rightarrow$ Connaître des corps où les polynômes ont des racines

Ce qu'en dit le jury

La présentation du bagage théorique permettant de définir corps de rupture, corps de décomposition, ainsi que des illustrations dans différents types de corps (réel, rationnel, corps finis) sont inévitables. Les corps finis peuvent être illustrés par des exemples de polynômes irréductibles de degré 2, 3, 4 sur $\mathbb{F}_2$ ou $\mathbb{F}_3$. Il est nécessaire de présenter des critères d'irréductibilité de polynômes et des polynômes minimaux de quelques nombres algébriques.

Il faut savoir qu'il existe des corps algébriquement clos de caractéristique nulle autres que $\mathbb{C}$; il est bon de savoir montrer que l'ensemble des nombres algébriques sur le corps $\mathbb{Q}$ des rationnels est un corps algébriquement clos. Le théorème de la base téléscopique, ainsi que les utilisations arithmétiques (utilisation de la divisibilité) que l'on peut en faire dans l'étude de l'irréductibilité des polynômes, est incontournable.

Métaplan

Cadre : A est un anneau commutatif unitaire intègre, k est un corps

I. Notion de polynôme irréductible [41, p.9]

Savoir si un polynôme est irréductible ou non va nous être essentiel dans la suite : on ne peut faire des corps de rupture ou de décomposition que pour des polynômes irréductibles (il est donc important de les connaître).

A. *Définition et première propriété*

- ⇝ *Définition* : Polynôme irréductible
- ⇝ *Proposition* : Caractérisation par le quotient
- ⇝ *Proposition* : Infinité de polynômes irréductibles

B. *Lien entre irréductibilité et racines*

Ce lien est très important et va justifier les extensions de corps que nous allons réaliser.

- ⇝ *Proposition* : Caractérisation de l'irréductibilité avec les racines
- ⇝ *Remarque* : Attention : aux cas des degré 2 et 3
- ⇝ *Remarque* : Irréductibilité et sous-corps
- ⇝ *Proposition* : Cas parfait : irréductibilité et dérivation

C. *Généralités sur les anneaux factoriels*

- ⇝ *Cadre* : A factoriel et $k = \mathrm{Frac}(A)$.
- ⇝ *Définition* : Contenu et polynôme primitif
- ⇝ *Lemme* : Gauss
- ⇝ *Théorème* : Gauss
- ⇝ *Application* : Critère d'irréductibilité

D. *Critère d'irréductibilité*

On cherche des moyens afin de savoir si un polynôme est irréductible ou non (degré est supérieur à 2).

- ⇝ *Théorème* : Critère d'Eisenstein
- ⇝ *Applications* : Exemples de polynômes irréductibles
- ⇝ *Théorème* [56, p.77] : Critères de réduction
- ⇝ *Contre-exemple* : $X^4 + 1$ irréductible sur $\mathbb{Z}$ mais sur aucun des $\mathbb{F}_p$ pour p premier

II. Corps de rupture et autres extensions de corps

Étant donnée un polynôme irréductible, peut-on trouver un corps dans lequel ce polynôme a une racine ? *Cadre* : K et L deux corps.

A. *Extension algébrique et polynôme minimal [56, p.65]*

- ⇝ *Théorème* : Base télescopique
- ⇝ *Corollaire* : Cas fini
- ⇝ *Définition* : Nombre algébrique et polynôme minimal
- ⇝ *Proposition* [14, p.782] : Caractérisation d'un nombre algébrique
- ⇝ *Remarque* [14, p.782] : $\frac{K[X]}{min(a,K)} \simeq K[a]$
- ⇝ *Définition* : Extension monogène (ou simple)
- ⇝ *Définition* : Extension algébrique
- ⇝ *Proposition* : Extension finie $\Rightarrow$ extension algébrique
- ⇝ *Remarque* : Réciproque est fausse + contre-exemple
- ⇝ *Théorème* : Corps des éléments algébrique

B. *Corps des racines d'un polynôme [41, p.57]*

Ce sont des corps où on adjoint des racines (on prend l'union étendu afin d'en conserver la structure de groupe.)

- ⇝ *Définition* : Corps de rupture
- ⇝ *Remarque* : Extension algébrique
- ⇝ *Théorème* [56, p.70] : Existence et unicité
- ⇝ *Contre-exemple* [14, p.820] : f non irréductible : pas d'unicité
- ⇝ *Théorème* : Critère d'irréductibilité avec les extensions de corps
- ⇝ *Théorème* [56, p.79] : Irréductibilité et extensions
- ⇝ *Définition* : Corps de décomposition
- ⇝ *Remarque* : Extension algébrique finie
- ⇝ *Théorème* [56, p.71] : Existence et unicité.
- ⇝ *Application* (algèbre linéaire) : Décomposition de Dunford (On se place sur cet anneaux pour étudier la décomposition de Dunford via la méthode de Newton...)

C. *Clôtures algébriques [41, p.62]*

La notion de corps algébriquement clos : garder en tête que $\mathbb{C}$ n'est pas le seul corps algébriquement clos de caractéristique 0.

- ⇝ *Définition* : Corps algébriquement clos
- ⇝ *Théorème* : Alembert–Gauss
- ⇝ *Définition* : Clôture algébrique
- ⇝ *Théorème* : Théorème de Steinitz

III. Application aux corps finis

Les résultats que nous avons vus permettent de construire les corps finis. De plus, il existe un algorithme permettant de factoriser les polynômes dans les corps finis : l'algorithme de Berlekamp.

A. *Construction des corps finis [56, p.73]*

- $\rightsquigarrow$ *Théorème* : Construction des corps finis via les corps de décompositions
- $\rightsquigarrow$ *Application* : Construction explicité de $\mathbb{F}_4$ et $\mathbb{F}_9$

B. *Factorisation des corps finis [13, p.244]*

- $\rightsquigarrow$ *Algorithme* : Berlekamp (test l'irréductibilité) $\rightsquigarrow$ *Application* : Factorisation

Leçon 151 : Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas fini). Rang. Exemples et applications.

Références pour la leçon

[10] Avez, *Calcul différentiel.*
[13] Beck, Malik et Peyre, *Objectif agrégation.*
[14] Berhuy, *Algèbre : le grand combat.*
[26] Cognet, *Algèbre linéaire.*
[40] Gourdon, *Algèbre.*
[42] Grifone, *Algèbre linéaire.*
[56] Perrin, *Cours d'algèbre*
[63] Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation.*

Développements de la leçon

Algorithme de Berlekamp — Théorème des extrema liés et l'inégalité d'Hadamard

Motivation

Défense

- Démonstration par récurrence sur le rang ou la dimension.
- Classification des endomorphisme.
- Retrouver des résultats qu'on avait sur les ensembles finis.
- Avoir une description finie d'un ensemble infini.

Ce qu'en dit le jury

Dans cette leçon, il est indispensable de présenter les résultats fondateurs de la théorie des espaces vectoriels de dimension finie en ayant une idée de leurs preuves. Ces théorèmes semblent simples car ils ont été très souvent pratiqués, mais leur preuve demande un soin particulier. Il est important de savoir justifier pourquoi un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie est aussi de dimension finie. Le pivot de Gauss ainsi que les diverses notions et caractérisations du rang trouvent leur place dans cette leçon. Les applications sont nombreuses, on peut par exemple évoquer l'existence de polynômes annulateurs ou alors décomposer les isométries en produits de réflexions.

On pourra utiliser les caractérisations du rang pour démontrer l'invariance du rang par extension de corps, ou pour établir des propriétés topologiques (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). S'ils le désirent, les candidats peuvent déterminer des degrés d'extensions dans la théorie des corps ou s'intéresser aux nombres algébriques.

On pourra également explorer des applications en analyse comme les extrémas liés ou l'étude de l'espace vectoriel engendré par les translatés d'une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Dans un autre registre, il est pertinent d'évoquer la méthode des moindres carrés dans cette leçon, par exemple en faisant ressortir la condition de rang maximal pour garantir l'unicité de la solution et s'orienter vers les techniques de décomposition en valeurs singulières pour le cas général. On peut alors naturellement explorer l'approximation d'une matrice par une suite de matrices de faible rang.

Métaplan

Pré-requis : Espace vectoriel ; Sous-espace vectoriel ; Application linéaire ; Matrice ; Système linéaire ; Corps
Cadre : E espace vectoriel sur un corps K commutatif

I. Base et dimension [42, p.10] Les notions de bases et de dimension sont très liés puisque le cardinal d'une base donne la dimension d'un espace vectoriel (en dimension fini).

A. *Famille libres, génératrices et bases* Intuitivement les familles génératrices permettent d'exprimer tout autre vecteur comme un combinaison linéaire de la famille. Une telle famille n'existe pas toujours : on définie donc les espaces de dimension finie ou non. Une base permet de garantir l'existence et unicité de la décomposition.

- $\rightsquigarrow$ *Définition* : Famille génératrice
- $\rightsquigarrow$ *Définition* : Dimension finie et infinie
- $\rightsquigarrow$ *Définition* : Famille libre
- $\rightsquigarrow$ *Remarque* : Famille non-libre est une famille liée
- $\rightsquigarrow$ *Proposition* : Caractérisation de la liberté via la généricité
- $\rightsquigarrow$ *Remarque* : Utilisation du pivot de Gauss
- $\rightsquigarrow$ *Proposition* : Propriétés des familles libres et génératrices
- $\rightsquigarrow$ *Définition* : Base
- $\rightsquigarrow$ *Proposition* : Sur et sous famille génératrice et libre
- $\rightsquigarrow$ *Théorème* : Existence d'une base
- $\rightsquigarrow$ *Théorèmes* : Base incomplète, trop complète
- $\rightsquigarrow$ *Proposition* [42, p.63] : Application injective/surjective et famille libre/génératrice.

B. *Dimension finie* Nous allons maintenant donner le lien précis entre base et dimension finie : le cardinal donne le second. Pour établir ce résultat, nous utilisons le lien entre liberté et généricité comme décrite dans le premier lemme. Nous donnerons ensuite une version plus classique de ce résultat.

- $\rightsquigarrow$ *Lemme* : Famille génératrice à n éléments donne famille lié si plus de n éléments.
- $\rightsquigarrow$ *Théorème* : Dans un espace de dimension finie, toute base à même cardinal
- $\rightsquigarrow$ *Définition* : dim $=$ card de la base
- $\rightsquigarrow$ *Notation* : Dimension
- $\rightsquigarrow$ *Application* : Théorème de la base de Burnside
- $\rightsquigarrow$ *Corollaire* : Caractérisation via la dimension des familles libres et génératrices
- $\rightsquigarrow$ *Théorème* : Caractérisation base avec cardinal
- $\rightsquigarrow$ *Application* : Preuve par récurrence sur les dimensions
- $\rightsquigarrow$ *Application* : Réduction des auto-adjoints
- $\rightsquigarrow$ *Application* : Algorithme de Berkhamp
- $\rightsquigarrow$ *Théorème* [42, p.63] : Deux espaces vectoriels sont isomorphes $\Leftrightarrow$ ils ont même dimension

C. *Sous-espace vectoriel de dimension finie*

- $\rightsquigarrow$ *Théorème* : Sous-espace et dimension
- $\rightsquigarrow$ *Proposition* [42, p.85] : dimension de $\mathcal{L}(E, F)$ et du dual
- $\rightsquigarrow$ *Proposition* : Dimension des espaces produits
- $\rightsquigarrow$ *Définition* : Somme
- $\rightsquigarrow$ *Proposition* : Dimension de la somme (formule de Grassmann)
- $\rightsquigarrow$ *Définition* : Somme directe
- $\rightsquigarrow$ *Définition* : Supplémentaire

- ⇝ *Théorème* : Existence et dimension d'un supplémentaire
- ⇝ *Application* : Dimension et forme linéaire
- ⇝ *Corollaire* : Caractérisation des espaces somme directe
- ⇝ *Définition* [14, p.956] : Sous-espaces propres
- ⇝ *Théorème* [14, p.956] : caractérisation de la diagonalisation

D. *Application à l'extension de corps [56, p.65]* La théorie de la dimension s'applique dans les extension de corps : le degré de l'extension est la dimension de l'espace vectoriel induit pas cette extension.

- ⇝ *Définition* : Extension de corps ⇝ *Remarque* : L extension du corps K est un K-espace vectoriel
- ⇝ *Définition* : Degrés de l'extension : $dim_K(L)$ ⇝ *Théorème* : Théorème de la base télescopique
- ⇝ *Corollaire* : Multiplicité des degrés ⇝ *Définition* : Éléments algébrique, polynôme minimal
- ⇝ *Théorème* : Caractérisation des éléments algébriques
- ⇝ *Application* : Si $K \subset L, \{x \in L \mid x \text{ algbrique dans } K\}$ est un sous-corps de L

II. Un peu de topologie [39, p.46]

La dimension finie nous donne des résultats intéressant en topologie des espaces vectoriels normés.

- ⇝ *Théorème* : Norme équivalente ⇝ *Théorème* : Compacité
- ⇝ *Proposition* : Fonction continue ⇝ *Théorème* : Boule unité fermé compacte

III. Rang et applications linéaires en dimension finie

Le rang est la dimension de l'image d'une application linéaire. Nous pouvons alors l'étudier sur l'application linéaire ou sur des matrices. Nous allons définir le rang sur les deux objets et en fonction des applications que nous souhaitons en faire, nous allons choisir l'une ou l'autre de ces représentation.

A. *Notion de rang [42, p.61]*

- ⇝ *Définition* : Rang d'une application linéaire ⇝ *Théorème* : Théorème du rang
- ⇝ *Application* [40, p.114] : Projecteur (morphisme $p^2 = p$) ⇝ *Corollaire* : Caractérisation bijection
- ⇝ *Contre-exemple* : Faux en dimension infini (dérivée d'un polynôme)
- ⇝ *Contre-exemple* : Multiplication par une variable
- ⇝ *Proposition* : Dimension et surjectivité/injectivité
- ⇝ *Application* [40, p.113] : Quotient d'espace vectoriel
- ⇝ *Application* : Intersection de noyau de formes linéaires
- ⇝ *Application* [13, p.154] : Polynôme interpolateur de Lagrange
- ⇝ *Définition* : Rang d'une famille de vecteur, de matrice
- ⇝ *Proposition* : Rang d'endomorphisme et de matrice associée
- ⇝ *Remarque* : Caractérisation par le rang : application et inversion.

B. *Caractérisation du rang [40, p.121]* On étudie le rang pour des matrices vérifiant certaines propriétés (souvent données par des actions de groupes).

- ⇝ *Définition* : Matrices équivalentes ⇝ *Théorème* : Deux matrice équivalente ont le même rang
- ⇝ *Application* : Action de Steinitz, caractérisation avec les orbites et systèmes de représentant
- ⇝ *Définition* : Matrices semblables
- ⇝ *Théorème* : Caractérisation du rang avec les matrices extraites
- ⇝ *Définition* : Matrices extraites ⇝ *Théorème* : Deux matrices semblables ont même rang
- ⇝ *Exemple* : Contre-exemple de la réciproque

C. *Calcul du rang* Le calcul du rang se fait essentiellement via le pivot de Gauss.

- ⇝ *Proposition* : opérations élémentaires ne modifie pas le rang
- ⇝ *Application* [26, p.205] : méthode du pivot de Gauss
- ⇝ *Proposition* : existence et unicité des solutions d'un système suivant le rang
- ⇝ *Proposition* : $rgA = rg({}^tA)$ ⇝ *Application* : calcul de noyaux, d'image, de famille libre, ...
- ⇝ *Application* : théorème des extremum liés + inégalité d'Hadamard

Leçon 152 : Déterminants. Exemples et applications.

Références pour la leçon

[10] Avez, *Calcul différentiel.*
[22] Caldero et Germoni, *Histoires hédonistes de groupes et de géométries, tome 1.*
[26] Cognet, *Algèbre linéaire.*
[39] Gourdon, *Analyse.*
[40] Gourdon, *Algèbre.*
[42] Grifone, *Algèbre linéaire.*
[63] Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation.*

Développements de la leçon

Suite de polygones	Théorème des extrema liés et l'inégalité d'Hadamard

Motivation

Défense

- Une première notion de déterminant a été introduite par Cramer (1750) afin de résoudre des systèmes équations linéaires.
- Au cours du XIX^{ime} siècle, Cauchy en donne une première formalisation.
- Il existe de nombreuses applications à cette notion à priori algébrique : en algèbre, en géométrie (toute l'information contenu dans le déterminant peut être utile et est géométrique) mais également en analyse. C'est un outils très puissant.

Ce qu'en dit le jury

Dans cette leçon, il faut commencer par définir correctement le déterminant. Il est possible d'entamer la leçon en disant que le sous-espace des formes n-linéaires alternées sur un espace de dimension n est de dimension 1 et, dans ce cas, il est essentiel de savoir le montrer. Le plan doit être cohérent ; si le déterminant n'est défini que sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, il est délicat de définir det $A - XI_n)$ avec A une matrice carrée. L'interprétation du déterminant comme volume est essentielle. On peut rappeler son rôle dans les formules de changement de variables, par exemple pour des transformations de variables aléatoires.

Le calcul explicite est important, mais le jury ne peut se contenter d'un déterminant de Vandermonde ou d'un déterminant circulant. Les opérations élémentaires permettant de calculer des déterminants, avec des illustrations sur des exemples, doivent être présentées. Il est bienvenu d'illustrer la continuité du déterminant par une application, ainsi que son caractère polynomial. Pour les utilisations des propriétés topologiques, on n'omettra pas de préciser le corps de base sur lequel on se place.

S'ils le désirent, les candidats peuvent s'intéresser aux calculs de déterminants sur $\mathbb{Z}$ avec des méthodes multimodulaires. Le résultant et les applications simples à l'intersection ensembliste de deux courbes algébriques planes peuvent aussi trouver leur place dans cette leçon pour des candidats ayant une pratique de ces notions.

Métaplan

Cadre : E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel où $\mathbb{K}$ est un corps commutatif.

I. Définition du déterminant [40, p.134] On choisis de se placer sur un corps (la théorie reste vraie pour un anneau commutatif).

A. *Forme n-linéaire et déterminant d'une famille de vecteur* La définition du déterminant se fait grâce aux formes n-linéaires alternées et antisymétriques. Dans le cas d'un corps de caractéristique 2, il faut faire attention car l'équivalence entre alterné et antisymétrique n'existe plus.

- $\rightsquigarrow$ *Définition* : Formes n-linéaires
- $\rightsquigarrow$ *Définition* : Formes linéaires alternées
- $\rightsquigarrow$ *Définition* : Formes linéaires anti-symétrique
- $\rightsquigarrow$ *Théorème* : Équivalence entre ces deux formes
- $\rightsquigarrow$ *Théorème* : Existence du déterminant
- $\rightsquigarrow$ *Remarque* : En caractéristique 2
- $\rightsquigarrow$ *Proposition* : Changement de base
- $\rightsquigarrow$ *Définition* : Déterminant
- $\rightsquigarrow$ *Proposition* : Déterminant et échange de deux lignes
- $\rightsquigarrow$ *Proposition* : Déterminant et famille liée
- $\rightsquigarrow$ *Proposition* : Déterminant et combinaison linéaire des lignes
- $\rightsquigarrow$ *Proposition* : Déterminant est linéaire en chaque ligne
- $\rightsquigarrow$ *Remarque* : Fonctionne aussi pour les colonnes

B. *Déterminant d'un endomorphisme et d'une matrice* Le déterminant d'une matrice est d'un endomorphisme sont deux notions très proche puisqu'à une base choisie une matrice représente un endomorphisme.

- $\rightsquigarrow$ *Définition* : Déterminant d'un endomorphisme
- $\rightsquigarrow$ *Définition* : Déterminant d'une matrice
- $\rightsquigarrow$ *Proposition* : Formule explicite
- $\rightsquigarrow$ *Proposition* : Lien entre endomorphisme et matrice
- $\rightsquigarrow$ *Proposition* : Déterminant et produit (composition)
- $\rightsquigarrow$ *Proposition* : Déterminant et inversibilité
- $\rightsquigarrow$ *Application* : A et B semblable implique $\det A = \det B$
- $\rightsquigarrow$ *Remarque* : $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ mais pas semblable.
- $\rightsquigarrow$ *Proposition* : Indépendance de la base
- $\rightsquigarrow$ *Proposition* : Déterminant et transposé
- $\rightsquigarrow$ *Proposition* : Déterminant et inverse de matrice
- $\rightsquigarrow$ *Proposition* : $\det(\exp A) = \exp(\mathrm{Tr}(A))$
- $\rightsquigarrow$ *Application* : $\exp(A) \in GL_n(\mathbb{C})$

II. Méthodes de calculs et déterminants usuelles [40, p.134] Calculer un déterminant peut s'avérer être une tâche difficile.

A. *Calcul dans un cas favorable* Dans le cas de ces matrices, le calcul est facile : on a des formule toute simple.

- $\rightsquigarrow$ *Méthode* : Méthode de calcul de matrice $2 * 2$
- $\rightsquigarrow$ *Proposition* : Déterminant de matrice diagonale
- $\rightsquigarrow$ *Remarque* : Cas des matrices diagonales par bloc
- $\rightsquigarrow$ *Proposition* : Déterminant de matrices nilpotentes
- $\rightsquigarrow$ *Proposition* : Déterminant de matrices unipotentes
- $\rightsquigarrow$ *Application* : Dunford implique égalité des spectres

B. *Méthodes algorithmiques de calcul* Plusieurs méthodes de calculs existent pour pouvoir calculer un déterminant : elles ne sont pas toutes aussi efficaces. L'algorithme de Gauss est un moyen efficace : on met ainsi la matrice sous forme triangulaire supérieure puis on applique la formule dans ce cas. Le calcul du déterminant peut alors se faire en n^3.

- ⇝ *Méthode 1* : Calcul brut en $n \times n!$
- ⇝ *Définitions* : Mineurs, cofacteurs, comatrice
- ⇝ *Proposition* : Développer par les lignes et les colonnes
- ⇝ *Méthode 2* : Développement $n!$
- ⇝ *Méthode 3* [26, p.205] : Algorithme de Gauss en n^3
- ⇝ *Application* : Déterminant de matrice triangulaire
- ⇝ *Remarque* : Cas des matrices triangulaire par bloc
- ⇝ *Proposition* : Relation avec les comatrices

C. *Exemples de déterminant usuel* On présente maintenant quelques déterminants usuels ainsi que leur calcul.

- ⇝ *Calcul* [40, p.137] : Déterminant de Vandermond
- ⇝ *Application* : Transformée de Fourier discrète rapide (FFT)
- ⇝ *Calcul* [40, p.147] : Déterminant circulant
- ⇝ *Application* : Suite de polygones
- ⇝ *Calcul* [40, p.144] : Déterminant de Cauchy
- ⇝ *Application* : Théorème de Müntz

III. Le déterminant : un outil algébriste

Le déterminant est un outil algébrique puissant : il nous permet de calculer des inverse ou de résoudre des systèmes d'équations.

A. *Calcul avec le déterminant [40, p.137]* Le déterminant nous permet de calculer l'inverse d'une matrice ou de résoudre un système.

- ⇝ *Théorème* : Inversion d'une matrice par le déterminant
- ⇝ *Application* : $GL_2(\mathbb{Z})$ sont de déterminant $\{-1, 1\}$
- ⇝ *Remarque* : En pratique, le pivot de Gauss nous évite le calcul du déterminant et de la comatrice.
- ⇝ *Définition* : Système de Cramer
- ⇝ *Théorème* : Existence et unicité des solutions
- ⇝ *Proposition* : Formule de Cramer

B. *Déterminant et réduction d'endomorphisme* Le déterminant calculer sur un corps de fraction rationnelle nous permet de définir le polynôme caractéristique d'une matrice (ou d'un endomorphisme). Ce polynôme est important car il nous permet de réduire la matrice.

- ⇝ *Cadre* : $\mathcal{M}_n(K[X])$ ou $\mathcal{M}_n(K(X))$ si on veut un corps
- ⇝ *Définition* : Polynôme caractéristique
- ⇝ *Application* : Matrice diagonale et triangulaire
- ⇝ *Théorème* : Cayley Hamilton
- ⇝ *Corollaire* : Les valeurs propres sont des racines
- ⇝ *Application* : Matrice compagnon

C. *L'interprétation géométrique du déterminant [42, p.139]* Le déterminant est également un outil géométrique : il permet le calcul d'équations et de cercle. on retrouve l'orientation d'un espace vectoriel et la notion de volume. L'inégalité d'Hadamard utilise des théorèmes puissants d'analyse : le théorèmes des extremums liés. Enfin le déterminant permet de caractériser quelques groupes de matrices comme les isométries.

- ⇝ *Proposition* : Calcul d'équation de cercle - ellipse
- ⇝ *Définition* : Orientation d'un espace vectoriel
- ⇝ *Proposition* : Partage des bases selon leur orientation
- ⇝ *Théorème* : Lien volume-déterminant
- ⇝ *Proposition* [10, p.103] : Théorème des extremums liés
- ⇝ *Théorème* [63, p.380] : Inégalité d'Hadamard
- ⇝ *Application* : Majoration du déterminant
- ⇝ *Définition*[22, p.259] : Groupe orthogonal
- ⇝ *Proposition* : Déterminant d'une isométrie
- ⇝ *Définition* : Groupe orthogonal spécial
- ⇝ *Application* : Groupe des rotations dans $\mathbb{R}^2$

IV. Le déterminant : un outil analyste

Le déterminant est également un outil d'analyse : on peut étudier la fonction déterminant. De plus, il permet d'effectuer des changements de variables.

A. *La fonction déterminant [39, p.312]*

- ⇝ *Proposition* : Fonction polynomiale C^∞
- ⇝ *Application* : Densité dans $GL_n(\mathbb{R})$
- ⇝ *Application* : Étude du Wronskien
- ⇝ *Proposition* : Différentielle du déterminant

B. *Le changement de variable [39, p.334]*

- ⇝ *Théorème* : Changement de variables
- ⇝ *Application* : Calcul d'une gaussienne
- ⇝ *Application* : Passage en coordonnée polaire

Leçon 153 : Polynômes d'endomorphismes en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Application.

Références pour la leçon

[14] Berhuy, *Algèbre : le grand combat.*
[26] Cognet, *Algèbre linéaire.*
[39] Gourdon, *Analyse.*
[40] Gourdon, *Algèbre.*
[47] Kieffer, *66 leçons pour l'agrégation de mathématiques.*
[69] Zavidovique, *Un max de maths.*

Développements de la leçon

Surjectivité de l'exponentielle — Décomposition de Dunford

Motivation

Défense

La réduction d'un endomorphisme en dimension fini consiste à trouver une représentation plus simple dans une base.

— Faciliter les calculs des puissances et des exponentielles (résolution d'équations différentielles et systèmes dynamiques discrets).

— Classer les endomorphismes à similitude près.

Les polynômes d'endomorphismes sont un outil puissant pour effectuer des réductions ou connaître des les réductions que nous pouvons calculer.

Ce qu'en dit le jury

Cette leçon ne doit pas être un catalogue de résultats autour de la réduction qui est ici un moyen pour démontrer des théorèmes ; les polynômes d'endomorphismes doivent y occuper une place importante. Il faut consacrer une courte partie de la leçon à l'algèbre $K[u]$ et connaître sa dimension sans hésitation.

Il est ensuite possible de s'intéresser aux propriétés globales de cette algèbre. Les liens entre réduction d'un endomorphisme u et la structure de l'algèbre $K[u]$ sont importants, tout comme ceux entre les idempotents et la décomposition en somme de sous-espaces caractéristiques. Il faut bien préciser que, dans la réduction de Dunford, les composantes sont des polynômes en l'endomorphisme, et en connaître les conséquences théoriques et pratiques.

L'aspect applications est trop souvent négligé. Il est possible, par exemple, de mener l'analyse spectrale de matrices stochastiques. On attend d'un candidat qu'il soit en mesure, pour une matrice simple de justifier la diagonalisabilité et de déterminer un polynôme annulateur (voire minimal). Il est bien sûr important de ne pas faire de confusion entre diverses notions de multiplicité pour une valeur propre λ donnée (algébrique ou géométrique). Enfin, calculer A^k ne nécessite pas, en général, de réduire A (la donnée d'un polynôme annulateur de A suffit souvent). Il est possible d'envisager des applications aux calculs d'exponentielles de matrices.

S'il le souhaite, le candidat pourra étudier des équations matricielles et de calcul fonctionnel, avec par exemple l'étude de l'extraction de racines ou du logarithme.

Métaplan

I. Polynômes d'endomorphismes [14, p.943] Les polynômes d'endomorphismes sont des outils importants pour la réductions. Cependant, ils définissent également une algèbre intéressante à étudier. On commence par celle-ci puis on étudiera plus précisément deux polynômes : le polynôme minimal et caractéristique.

A. *L'algèbre $K[u]$*

- ⇝ *Définition* : Polynôme
- ⇝ *Définition* : Morphisme d'évaluation
- ⇝ *Proposition* : Algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$.
- ⇝ *Application* [39, p.47] : $K[u]$ est fermée
- ⇝ *Application* [69, p.47] : Définition de l'exponentielle de matrice
- ⇝ *Théorème* : Décomposition des noyaux

B. *Le polynôme minimal*

Définition du polynôme minimal Ce polynôme nous permet d'étudier plus profondément la structure d'algèbre de $K[u]$. En effet, il est le générateur de l'idéal définit par le noyaux du morphisme d'évaluation. On commence, également, à voir les liens avec la réductions via les valeurs propres et les sous-espaces propres.

- ⇝ *Définition* : Polynôme minimal π_u
- ⇝ *Remarque* : Polynôme annulateur
- ⇝ *Proposition* [26, p.271] : endomorphisme semblable : même π
- ⇝ *Remarque* [26, p.271] : Réciproque est fausse

Structure de l'idéal et conséquences Le polynôme π_u engendre un idéal, il possède une propriété de divisibilité (notamment sur les polynômes annulateurs). La divisibilité nous permet d'obtenir des propriétés intéressantes comme la surjectivité de l'exponentielle.

- ⇝ *Proposition* : π_u divise les annulateurs
- ⇝ *Application* [69, p.48] : Surjectivité de l'exponentielle
- ⇝ *Corollaire* : Si $\exists P$, $P(u) = 0$ et $P(0) \neq 0$, alors u inversible
- ⇝ *Application* : Calcul d'inverse
- ⇝ *Application* : Calcul de puissance

Décomposition de $K[u]$ et sous-espace stable [40, p.170] La décomposition du π_u permet de décomposer $K[u]$ est sous-espace : on donne ainsi sa dimension. On introduit les sous-espaces propres qui permettent d'avoir une réciproque au théorème de décomposition : les sous-espaces propres décompose $K[u]$ et permettent de calculer leπ_u.

- ⇝ *Théorème* : Décomposition de $K[u]$ via π_u
- ⇝ *Corollaire* : Dimension de $K[u]$
- ⇝ *Définition* : Sous-espace stable
- ⇝ *Remarque* : $\mathrm{im}(u)$ et $\ker u$ sont stables par u
- ⇝ *Proposition* : Application induite $u|_F$
- ⇝ *Proposition* : $\pi_{u|_F} \mid \pi_u$
- ⇝ *Théorème* : π_u via une décomposition stable de $K[u]$

Valeurs propres [40, p.173] On commence à voir apparaître un lien entre valeurs propres et polynômes d'endomorphisme via π_u.

- $\rightsquigarrow$ *Définition* [40, p.159] : Valeurs propres et spectre
- $\rightsquigarrow$ *Propriété* : Valeurs propres annulent polynômes annulateurs
- $\rightsquigarrow$ *Remarque* : Réciproque est fausse ($\pi_u(X-a)$ où $a \notin Sp(u)$)
- $\rightsquigarrow$ *Proposition* : Les racines de π_u sont exactement les valeurs propres

C. *Le polynôme caractéristique [14, p.948]* Le polynôme caractéristique appartient à l'idéal engendré par le π_u. Il possède alors les propriétés des polynômes annulateur d'un endomorphisme. Mais alors pourquoi le présenté puisque le π_u caractérise cet idéal ? Ce polynôme nous permet d'approfondir le lien avec le spectre de l'endomorphisme. C'est alors un outils fondamental de la théorie de la réduction.

- $\rightsquigarrow$ *Définition* : Polynôme caractéristique χ_u $\rightsquigarrow$ *Remarque* : Matrice semblable (indépendance base)
- $\rightsquigarrow$ *Proposition* : Degré + relation coefficient racine $\rightsquigarrow$ *Application* : Calcul en dimension 2
- $\rightsquigarrow$ *Proposition* : Spectre est les racines de χ
- $\rightsquigarrow$ *Application* : K algébriquement clos : tout u admet une valeur propre
- $\rightsquigarrow$ *Théorème* [40, p.174] : Cayley-Hamilton $\rightsquigarrow$ *Définition* : Multiplicité algébrique
- $\rightsquigarrow$ *Application* : Caractérisation endomorphismes nilpotents $\rightsquigarrow$ *Définition* : Sous-espace propre
- $\rightsquigarrow$ *Définition* : Multiplicité géométrique
- $\rightsquigarrow$ *Proposition* [26, p.290] : Borne sur la dimension des sous-espaces propres
- $\rightsquigarrow$ *Application* : Décomposition en somme direct via les sous-espaces propres
- $\rightsquigarrow$ *Proposition* : Stabilité et divisibilité
- $\rightsquigarrow$ *Application* [47, p.87] : Résoudre des équations différentielles.

II. Un outils pour les réductions [14, p.956]

Une réduction c'est choisir une base de telle sorte que la matrice que l'on étudie soit dans une forme agréable (souvent on la cherche diagonale). Lorsque cela n'est pas possible (ou que la forme n'est pas assez agréable), on cherche d'autre formes qui peuvent être des sommes ou des produits plus pratique à manipuler. Les polynômes d'endomorphismes sont des outils pratiques pour les réductions. Ils permettent de les caractériser (si elles existent ou non) et de les calculer (Dunford).

A. *Diagonalisation* Trouver une base dans laquelle la matrice est sous forme diagonale est le Graal. Les conditions de diagonalisation se lisent dans le polynôme minimal. La décomposition quant à elle se lit dans le polynôme caractéristique.

- $\rightsquigarrow$ *Définition* : Diagonalisation $\rightsquigarrow$ *Proposition* : Caractérisation via π_u et χ_u
- $\rightsquigarrow$ *Application* : Diagonalisation sur sous-espace stable
- $\rightsquigarrow$ *Application* : Caractérisation de la co-diagonalisation $\rightsquigarrow$ *Application* : Calcul de l'exponentielle
- $\rightsquigarrow$ *Remarque* : Pas la meilleur méthode mais peut servir dans le cas des équations différentielles.
- $\rightsquigarrow$ *Méthode* : Calcul de la matrice diagonale

B. *Trigonalisation* Si l'endomorphisme n'est pas diagonalisable, un bon compromis peut être la trigonalisation.

- $\rightsquigarrow$ *Définition* : Trigonalisation $\rightsquigarrow$ *Proposition* : Caractérisation via π_u et χ_u
- $\rightsquigarrow$ *Application* : Dans un corps algébriquement clos : tout est trigonalisable
- $\rightsquigarrow$ *Application* : $\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{Tr}(A))$: $\exp(A) \in GL_n(\mathbb{C})$
- $\rightsquigarrow$ *Application* : Suite récurrentes linéaires à coefficients constants
- $\rightsquigarrow$ *Définition* : Sous-espace caractéristique $\rightsquigarrow$ *Proposition* : Diagonaliser par bloc

C. *Réduction* Nous donnons ici quelques méthodes de réductions pour obtenir des matrices presque diagonales. La décomposition de Dunford est la plus simple et permet de calculer efficacement des puissances de matrices. Cependant, elle ne permet pas de répondre à la question de la classification : montrer que deux matrices sont semblables sous leur décomposition de Dunford, revient à montrer que les deux matrices sont semblables pour la même matrice P. La décomposition de Jordan vient alors remédier à ce problème : elle permet de caractériser les matrices semblables. Cependant l'application d'une telle méthode demande une connaissance du spectre et donc la factorisation du polynôme minimal. La réduction de Frobenius ne demande pas le calcul des valeurs propres et réalise cette classification.

$\rightsquigarrow$ *Théorème* : Décomposition de Dunford
$\rightsquigarrow$ *Application* : Calcul de l'exponentielle de matrice
$\rightsquigarrow$ *Application* : Caractérisation de la diagonalisation de $\exp(A)$.
$\rightsquigarrow$ *Définition* : Bloc de Jordan
$\rightsquigarrow$ *Définition* : Suite de noyau itéré
$\rightsquigarrow$ *Proposition* : Propriété de cette suite
$\rightsquigarrow$ *Remarque* : Injection de Frobenius
$\rightsquigarrow$ *Théorème* : Réduction de Jordan
$\rightsquigarrow$ *Application* : Classification
$\rightsquigarrow$ *Théorème* : Décomposition de Frobenius

Leçon 156 : Exponentielle de matrices. Applications.

Références pour la leçon

[22], Caldero et Germoni, *Histoires hédonistes de groupes et de géométries, tome 1.*
[30] Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles.*
[40] Gourdon, *Algèbre.*
[52] Mneimne et Testard, *Introduction à la théorie des groupes de Lie classique.*
[57] Queffelec et Zuily, *Éléments d'analyse pour l'agrégation.*
[61] Riesler et Boyer, *Algèbre pour la licence 3.*
[63] Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation.*
[69] Zavidovique, *Un max de maths.*

Développements de la leçon

Surjectivité de l'exponentielle — Étude de $O(p,q)$

Motivation

Défense

— Résolutions d'équations différentielles linéaires à coefficients constants

— Résolutions d'équations différentielles non linéaires

— Théorie des groupes de Lie : pour comprendre un groupe de matrice, il suffit de le comprendre au voisinage de l'identité I_n. Pour cela, on veut regarder l'espace tangent (qui est un espace vectoriel). On obtient alors un champs de vecteurs qui donne une solution différentielle de e^{tA} où A est le vecteur tangent (ici c'est bien une matrice).

Ce qu'en dit le jury

Bien que ce ne soit pas une leçon d'analyse, il faut toutefois pouvoir justifier clairement la convergence de la série exponentielle. La distinction entre le cas réel et complexe doit être clairement évoqué.

Les questions de surjectivité ou d'injectivité doivent être abordées. Par exemple la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle l'exponentielle d'une matrice à coefficients réels ? La matrice définie par blocs $B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ est-elle l'exponentielle d'une matrice à coefficients réels ?

La décomposition de Dunford multiplicative (décomposition de Jordan) de ${}_exp(A)$ trouve toute son utilité dans cette leçon. Notons que l'exponentielle fait bon ménage avec la décomposition polaire dans bon nombre de problèmes sur les sous-groupes du groupe linéaire. L'étude du logarithme (quand il est défini) trouve toute sa place dans cette leçon. Si l'on traite du cas des matrices nilpotentes, on pourra évoquer le calcul sur les développements limités.

Il est bon de connaître l'image par exponentielle de certains sous-ensembles de matrices (ensemble des matrices symétriques, hermitiennes, ou antisymétriques).

Les applications aux équations différentielles méritent d'être présentées sans toutefois constituer l'essentiel de la leçon. On pourra par exemple faire le lien entre réduction et comportement asymptotique, mais le jury déconseille aux candidats de proposer ce thème dans un développement de cette leçon, sauf à avoir bien compris comment les apports algébriques permettent ici de simplifier les conclusions analytiques.

S'ils le désirent, les candidats peuvent s'aventurer vers les sous-groupes à un paramètre du groupe linéaire (on peut alors voir si ces sous-groupes constituent des sous-variétés fermées de $GL_n(\mathbb{R})$) ou vers les algèbres de Lie.

Métaplan

Cadre : $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (ou tout corps de caractéristique nulle et complet pour une distance) ; E un K-ev de dimension finie n.

I. Exponentielle de matrice et propriétés algébriques [52, p.57]

A. *Exponentielle de matrice* L'exponentielle de matrice est définie comme la limite d'une série absolument convergente. Elle possède de nombreuses propriétés algébrique (conjugaison, transposée, inversible). L'exponentielle d'une matrice est un polynôme d'un endomorphisme. Cependant, on a pas un polynôme unique pour toute matrice (sinon, une de ses dérivées successives d'annulerait).

- $\rightsquigarrow$ *Définition* : Exponentielle de matrice
- $\rightsquigarrow$ *Remarque* [40] : Borne sur la norme
- $\rightsquigarrow$ *Proposition* : Exponentielle et conjugaison
- $\rightsquigarrow$ *Application* : Matrice semblable
- $\rightsquigarrow$ *Proposition* : Exponentielle et trace
- $\rightsquigarrow$ *Proposition* : Exponentielle et transposée
- $\rightsquigarrow$ *Application* : Matrice symétrique
- $\rightsquigarrow$ *Proposition* : $\det(\exp A) = \exp(\mathrm{Tr}(A))$
- $\rightsquigarrow$ *Corollaire* : $\exp(A) \in GL_n(\mathbb{C})$
- $\rightsquigarrow$ *Proposition* : Commutativité implique $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$
- $\rightsquigarrow$ *Contre-exemples* : Dans le cas non commutatif : égalité ou non
- $\rightsquigarrow$ *Proposition* : $\exp(A) \in K[A]$
- $\rightsquigarrow$ *Application* : Commutativité des exponentielle
- $\rightsquigarrow$ *Application* : Calcul de l'inverse

B. *Calcul d'une exponentielle de matrice* Le calcul d'une exponentielle de matrice est difficile : nous devons calculer des puissances successives de matrices et en déterminer leur limites. Dans des cas particulier (matrices diagonales ou nilpotentes) ce calcul devient bien plus facile.

- $\rightsquigarrow$ *Exemple* : Matrice diagonale
- $\rightsquigarrow$ *Exemple* : Matrice nilpotente
- $\rightsquigarrow$ *Théorème* [61, p.63 et p.176] : Décomposition de Dunford
- $\rightsquigarrow$ *Application* : Calcul d'une exponentielle
- $\rightsquigarrow$ *Application* : Critère de diagonale de l'exponentielle
- $\rightsquigarrow$ *Méthode* : Calcul via les polynômes

II. Propriétés de la fonction exponentielle [52, p.57] L'exponentielle est une fonction sur l'espace des matrices. Nous allons en étudier les propriétés : sa régularité, son inverse si elle est définie, ses images et son injectivité.

A. *Régularité*

- ⇝ *Proposition* : Caractère $\mathcal{C}^\infty$
- ⇝ *Proposition* : Différentielle en 0
- ⇝ *Corollaire* : $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme
- ⇝ *Application* : Sous-groupe arbitrairement petit
- ⇝ *Définition* : Logarithme
- ⇝ *Proposition* : Propriétés du logarithme
- ⇝ *Proposition* : $\exp : \mathcal{N} \to \mathcal{U}$

B. *Injectivité et surjectivité de cette application*

- ⇝ *Remarque* : La non-injectivité de l'exponentielle
- ⇝ *Proposition* : $\exp : \mathcal{D}_n(K) \to GL_n(K)$ est injective
- ⇝ *Théorème* [69, p.47] : Surjectivité de l'exponentielle
- ⇝ *Contre-exemple* : Non surjectivité dans $GL_n(\mathbb{R})$
- ⇝ *Proposition* : $\exp : \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \to SO_n(\mathbb{R})$ est surjective
- ⇝ *Théorème* : Homéomorphisme $S_n(\mathbb{R}) \to S_n^{++}(\mathbb{R})$
- ⇝ *Application* [22, p.210] : Étude $O(p,q)$
- ⇝ *Corollaire* [22, p.210] : Compacité de $O(p,q)$

III. Équation différentielle Une application principal de l'exponentielle de matrice est la résolution des équations différentielles. Nous allons voir quels sont les équations qui sont résolues avec l'exponentielle de matrice. Nous avons également quelques résultats comme le théorème de Liapinov qui nous permet d'étendre les équations que nous pouvons résoudre grâce à ce procédé.

- ⇝ *Théorème* [30, p.199] : Existence des solutions pour $Y' = AY + B(t)$
- ⇝ *Corollaire* [30, p.199] : Expression de la solution
- ⇝ *Définition* [57, p.380] : Stabilité d'un système différentiel autonome
- ⇝ *Théorème* [57, p.380] : Stabilité d'une telle solution
- ⇝ *Théorème* [63, p.132] : Liapunov
- ⇝ *Application* [63, p.132] : Équation du pendule

Leçon 157 : Endomorphisme triangulaire. Endomorphisme nilpotent.

Références pour la leçon

[13] Beck, Malik et Peyre, *Objectif agrégation.*
[14] Berhuy, *Algèbre : le grand combat.*
[23], Caldero et Germoni, *Histoires hédonistes de groupes et de géométries, tome 2.*
[40] Gourdon, *Algèbre.*
[44] Hauchecorne, *Les contre-exemples en mathématiques.*

Développements de la leçon

Cardinal du cône nilpotent — Décomposition de Dunford

Motivation

Défense

La réduction d'un endomorphisme en dimension fini consiste à trouver une représentation plus simple dans une base.

— Faciliter les calculs des puissances et des exponentielles (résolution d'équations différentielles et systèmes dynamiques discrets).
— Classer les endomorphismes à similitude près.

Les endomorphismes trigonalisables et nilpotents sont les endomorphismes que l'on cherche à obtenir lors de ces décompositions.

Ce qu'en dit le jury

Il est bon de savoir expliquer pourquoi l'application induite par un endomorphisme trigonalisable (respectivement nilpotent) sur un sous-espace stable est encore trigonalisable (respectivement nilpotent). L'utilisation des noyaux itérés est fondamentale dans cette leçon, par exemple pour déterminer si deux matrices nilpotentes sont semblables. Il est intéressant de présenter des conditions suffisantes de trigonalisation simultanée ; l'étude des endomorphismes cycliques a toute sa place dans cette leçon. L'étude des nilpotents en dimension 2 débouche naturellement sur des problèmes de quadriques et l'étude sur un corps fini donne lieu à de jolis problèmes de dénombrement.

S'ils le désirent, les candidats peuvent aussi présenter la décomposition de Frobenius, ou des caractérisations topologiques des endomorphismes nilpotents, ou encore des propriétés topologiques de l'ensemble des endomorphismes nilpotents.

Métaplan

I. Outils [14, p.956] Nous présentons ici les premiers outils mathématiques nécessaires à cette leç :on. Pour le lemme des noyaux si on a un polynôme annulateur de u, on peut décomposer E en somme directe de sous espaces u-stables. Si on concatène des bases de ces sous espaces, on obtient une base dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs c'est-à-dire simple

- ⇝ *Définitions* : Valeurs propres
- ⇝ *Définition* : Sous-espaces propre
- ⇝ *Définition* : Polynôme minimal
- ⇝ *Définition* : Polynôme minimal
- ⇝ *Proposition* : Caractérisation des valeurs propres
- ⇝ *Proposition* : Propriétés de stabilité
- ⇝ *Application* : Démonstration par récurrence
- ⇝ *Théorème* : Lemme des noyaux

II. Endomorphisme trigonalisable [14, p.956] Si l'endomorphisme n'est pas diagonalisable, un bon compromis peut être la trigonalisation.

A. *Être trigonalisable*

- ⇝ *Définition* : Endomorphisme triangulaire
- ⇝ *Remarque* : Semblable (supérieur ou inférieur)
- ⇝ *Définition* : Endomorphisme trigonalisable
- ⇝ *Proposition* : Matrices trigonalisables
- ⇝ *Proposition* : Caractérisation via π_u et χ_u
- ⇝ *Application* : Dans un corps algébriquement clos : tout est trigonalisable
- ⇝ *Application* : $\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{Tr}(A))$: $\exp(A) \in GL_n(\mathbb{C})$
- ⇝ *Application* : Suite récurrentes linéaires à coefficients constants
- ⇝ *Proposition* : Stabilité
- ⇝ *Proposition* : Expression avec les valeurs propres
- ⇝ *Application* : Spectre des polynômes d'endomorphismes
- ⇝ *Application* : Théorème de Cayley-Hamilton

B. *Trigonalisation simultanée* Nous sommes également amené à chercher si on peut trigonaliser deux endomorphismes simultanément. Cela revient à chercher une base dans laquelle les deux endomorphismes sont sous forme triangulaire.

- ⇝ *Proposition* : Stabilité
- ⇝ *Théorème* : Trigonalisation simultanée
- ⇝ *Remarque* : La réciproque est fausse : cela revient à dire que deux matrices triangulaires commutent ce qui est faux.
- ⇝ *Proposition* : Somme qui commutent

III. Endomorphisme nilpotent [13, p.169] Un endomorphisme nilpotent est un endomorphisme dont une certaine itéré s'annule. Le calcul de ces puissances itérées est finie (il y a qu'un nombre fini de puissance non nul). Nous allons commencer par caractériser les endomorphismes nilpotents. Ensuite nous étudierons le cône nilpotent (les endomorphismes nilpotent ne sont pas stables par addition donc ce n'est pas un sous-espace vectoriel). Nous finirons par une généralisation de ce concept avec les endomorphismes cycliques.

A. *Être nilpotent*

- ⇝ *Définition* : Endomorphisme nilpotent
- ⇝ *Contre-exemple* [44, p.67] : f tel que $\forall x, \exists p, f^p(x) = 0$ non nilpotent
- ⇝ *Proposition* : Matrice nilpotente
- ⇝ *Définition* : Indice de nilpotence
- ⇝ *Proposition* : Caractérisation de la nilpotente
- ⇝ *Proposition* : Caractérisation via la trace
- ⇝ *Contre-exemple* : En caractéristique p : I_p
- ⇝ *Proposition* : Caractérisation via le quotient

B. *Nature de l'ensemble des endomorphismes nilpotents*

- ⇝ *Notation* : L'ensemble des endomorphisme nilpotent : $\mathcal{N}(E)$
- ⇝ *Proposition* : $\mathcal{N}(E)$ est un cône
- ⇝ *Remarque* : Pas de stabilité via l'addition
- ⇝ *Proposition* : Opérations sur les nilpotent
- ⇝ *Théorème* : Vect($\mathcal{N}(E)$)
- ⇝ *Lemme* [23, p.213] : Base via les matrices nilpotentes
- ⇝ *Théorème* : Cardinal du cône nilpotent

C. *Généralisation : endomorphismes cycliques* Les endomorphismes nilpotent se généralisent avec les endomorphismes cycliques. Pour ceux-ci nous ne demandons pas l'annulation des puissances itérées mais que les première puissances itérées forment une base de E (qui est également une propriété des nilpotents). Ce sont les structures de bases de la réduction de Frobenius. Les endomorphismes nilpotents sont donc des endomorphismes cycliques particulier (on n'a pas tout à fait une base de E mais d'un sous-espace vectoriel de E).

- ⇝ *Définition* : Matrice compagnon
- ⇝ *Définition* : Endomorphisme cyclique
- ⇝ *Théorème* : Caractérisation

IV. Application aux réductions [14, p.956]

Les réductions permettent de choisir une bonne base afin qu'une matrice s'écrive de manière simplifier. Elles permettent de simplifier les calculs comme de l'exponentielle de matrice et de classer à similitude près les différents endomorphismes.

A. *Sous-espaces caractéristiques [40, p.189]* Les sous-espaces caractéristiques, à l'instar des sous-espaces propres, donnent une décomposition d'un espace vectoriel. On les calcul à partir du polynôme caractéristique sur lequel on ne fait aucune hypothèse.

- ⇝ *Définition* : Sous-espace caractéristique
- ⇝ *Théorème* : Décomposition
- ⇝ *Application* : Diagonalisation par bloc
- ⇝ *Application* : Puissance de matrices

B. *Décomposition de Dunford* La décomposition de Dunford est la plus simple et permet de calculer efficacement des puissances de matrices. Cependant, elle ne permet pas de répondre à la question de la classification : montrer que deux matrices sont semblables sous leur décomposition de Dunford, revient à montrer que les deux matrices sont semblables pour la même matrice P.

- ⇝ *Théorème* : Dunford
- ⇝ *Application* : Calcul d'exponentielle de matrices

C. *Décomposition de Jordan* La décomposition de Jordan vient alors remédier à ce problème : elle permet de caractériser les matrices semblables. On commence par étudier cette décomposition dans le cas particulier des endomorphismes nilpotents.

- ⇝ *Définition* : Bloc de Jordan
- ⇝ *Définition* : Suite de noyaux itérés
- ⇝ *Proposition* : Propriété de cette suite
- ⇝ *Remarque* : Injectivité de Frobenius
- ⇝ *Théorème* : Décomposition de Jordan pour les endomorphismes nilpotents
- ⇝ *Application* : Caractérisation des endomorphismes semblables
- ⇝ *Contre-exemple* :
- ⇝ *Remarque* : Indice de nilpotence
- ⇝ *Remarque* : Dimension de $\ker f$
- ⇝ *Proposition* : Caractérisation de la nilpotence
- ⇝ *Proposition* Caractérisation de la cyclicité
- ⇝ *Théorème* : Réduction de Jordan
- ⇝ *Corollaire* : Caractérisation des endomorphismes semblables
- ⇝ *Remarque* : Système invariant

D. *Réduction de Frobenius* L'application de la réduction de Jordan demande une connaissance du spectre et donc la factorisation du polynôme minimal. La réduction de Frobenius ne demande pas le calcul des valeurs propres et réalise cette classification.

- ⇝ *Théorème* : Définition de la suite d'invariant de similitude
- ⇝ *Théorème* : Réduction de Frobenius
- ⇝ *Corollaire* : Caractérisation des matrices semblables
- ⇝ *Remarque* : Invariant de similitude

Leçon 159 : Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.

Références pour la leçon

[10] Avez, *Calcul différentiel.*
[13] Beck, Malik et Peyre, *Objectif agrégation.*
[26] Cognet, *Algèbre linéaire.*
[27] Cognet, *Algèbre bilinéaire.*
[33] Francinou, Gianella et Nicolas, *Oraux X-ENS, Algèbre 1.*
[40] Gourdon, *Algèbre.*
[42] Grifone, *Algèbre linéaire.*

Développements de la leçon

Méthode de Kackmarz

Théorème des extrema liés

Motivation

Défense

— Pourquoi étudier le dual ? Structure d'un espace vectoriel et son dual sont très liés. De plus, les hyperplans donnent une interprétation géométrique des formes linéaires

Ce qu'en dit le jury

Il est important de bien placer la thématique de la dualité dans cette leçon ; celle-ci permet de mettre en évidence des correspondances entre un morphisme et son morphisme transposé, entre un sous-espace et son orthogonal (canonique), entre les noyaux et les images ou entre les sommes et les intersections. Bon nombre de résultats d'algèbre linéaire se voient dédoublés par cette correspondance. Les liens entre base duale et fonctions de coordonnées doivent être parfaitement connus. Le passage d'une base à sa base duale ou antédualte, ainsi que les formules de changement de base, doivent être maîtrisés. On pourra s'intéresser aux cas spécifiques où l'isomorphisme entre l'espace et son dual est canonique (cas euclidien, cas des matrices).

Savoir calculer la dimension d'une intersection d'hyperplans via la dualité est important dans cette leçon. L'utilisation des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes permet facilement d'obtenir les équations d'un sous-espace vectoriel ou d'exhiber une base d'une intersection d'hyperplans.

Cette leçon peut être traitée sous différents aspects : géométrique, algébrique, topologique ou analytique. Il faut que les développements proposés soient en lien direct avec la leçon. Enfin rappeler que la différentielle d'une fonction à valeurs réelles est une forme linéaire semble incontournable.

Il est possible d'illustrer la leçon avec un point de vue probabiliste, en rappelant que la loi d'un vecteur aléatoire X est déterminée par les lois unidimensionnelles de $X.u$ pour tout vecteur u.

Métaplan

I. Formes linéaires

A. *Formes linéaires [40, p.126]*

- ⇝ *Définition* : Formes linéaires
- ⇝ *Proposition* : Décomposition via la base de E
- ⇝ *Exemple* : Forme linéaire coordonné
- ⇝ *Application* [13, p.2] : Application différentiable
- ⇝ *Définition* : Espace dual
- ⇝ *Exemple* : Trace
- ⇝ *Application* : Ensemble connexe de $O_n(\mathbb{R})$
- ⇝ *Exemple* : Cas de l'ordre 1

B. *Hyperplan [26, p.92]* Les hyperplans donnent une interprétation géométrique des formes linéaires. De plus, résoudre un système linéaire revient à caractériser une intersection d'hyperplans.

- ⇝ *Définition* : Hyperplan
- ⇝ *Remarque* : Dimension d'un hyperplan
- ⇝ *Proposition* : Caractérisation de la proportionnalité
- ⇝ *Remarque* : Résolution de système d'équations
- ⇝ *Corollaire* : Équation d'un hyperplan
- ⇝ *Application* : Méthode de Kaczmarz

II. Dualité [40, p.126] Nous souhaitons caractériser les espaces duaux et biduaux. Pour cela, nous définissons leurs base. Une base duale interviennent dans la décomposition des formes de Gauss. Elles permettent également de transporter un objet dans son espace dual. Le bidual permet l'opération "inverse" puisqu'il nous permet de retourner dans un espace isomorphe à l'espace de départ.

A. *Base duale*

- ⇝ *Définition* : Base duale
- ⇝ *Exemple* : Base duale sur $K_n[X]$.
- ⇝ *Proposition* [42, p.85] : E et E^* sont isomorphes
- ⇝ *Remarque* [42, p.85] : Isomorphisme non unique
- ⇝ *Théorème* [13, p.103] : Théorème Riesz
- ⇝ *Théorème* [33, p.329] : Dual de $\mathcal{M}_n(K)$
- ⇝ *Application* [33, p.329] : Caractérisation du centre
- ⇝ *Application* [33, p.329] : Hyperplans intersectent GL_n

B. *Bidual*

- ⇝ *Définition* : Bidual
- ⇝ *Proposition* : $E \simeq E^{**}$
- ⇝ *Définition* : Base antéduale
- ⇝ *Proposition* : Unicité de la base antéduale
- ⇝ *Application*[13, p.154] : Polynôme de Lagrange

III. Orthogonalité L'orthogonalité est une notion importante qui permet de simplifier des calcul comme nous l'avons étudier dans la méthode de Kaczmarz. On peut définir cette notion de plusieurs manière (depuis tout petit nous la définissons via les produits scalaires). Nous allons alors étudier les liens entres toutes ces définitions.

A. *L'orthogonalité via la dualité [40, p.127]*

- ⇝ *Définition* : Orthogonal
- ⇝ *Remarque* : Coïncidence avec l'orthogonalité euclidienne (Riesz)
- ⇝ *Proposition* : Caractérisation via la base
- ⇝ *Proposition* : Propriétés de ces orthogonal
- ⇝ *Théorème* : Dimension et orthogonalité
- ⇝ *Proposition* : Lien avec les hyperplan
- ⇝ *Application* [10, p.103] : Extremums liés
- ⇝ *Théorème* : Invariant de similitude

B. *Lien avec l'orthogonalité via les formes quadratiques [27, p.24]*

- ⇝ *Définition* : Formes quadratiques
- ⇝ *Proposition* : Définition de la forme polaire
- ⇝ *Définition* : Groupe orthogonal
- ⇝ *Remarque* : Lien avec celui du dual
- ⇝ *Définition* : Noyau
- ⇝ *Proposition* : Lien avec la dimension
- ⇝ *Application* : Décomposition de Gauss

IV. Application transposée [40, p.129] L'application transposée est une application définie sur un espace dual. Elle permet également de définir un morphisme des applications linéaires vers les applications linéaires sur les espaces duaux. On s'intéresse alors à ces propriétés et à sa représentation matricielle. Comme on le vera, elle est également très liée à la notion d'orthogonalité.

A. *Définition de la transposée*

- ⇝ *Définition* : Transposée
- ⇝ *Remarque* : Morphisme
- ⇝ *Proposition* : Représentation matricielle
- ⇝ *Application* : ${}^t({}^tu) = u$
- ⇝ *Proposition* : Propriétés linéaires, composition et inverse

B. *Lien avec l'orthogonalité*

- ⇝ *Proposition* : Image, noyaux, rang de la transposée
- ⇝ *Proposition* : Stabilité via la transposée
- ⇝ *Application* : Stabilité des vecteurs propres
- ⇝ *Application* : Co-trigonalisation

Leçon 162 : Système d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.

Références pour la leçon

[2] Allaire et Kaber, *Algèbre linéaire numérique.*
[23] Caldero et Germoni, *Histoires hédonistes de groupes et de géométries, tome 2.*
[26] Cognet, *Algèbre linéaire.*
[40] Gourdon, *Algèbre.*
[42] Grifone, *Algèbre linéaire.*
[58] Ramis et Warusfel, *Cours de mathématiques pures et appliquées.*

Développements de la leçon

Méthode de Kackmarz	Méthode du gradient à pas optimal

Motivation

Défense

- La résolution de système d'équation linéaire intervient dans de nombreuses applications mathématiques : algèbre linéaire ; résolution d'équation différentielle linéaire ; ... Mais ils interviennent dans de nombreuses autres sciences : économie, physique, ...
- Dualité des problèmes : théorique (existence des solutions, calcul théorique, conséquences) et pratique (comment on les implémente sur un ordinateur, convergence, complexité)

Ce qu'en dit le jury

Dans cette leçon, les techniques liées au simple pivot de Gauss constituent l'essentiel des attendus. Il est impératif de faire le lien avec la notion de système échelonné, (dont on donnera une définition précise et correcte), et de situer l'ensemble dans le contexte de l'algèbre linéaire (sans oublier la dualité). Un point de vue opératoire doit accompagner l'étude théorique et l'intérêt algorithmique des méthodes présentées doit être expliqué. On pourra illustrer cela par des exemples simples (où l'on attend parfois une résolution explicite).

Parmi les conséquence théoriques, les candidats pourront notamment donner des systèmes de générateurs de $GL_n(K)$ et $SL_n(K)$. Ils peuvent aussi présenter les relations de dépendance linéaire sur les colonnes d'une matrice échelonnée qui permettent de décrire simplement les orbites de l'action à gauche de $GL_n(K)$ sur $M_n(K)$ donnée par $(P, A) \to PA$.

S'ils le désirent, les candidats peuvent exploiter les propriétés des systèmes d'équations linéaires pour définir la dimension des espaces vectoriels et obtenir une description de l'intersection de deux sous-espaces vectoriels donnés par des systèmes générateurs, ou d'une somme de deux sous-espaces vectoriels donnés par des équations.

De même, des discussions sur la résolution de systèmes sur Z et la forme normale de Hermite peuvent trouver leur place dans cette leçon. Enfin, il est possible de présenter les décompositions LU et de Choleski, en évaluant le coût de ces méthodes ou encore d'étudier la résolution de l'équation normale associée aux problèmes des moindres carrés et la détermination de la solution de norme minimale par la méthode de décomposition en valeurs singulières.

Métaplan

Cadre : $A\mathcal{M}_{m,n}(K)$ où K est un corps commutatif quelconque.

I. Systèmes d'équations linéaires Nous commençons par donner quelques notions de vocabulaires autours des systèmes d'équations linéaires. Ce vocabulaire nous servira tout au long de la leçon.

- $\rightsquigarrow$ *Définition* : Forme classique, forme matricielle et $Ax = b$
- $\rightsquigarrow$ *Définition* : Système compatible : $b \in \mathrm{im}(A)$
- $\rightsquigarrow$ *Définition* : Rang du système : $\mathrm{rg}(A)$
- $\rightsquigarrow$ *Remarque* : Résoudre revient à chercher intersection d'hyperplan

A. *Systèmes de Cramer [40, p.138]* Le système de Cramer est un des premier problème que nous sommes capable de résoudre. Il fait des hypothèses sur la taille de la matrice : il faut qu'elle soit inversible. Cependant, donner explicitement les solution d'un tel système est en $O(n!)$. On a donc besoin de méthodes plus efficaces.

- $\rightsquigarrow$ *Définition* : $A \in GL_n(K)$
- $\rightsquigarrow$ *Proposition* : Existence et unicité des solutions
- $\rightsquigarrow$ *Théorème* : Calcul via le déterminant
- $\rightsquigarrow$ *Proposition* : Complexité : $O(n!)$

B. *Cas général [40, p.138]* On décrit ici la méthode général pour résoudre un système. Comme précédemment la complexité d'une telle résolution nous oblige à chercher une méthode plus efficace.

- $\rightsquigarrow$ *Cadre* : r est le rang du système et le déterminant extrait de taille r est non nul
- $\rightsquigarrow$ *Définition* : Déterminant caractéristique
- $\rightsquigarrow$ *Théorème* : Théorème de Rouché-Fontné
- $\rightsquigarrow$ *Remarque* : Description des solutions
- $\rightsquigarrow$ *Définition* : Système homogène
- $\rightsquigarrow$ *Proposition* : Solutions

II. Pivot de Gauss et application Une méthode plus efficace est l'algorithme du pivot de Gauss qui s'exécute en $O(n^3)$. Il est basé sur des opérations élémentaires données par des matrices élémentaires qui agissent sur l'ensemble des matrices. Cette action permet de mettre le système sous-forme échelonnée : triangulaire supérieure. L'algorithme de Gauss est une méthode appliquant cette action. Gardons à l'esprit que cette méthode est applicable sur des anneaux intègre (la remontée n'est pas réalisable).

A. *Opérations élémentaires [24, p.201]*

- $\rightsquigarrow$ *Définition* [26, p.205] : Matrices de dilatation
- $\rightsquigarrow$ *Définition* [26, p.205] : Matrices de permutation
- $\rightsquigarrow$ *Définition* [26, p.205] : Matrices de transvection
- $\rightsquigarrow$ *Proposition* [26, p.205] : Déterminant de ces matrices
- $\rightsquigarrow$ *Définition* : Action à droite de $GL_n(K)$
- $\rightsquigarrow$ *Remarque* : Traduction des opérations via les matrices

- ⇝ *Proposition* : Action conserve le rang du système
- ⇝ *Proposition* : Action conserve les solutions
- ⇝ *Application* [26, p.205] : Connexité par arcs
- ⇝ *Lemme* [26, p.205] : Inverse de ces matrices
- ⇝ *Remarque* : De même : action à droite
- ⇝ *Théorème* [26, p.205] : Générateurs de $SL_n(K)$ et $GL_n(K)$

B. *Système échelonné [24, p.201]*

- ⇝ *Définition* : Pivot
- ⇝ *Définition* : Système échelonné
- ⇝ *Remarque* : Analogue en colonne
- ⇝ *Application* : Remonter
- ⇝ *Remarque* : Nombre de pivot est le rang

C. *Pivot de Gauss [2, p.107]*

- ⇝ *Théorème* : Mise sous forme échelonnée
- ⇝ *Algorithme* : Pivot de Gauss
- ⇝ *Remarque* : Complexité : $O(mn^2)$
- ⇝ *Proposition* : Résolution de système triangulaire
- ⇝ *Remarque* : Complexité de la remontée : $O(n^2)$
- ⇝ *Théorème* : Caractérisation des orbites par le rang
- ⇝ *Application* [42, p.50] : Résolution de système
- ⇝ *Application* : Liberté de famille
- ⇝ *Application* : Intersection de sous-espaces vectoriel
- ⇝ *Application* : Espace vectoriel via les équations
- ⇝ *Application* : Base duale
- ⇝ *Application* : Déterminant
- ⇝ *Application* : Inverse

D. *Méthodes de décomposition [2, p.113]* Dans certain cas, le pivot de Gauss n'est pas la méthode la plus efficace pour résoudre le problème : des méthodes de décomposition peuvent simplifier le problème afin d'obtenir une résolution plus rapide.

- ⇝ *Principe* : Se ramener à plusieurs systèmes triangulaires
- ⇝ *Théorème* : Décomposition LU
- ⇝ *Remarque* : Calcul direct via Gauss
- ⇝ *Proposition* : Deux systèmes triangulaire : $O(n^3)$
- ⇝ *Proposition* : A trigonale : $O(n)$
- ⇝ *Théorème* : Décomposition de Cholesky
- ⇝ *Proposition* : Deux système triangulaire

III. Méthode d'analyse matricielle Pour certaine matrice une résolution exacte n'est pas nécessaire ou prend trop de temps à être calculer. Nous utilisons alors des méthodes d'analyse matricielle comme les méthodes itératives ou le gradient à pas optimal. Cette dernière transforme notre système est une fonction dont on cherche un extremum.

A. *Méthode itératives [2, p.155]*

- ⇝ *Définition* : Décomposition régulière
- ⇝ *Définition* : Méthode itérative
- ⇝ *Théorème* : Caractérisation de la convergence
- ⇝ *Définition* : Convergence
- ⇝ *Application* : Méthode de Jacobi
- ⇝ *Application* : Méthode de Gauss-Seidel
- ⇝ *Application* : Méthode de Relaxation
- ⇝ *Théorème* : Convergence de la méthode de relaxation
- ⇝ *Théorème* : Méthode de Kaczmarz

B. *Méthode du gradient [58, p.411]*

- ⇝ *Définition* : Conditionnement
- ⇝ *Remarque* : Interprétation
- ⇝ *Proposition* : Propriétés du conditionnement
- ⇝ *Théorème* : Traduction du problème
- ⇝ *Algorithme* : Méthode de gradient à pas optimal
- ⇝ *Théorème* : Convergence de l'algorithme

Leçon 170 : Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.

Références pour la leçon

[22] Caldero et Germoni, *Histoires hédonistes de groupes et de géométries, tome 1.*
[55] Seguin Pazzis, *Invitation aux formes quadratiques.*

Développements de la leçon

Étude de $O(p,q)$	Loi de réciprocité quadratique

Motivation

Défense

- Rassembler les théories géométriques et arithmétiques.
- Il y a plusieurs points de vus sur les formes quadratiques plus ou moins adaptées à une situation : via les formes bilinéaires symétriques, via les fonctions polynomiales homogènes ou via une représentation matricielle.

Ce qu'en dit le jury

Il faut tout d'abord noter que l'intitulé implique implicitement que le candidat ne doit pas se contenter de travailler sur $\mathbb{R}$. Le candidat pourra parler de la classification des formes quadratiques sur le corps des complexes et sur les corps finis. L'algorithme de Gauss doit être énoncé et pouvoir être mis en œuvre sur une forme quadratique simple.

Les notions d'isotropie et de cône isotrope sont un aspect important de cette leçon. On pourra rattacher cette notion à la géométrie différentielle.

Métaplan

Cadre : K un corps de caractéristique différente de 2 ; E un K-espace vectoriel de dimension finie

I. Formes quadratiques [55, p.24] Nous allons présenter les différentes formes quadratiques et leurs premières applications. On commence par présenter les formes quadratiques définies par une forme bilinéaire symétrique. Ensuite, nous enchaînons avec la représentation matricielle qui nous permet de faciliter nos calculs. Pour finir, on fait le lien avec les polynômes. On remarque alors que sur $\mathbb{R}$, on peut ainsi définir la notion de produit scalaire qui est une forme bilinéaire symétrique particulière et donc une forme quadratique particulière.

A. *Formes quadratiques via les formes bilinéaires*

- ⇝ *Définition* : Forme bilinéaire
- ⇝ *Définition* : Symétrique
- ⇝ *Définition* : Alternée
- ⇝ *Définition* : Antisymétrique
- ⇝ *Proposition* : Alternée ⇔ antisymétrique
- ⇝ *Remarque* : Caractéristique 2
- ⇝ *Définition* : Forme quadratique
- ⇝ *Remarque* : Équivalence entre nulle et alternée
- ⇝ *Proposition* : Forme polaire (unicité)
- ⇝ *Exemple* : Espace hyperbolique canonique
- ⇝ *Proposition* : Formule de polarisation
- ⇝ *Application* : Recherche de forme bilinéaire associée
- ⇝ *Définition* : Domaine et universalité
- ⇝ *Définition* : Rang et noyau
- ⇝ *Définition* : Non dégénérée

B. *Formes quadratiques via la représentation matricielle* Pour avoir une matrice, il nous faut une base. Cette représentation nous oblige à connaître ou à trouver une base de notre espace vectoriel (on sait qu'il en existe une, on est en dimension finie). On a des propriétés de changement de base, on voit alors apparaître la théorie des matrices conjuguées et des classes de conjugaison.

- ⇝ *Définition* : Forme quadratique
- ⇝ *Remarque* : Lien avec forme bilinéaire (matrice associée)
- ⇝ *Exemple* : Différentielle seconde (Hessienne)
- ⇝ *Proposition* : Changement de base
- ⇝ *Corollaire* : Classe de conjugaison
- ⇝ *Remarque* : Formes quadratiques canoniques
- ⇝ *Définition* : Noyau et rang

C. *Formes quadratiques via les polynômes*

- ⇝ *Définition* : Forme quadratique
- ⇝ *Remarque* : Lien avec les définitions précédentes
- ⇝ *Définition* : Noyau et rang
- ⇝ *Application* : Déterminant non forme quadratique mais le coefficient de X^{n-2} dans le polynôme caractéristique l'est (application dans l'étude du cône nilpotent).

D. *Notion de produit scalaire [55, p.102]* Le produit scalaire est une application bilinéaire symétrique définie positive. Autrement dit, dans le cadre des formes quadratiques, c'est une forme associée à une forme bilinéaire définie positive.

- ⇝ *Définition* : Forme bilinéaire définie, positive, négative
- ⇝ *Remarque* : Cas de la représentation matricielle
- ⇝ *Proposition* : Inégalité de Cauchy–Schwartz
- ⇝ *Corollaire* : Inégalité de Minkowski
- ⇝ *Proposition* : $\sqrt{q}$ est une norme
- ⇝ *Théorème* : Théorème de Schwartz pour application deux fois différentiables
- ⇝ *Application* : Recherche d'extremum

II. Orthogonalité et isotropie

A. *Orthogonalité via les formes quadratiques [55, p.67]*

- ⇝ *Définition* : Vecteur orthogonaux
- ⇝ *Proposition* : Lien avec symétrique
- ⇝ *Proposition* : Théorème de Pythagore
- ⇝ *Définition* : Sous-espace vectoriel orthogonaux
- ⇝ *Exemple* : Interprétation géométrique
- ⇝ *Proposition* : Propriétés des orthogonaux

B. *Groupe orthogonal [55, p.54]* On souhaite conserver les endomorphismes qui préservent les formes quadratiques. Ceux-ci ont une structure de groupe : on les appelle groupe orthogonal.

- ⇝ *Définition* : Automorphisme orthogonaux
- ⇝ *Définition* : Groupe orthogonaux
- ⇝ *Proposition* : Déterminant des éléments de $O(q)$
- ⇝ *Définition* : Groupe spécial orthogonal
- ⇝ *Définition* [22, p.210] : Groupe $O(p,q)$
- ⇝ *Proposition* [22, p.210] : Étude de $O(p,q)$

C. *Base orthonormée et réduction [55, p.57]*

- ⇝ *Définition* : Base q-orthogonale
- ⇝ *Remarque* : Base orthonormée
- ⇝ *Proposition* : Caractérisation
- ⇝ *Théorème* : Existence
- ⇝ *Corollaire* : Conséquences
- ⇝ *Méthode* : Méthode de Gauss analytique
- ⇝ *Méthode* [55, p.9] : Méthode de Gauss matricielle
- ⇝ *Remarque* : Lien entre les deux

D. *Isotropie*

- ⇝ *Définition* : Vecteur isotrope
- ⇝ *Définition* : Cône isotrope
- ⇝ *Remarque* : Réciproque est fausse
- ⇝ *Remarque* : Mêmes vecteurs isotropes
- ⇝ *Proposition* : Noyau inclut dans le cône

III. Classification des formes quadratiques

A. *Le problème de la classification [55, p.39]*

- ⇝ *Définition* : Formes quadratiques équivalentes
- ⇝ *Proposition* : Caractérisation de l'équivalence
- ⇝ *Proposition* : Caractérisation via les classes d'équivalence
- ⇝ *Proposition* : Équivalence via le rang et le noyau

B. *Classification sur $\mathbb{C}$ [55, p.100]*

- ⇝ *Théorème* : Théorème de classification
- ⇝ *Corollaire* : Matrices diagonalisables
- ⇝ *Corollaire* : Régulière implique base orthonormale

C. *Classification sur $\mathbb{R}$ [55, p.104]*

- ⇝ *Définition* : Signature
- ⇝ *Corollaire* : Même signature
- ⇝ *Théorème* : Théorème d'inertie de Sylvester
- ⇝ *Remarque* : Lien avec Gauss

D. *Classification sur un corps fini [22, p.182]*

- ⇝ *Théorème* : Théorème de classification
- ⇝ *Application* : Loi de réciprocité quadratique

Leçon 182 : Application des nombres complexes à la géométrie.

Références pour la leçon

[9] Audin, *Géométrie.*
[31] Eiden, *Géométrie analytique classique.*
[67] Trignan, *La géométrie des nombres complexes.*

Développements de la leçon

Coloration du cube | Générateurs de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$

Motivation

Défense

— Au $XVII^{\text{ième}}$ siècle : résolution d'équation de degré 2 ou 3. Introduction du corps $\mathbb{C}$.
— Définir le plan grâce à $\mathbb{C}$ qui est un corps commutatif à la place de $\mathbb{R}^2$.

Ce qu'en dit le jury

Cette leçon ne doit pas rester au niveau de la classe de Terminale. L'étude des inversions est tout à fait appropriée, en particulier la possibilité de ramener un cercle à une droite et inversement ; la formule de Ptolémée illustre bien l'utilisation de cet outil. On peut parler des suites définies par récurrence par une homographie et leur lien avec la réduction dans $SL_2(\mathbb{C})$.

S'ils le désirent, les candidats peuvent aussi étudier l'exponentielle complexe et les homographies de la sphère de Riemann. La réalisation du groupe SU 2 dans le corps des quaternions et ses applications peuvent trouver leur place dans la leçon. Il est possible de présenter les similitudes, les homographies et le birapport.

Métaplan

I. Géométrie euclidienne Nous allons nous concentrer sur l'utilisation des nombres complexes dans le cadre de la géométrie euclidienne.

A. *Le plan complexe [31, p.219]* Le plan euclidien peut être interprété comme un plan complexe : nous allons étudier ce lien.

- ⇝ *Définition* : Coordonnées complexes
- ⇝ *Définition* : Affixe d'un point
- ⇝ *Définition* : Affixe d'un vecteur : norme et argument
- ⇝ *Proposition* [67, p.39] : Traduction de la notion de colinéarité
- ⇝ *Proposition* [67, p.40] : Traduction de la notion d'orthogonalité
- ⇝ *Proposition* : Traduction de la notion d'alignement
- ⇝ *Proposition* : Équation d'un cercle ou d'une droite
- ⇝ *Application* : Aire d'un triangle
- ⇝ *Application* : Coordonnées exponentielles

B. *Définition des angles [9, p.73]* La notion d'angle apparaît rapidement dans le cadre d'étude de complexe puisqu'ils peuvent être caractérisé par une norme et un angle.

- ⇝ *Proposition* : Définition d'un angle par une rotation
- ⇝ *Définition* : Angle orienté
- ⇝ *Proposition* : Relation de Chasles
- ⇝ *Définition* : Rotation matricielle
- ⇝ *Application* : Coordonnées polaires

C. *Transformations du plan [9, p89]* Les isométries du plan en sont les transformations. Ces transformations peuvent être exprimées à l'aide de complexe.

- ⇝ *Définition* : Similitude
- ⇝ *Proposition* : Générateur du groupe
- ⇝ *Application* : Conservation des angles
- ⇝ *Définition* : Groupe des isométries
- ⇝ *Définition* : Conjugaison
- ⇝ *Proposition* [67, p.135] : Traduction via les nombres complexes

D. *Coordonnées barycentriques [31, p.5]* Le système de coordonnées barycentrique est un système de coordonnées important permettant de donner des coordonnées à partir d'un triangle de base. Nous allons étudier quelques objets mathématiques via ces coordonnées.

- ⇝ *Définition* : Barycentre
- ⇝ *Proposition* : Propriétés du barycentre
- ⇝ *Application* : Théorème de Desargues
- ⇝ *Définition* : Coordonnées barycentrique
- ⇝ *Proposition* : Lien avec les cartésiennes
- ⇝ *Application* : Définition des vecteurs
- ⇝ *Application* : Aire d'un triangle
- ⇝ *Application* : Point de Lemoine
- ⇝ *Définition* : Équation barycentrique
- ⇝ *Définition* : Droite et concours
- ⇝ *Définition* : Équation de cercle

II. Géométrie projective complexe

Le plan complexe peut être utilisé comme support à la géométrie projective. On commence par définir celle-ci dans le cas complexe.

A. *Géométrie projective [9, p.177]*

- ⇝ *Définition* : Droite projective
- ⇝ *Proposition* : Sphère de Riemann
- ⇝ *Définition* : Repère projectif

B. *Homographie [31, p.255]* Les homographies sont à la géométrie projective ce que sont les isométries sont à la géométrie. Nous allons les définir et en étudier certaines propriétés.

- ⇝ *Définition* : Homographie
- ⇝ *Proposition* : Propriétés des homographies
- ⇝ *Application* : Ellipse et Protéisme de Steiner
- ⇝ *Application* : Théorème de Pasacal
- ⇝ *Proposition* : Action de $GL_n(\mathbb{Z})$ sur le demi-plan de Poincaré par homographie
- ⇝ *Théorème* : Générateur de $SL_2(\mathbb{Z})$

C. *Birapport [31, p.261]* Le birapport est une opération conservant les homographies.

- ⇝ *Définition* : Birapport
- ⇝ *Proposition* : Calcul d'un birapport
- ⇝ *Proposition* : Caractérisation de co-cyclicité
- ⇝ *Proposition* : Caractérisation de l'alignement
- ⇝ *Proposition* : Caractérisation du milieu
- ⇝ *Proposition* : Homographie préserve le birapport
- ⇝ *Application* : Générateur du groupe circulaire

D. *Inversion [31, p.244]* Les inversions sont des transformations qui inverse les distances par rapport à un point donnée.

- ⇝ *Définition* : Inversion
- ⇝ Interprétation
- ⇝ *Application* : Sphère de Riemann
- ⇝ *Théorème* : Théorème de Ptomélé

Leçon 183 : Utilisation des groupes en géométrie.

Références pour la leçon

[1] Alessandri, *Thèmes en géométrie : groupe en situation géométrique.*
[9] Audin, *Géométrie.*
[14] Berhuy, *Algèbre : le grand combat.*
[18] Boyer, *Algèbre et géométries.*
[22] Caldero et Germoni, *Histoires hédonistes de groupes et de géométries, tome 1.*
[49] Laville, *Géométrie pour le capes et l'agrégation.*

Développements de la leçon

Coloration du cube — Générateurs de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$

Défense

Qu'est que la géométrie ?

- La géométrie ? Étude de la Terre puis on a étendu la définition aux figures (mais qu'est-ce qu'une figure) ?
- Différentes géométries = différentes façon de représenter les figures
- Géométrie naturelle = géométrie projective
- Géométrie euclidienne = cadastre (centre des impôts)

Pourquoi les groupes ?

- Les groupes ou plutôt les actions de groupes pour représenter l'univers.
- Les groupes permettent d'effectuer les classifications qui sont très présentes en algèbre et en géométrie

Géométries et groupes ?

- Les figures sont des orbites d'actions de groupes.
- Unification des géométries : une géométrie un groupe agissant sur un ensemble où le groupe contient les transformations permissent sur l'ensemble.

Remarque culturelle : On peut définir des groupes sur les objets géométriques (courbes elliptiques, triangles, ...)

Ce qu'en pense le jury

C'est une leçon dans laquelle on s'attend à trouver des utilisations variées. On s'attend à ce que soient définis différents groupes de transformations (isométries, déplacements, similitudes, translations) et à voir résolus des problèmes géométriques par des méthodes consistant à composer des transformations.

De plus, les actions de groupes sur la géométrie permettent aussi de dégager des invariants essentiels (angle, birapport, excentricité d'une conique). Les groupes d'isométries d'une figure sont incontournables.

Métaplan

Cadre : E un K-espace vectoriel de dimension finie où K un corps commutatif et de caractéristique nulle.

I. Rappels sur les actions de groupes [14, p.174] Les actions de groupes sont à la base des géométries. Être au clair sur ces notions est donc important.

- ⇝ *Définition* : Action de groupe
- ⇝ *Définition* : Orbite
- ⇝ *Définition* : Stabilisateurs
- ⇝ *Définition* : Action libre
- ⇝ *Définition* : Action fidèle
- ⇝ *Définition* : Action transitive
- ⇝ *Proposition* : Relation orbite-stabilisateur
- ⇝ *Proposition* : Formule de Burnside

II. Géométrie affine La géométrie affine est une des première géométrie. La géométrie affine est l'action du groupe des transformations affines (translations, homothéties, ...) sur un espace vectoriel.

A. *Espace et groupe affine* Nous commençons par définir la géométrie par son action de groupe : il nous faut donc le groupe et l'espace sur lequel il agit.

- ⇝ *Définition* [18, p.2] : Espace affine
- ⇝ *Interprétation* [9, p.9] : Espace affine
- ⇝ *Définition* [18, p.3] : Sous-espace affine
- ⇝ *Définition* [9, p.16] : Application affine
- ⇝ *Définition* [18, p.9] : Groupe affine

B. *Invariant du groupe affine [9, p.18]* Les invariants de ce groupes sont biens connus [22, p.331]. Il préserve : l'alignement (les applications affines préservent l'alignement) ; le parallélisme (les bijections affines préservent la directions. Est-ce vrai pour les applications ?) et le barycentre (les applications affines préservent les barycentres)

- ⇝ *Proposition* : Invariance d'un sous-espace affine
- ⇝ *Interprétation* : Préservation de l'alignement
- ⇝ *Définition* [18, p.17] : Barycentre
- ⇝ *Proposition* : Caractérisation des applications affines via les barycentres
- ⇝ *Interprétation* : Conservation des barycentres

C. *Classification des figures* Les actions de groupes (et en particulier dans cette géométrie), nous permettent de classer les figures selon leurs orbites. Généralement ce sont de bons outils pour faire des preuves sur des objets géométriques : avec une action bien choisie on se ramène à un cas "facile". Cette action doit préserver les propriétés de notre théorème.

Figures issues des triplets de $\mathbb{R}^2$ [22, p.331]

- ⇝ *Proposition* : Action du groupe affine sur les triplets
- ⇝ *Application* : Ellipse de Steiner

Figures issues des sous-espaces affines [9, p.14]

- ⇝ *Proposition* [49, p.49] : Action du groupe affine sur les droites (ou couple de droites)
- ⇝ *Définition* : Droites parallèles
- ⇝ *Interprétation* : Préservation du parallélisme

Figures issues d'un espace affine de dimension $d \geq 2$, $\mathcal{E}$ [49, p.57]

- ⇝ *Proposition* : Action du groupe affine sur $\mathcal{E}^2$
- ⇝ *Définition* : Rapport de trois points
- ⇝ *Application* [18, p.13] : Théorème de Thalès

III. Géométrie affine euclidienne La géométrie euclidienne (en particulier l'affine) consiste à l'étude du groupe des isométries opérant sur $\mathcal{E}$ (en tant qu'espace affine euclidien)

A. *Espace affine euclidien et groupe des isométries*

- ⇝ *Définition* [18, p.108] : Espace affine euclidien
- ⇝ *Définition* [9, p.52] : Isométrie

⇝ *Définition* [49, p.26] : Groupe des isométrie

⇝ *Proposition* [49, p.25] : Caractérisation d'une isométrie

B. *Générateurs du groupe des isométries [9, p.54]* Les générateurs de ce groupe nous permet de caractériser les isométries.

⇝ *Définition* : Réflexion

⇝ *Corollaire* : Générateurs : réflexions

⇝ *Théorème* : Isométrie est n réflexions

⇝ *Application* [9, p.86] : Caractérisation des isométries

C. *Invariant pour le groupe des isométrie (en dimension 2) [18, p.116]* Les angles orientés sont les premiers invariants non-triviaux que l'on trouve en géométrie : ils sont bien plus intéressant que les invariants affines.

⇝ *Définition* [9, p.58] : Isométrie positive

⇝ *Interprétation* : Invariant du groupe des isométries

⇝ *Remarque* : Angle orienté de demi-droite

⇝ *Application* : Somme des angles d'un triangle

⇝ *Définition* : Angle orienté

⇝ *Application* : Rotation matricielle

⇝ *Définition* : Mesure

D. *Stabilisateurs par le groupe des isométries (en dimension 2 et 3) [22, p.358]* Les figures géométriques sont en réalité des stabilisateurs pour l'action décrivant cette géométrie. Nous allons donc les étudier sous cet angle.

⇝ *Définition* [9, p.156] : Polygone connexe

⇝ *Définition* : Groupe diédral

⇝ *Proposition* [9, p.165] : Préservation par le groupe diédral

⇝ *Définition* : Solide platonicien

⇝ *Théorème* (ADMIS) : Existence de tel solide

⇝ *Définition* : Groupe des isométries sur une partie

⇝ *Théorème* : Groupe des isométries du tétraèdre

⇝ *Théorème* : Groupe des isométrie du cube

⇝ *Application* : Coloriage du cube

IV. Géométrie projective

La géométrie projective est une géométrie plus complexe puisqu'elle permet d'étudier la sphère de Riemman : toute droite est concurrente à l'infini. Cependant elle résulte elle aussi d'une action de groupe.

A. *Espace projectif et groupe projectif [9, p.179]* On définit le groupe projectif comme étant l'ensemble des homographie. L'action de ce groupe sur une partie du plan complexe (le demi-plan de Poincaré) nous donne les générateur d'un groupe de matrice : $SL_2(\mathbb{Z})$

⇝ *Définition* [49, p.30] : Espace projectif

⇝ *Définition* : Groupe projectif

⇝ *Théorème* : Théorème de Pappus

⇝ *Définition* : Homographie

⇝ *Interprétation* : Espace projectif = droite vectorielle

⇝ *Théorème* [1, p.81] : Action du groupe projectif sur le demi-plan de Poincaré

⇝ *Application* [1, p.81] : Générateurs de $SL_2(\mathbb{Z})$

B. *Invariant du groupe projectif [9, p.196]* L'invariant de ce groupe est le birapport : on s'en sert pour caractériser des groupes de points. Il nous permet d'étudier les générateurs du groupe circulaire.

⇝ *Définition* : Birapport

⇝ *Proposition* : Calcul du birapport

⇝ *Proposition* : Birapport invariant du groupe projectif

⇝ *Proposition* : Alternative de Steiner.

C. *Groupe circulaire [9, p.203]* On conclut par une étude des générateurs de ce groupe particulier.

⇝ *Définition* : Groupe circulaire

⇝ *Théorème* : Générateurs

⇝ *Lemme* : Caractérisation des angles de droites

Leçon 190 : Dénombrement et méthode combinatoires.

Références pour la leçon

[14] Berhuy, *Algèbre : le grand combat.*
[17] Biasi, *Mathématiques pour le capes et l'agrégation interne.*
[22] Caldero et Germoni, *Histoires hédonistes de groupes et de géométries, tome 1.*
[23] Caldero et Germoni, *Histoires hédonistes de groupes et de géométries, tome 2.*
[33] Francinou, Gianella et Nicolas, *Oraux X-ENS. Algèbre tome 1.*
[56] Perrin, *Cours d'algèbre.*

Développements de la leçon

Coloration du cube — Nombre de Bell

Motivation

Défense

- *Pourquoi dénombrer ?* L'utilisation du dénombrement en probabilité. Permet d'avoir des arguments de cardinalité. En informatique vient prouver qu'il existe des fonctions non calculables.
- *Pourquoi ce limité au fini ?* On sait bien (très bien) calculer le fini, c'est naturel. De plus, quand un ensemble est infini, on essaye toujours de s'y ramener.
- *Qu'est-ce que le dénombrement ?* Calculer le nombre d'éléments qui vérifient une certaine propriété.
- Alors comment dénombrer ?

Ce qu'en dit le jury

Il est nécessaire de dégager clairement différentes méthodes de dénombrement et de les illustrer d'exemples significatifs. De nombreux domaines de mathématiques sont concernés par des problèmes de dénombrement, cet aspect varié du thème de la leçon doit être mis en avant. L'utilisation de séries génératrices est un outil puissant pour le calcul de certains cardinaux. De plus, il est naturel de calculer des cardinaux classiques et certaines probabilités. Il est important de connaître l'interprétation ensembliste de la somme des coefficients binomiaux et ne pas se contenter d'une justification par le binôme de Newton. L'introduction des corps finis (même en se limitant aux cardinaux premiers) permet de créer un lien avec l'algèbre linéaire. Les actions de groupes peuvent également conduire à des résultats remarquables.

S'ils le désirent, les candidats peuvent aussi présenter des applications de la formule d'inversion de Möebius ou de la formule de Burnside. Des candidats ayant un bagage probabiliste pourront explorer le champ des permutations aléatoires, en présentant des algorithmes pour générer la loi uniforme sur le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ et analyser certaines propriétés de cette loi uniforme (points fixes, cycles, limite $n \to \infty$...).

Métaplan

I. Compter directement le nombre d'éléments [17, p.9]

Pour dénombrer une manière intuitive consistant à compter les éléments peut s'avérer efficace. Nous allons étudier comment faciliter ces calculs

- ⇝ *Définition* : Ensemble fini
- ⇝ *Définition* : Cardinal d'un ensemble
- ⇝ *Notation* : $|\ |$

A. *Diviser pour régner*

Savoir découper les ensembles de manière à simplifier les calculs peut s'avérer utilise (utilisation des sommes et des produits). L'utilisation d'applications permettent également de faciliter le dénombrement.

Partitionner un ensemble

- ⇝ *Proposition* : Cardinal d'un ensemble partitionner
- ⇝ *Proposition* : Cardinal d'un ensemble de paire
- ⇝ *Application* : Division de deux ensembles
- ⇝ *Application* : Union de deux ensembles
- ⇝ *Application* : Produit de deux ensembles
- ⇝ *Proposition* : Formule du crible de Poincaré
- ⇝ *Remarque* : On retombe sur le résultat précédent
- ⇝ *Corollaire* : Lemme des Berger
- ⇝ *Application* : Nombre de carrés dans $\mathbb{F}_q$

Ensemble issu d'un produit d'ensemble

- ⇝ *Définition* : Produit d'ensembles
- ⇝ *Proposition* : Cardinal d'un produit d'ensemble
- ⇝ *Application* : Nombre d'application
- ⇝ *Application* : Nombre de parties d'un ensemble fini

Utilisation d'application

- ⇝ *Proposition* : Nombre d'application injective
- ⇝ *Application* : $|\mathfrak{S}_n| = n!$
- ⇝ *Lemme* : Lemme des tiroirs
- ⇝ *Application* : Théorème de Weierstrass dans le cas réel

B. *Ordonner les éléments*

Lorsqu'on souhaite dénombrer un ensemble composée de suite, ordonner ou non celui-ci peut en changer son calcul et son cardinal. Nous allons étudier les possibilité d'ordonnancement et le calcul des cardinaux des ensembles ainsi obtenu.

- ⇝ *Définition* : Arrangement
- ⇝ *Proposition* : Calcul du nombre d'arrangement
- ⇝ *Application* : Tiercé dans l'ordre
- ⇝ *Définition* : Permutation
- ⇝ *Définition* : Combinaison
- ⇝ *Remarque* : Cas particulier d'un arrangement
- ⇝ *Proposition* : Calcul du nombre de combinaison
- ⇝ *Application* : Nombre de tiercé dans le désordre
- ⇝ *Proposition* : Coefficient binomiaux
- ⇝ *Application* : Triangle de Pascal
- ⇝ *Application* : Formule du binôme
- ⇝ *Application* : Loi binomiale

C. *Compter de deux manière différente*

Pour dénombrer un ensemble, le compter de deux manière différente puis d'en déduire son cardinal grâce à l'équation obtenue est une méthode efficace.

- ⇝ *Principe* : Double comptage
- ⇝ *Application* [22, p.182] : Loi de réciprocité quadratique
- ⇝ *Remarque* : Preuve de la formule de Burnside

II. Utilisation de la théorie des groupes

La théorie des groupes (fini) et notamment les actions de groupes nous permettent d'obtenir des résultats de dénombrement. Les corps finis sont également sources de nombreux problème de dénombrement.

A. *Action de groupe [14, p.174]* Nous étudions les actions de groupes (finis) sur un ensemble (fini) afin de pouvoir en faire du dénombrement.

- ⇝ *Définition* : Action, orbite et stabilisateur
- ⇝ *Définition* : Relation orbite - stabilisateur
- ⇝ *Proposition* : Formule des classes
- ⇝ *Application* : Théorème de Lagrange
- ⇝ *Proposition* : Formule de Burnside
- ⇝ *Application* : Coloriage d'un cube

B. *Application aux corps finis [22, p.250]* Les corps finis nous donne une bonne application du dénombrement en algèbre linéaire. En algèbre linéaire, les ensembles mis en jeu sont souvent infini. Pour palier à cette infinité, nous avons introduit la notion de base, cela nous ramène au cas fini dans un certain sens (on n'en parle pas dans cette leçon).

- ⇝ *Définition* : Corps fini
- ⇝ *Application* : Application aux actions de groupes
- ⇝ *Application* : Calcul $|GL_n(\mathbb{F}_q)|$
- ⇝ *Application* [23, p.213] : Calcul du cardinal du cône nilpotent
- ⇝ *Application* : Calcul du nombre de matrice diagonalisable
- ⇝ *Théorème* : Premier théorème d'isomorphisme
- ⇝ *Application* : Calcul de $|SL_n(\mathbb{F}_q)|$ via $|GL_n(\mathbb{F}_q)|$

III. Utilisation des séries génératrices

Les séries génératrices sont également un moyen de dénombrer un ensemble.

- ⇝ *Définition* : Série génératrice
- ⇝ *Application* [33, p.19] : Nombre d'involution
- ⇝ *Application* [33, p.12] : Nombre de Catalan
- ⇝ *Application* [33, p.14] : Nombre de Bell

IV. Utilisation des fonctions arithmétiques

Les fonctions arithmétiques représente souvent un cardinal d'un ensemble suivant quelques propriétés.

A. *Fonction indicatrice d'Euler [56, p.24]* La fonction indicatrice d'Euler donne le nombre d'entier premier avec n compris entre 1 et $n-1$.

- ⇝ *Définition* : Fonction indicatrice φ
- ⇝ *Proposition* : Calcul de la fonction φ
- ⇝ Interprétation
- ⇝ *Proposition* : Multiplicativité
- ⇝ *Proposition* : $\varphi(n) = \sum_{d|n} \varphi(d)$
- ⇝ *Application* : Groupe des inversible est cyclique

B. *Fonction de Moebius [56, p.89]* La fonction de Moebius est une fonction calculant si un nombre contient un facteur carré et dans le cas où elle est sans facteur carré, elle donne la parité du nombre de ces facteurs premiers.

- ⇝ *Définition* : Fonction de Moebius μ
- ⇝ *Proposition* : Propriétés
- ⇝ *Proposition* : Inversion
- ⇝ *Application* : Retrouver propriété de Euler
- ⇝ *Application* : Nombre de polynômes irréductibles sur $\mathbb{F}_q$

Deuxième partie

Leçons d'analyse

Leçon 203 : Utilisation de la notion de compacité.

Références pour la leçon

[39] Gourdon, *Analyse.*
[44] Hauchecorne, *Les contre-exemples en mathématiques.*
[53] Nourdin, *Agrégation mathématiques épreuve orale.*
[60] Saint Raymond, *Topologie, calcul différentiel et variable complexe.*
[63] Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation.*
[65] Testard, *Analyse mathématiques. Maîtrise de l'implicite.*
[66] Teytaud, Antonini, Borgnat, Chateau et Lebeau, *Les maths pour l'agreg.*

Développements de la leçon

Théorème de Weierstrass via la convolution

Théorème de Cauchy – Lipschitz

Motivation

Défense

— Notion topologique importante dans le cas métrique.

— Permet de ramener des raisonnements de type fini sur des ensembles infinis.

— Permet de passer certaines propriétés du local au global, c'est-à-dire qu'une propriété vraie au voisinage de chaque point devient valable de façon uniforme sur tout le compact.

— Donne quelques résultats d'existences.

Ce qu'en dit le jury

Il est important de ne pas concentrer la leçon sur la compacité en général et d'éviter la confusion entre utilisation de la notion compacité et notion de compacité. Le jury recommande vivement de rester en priorité dans le cadre métrique. Néanmoins, on attend des candidats d'avoir une vision synthétique de la compacité. Des exemples d'applications comme le théorème de Heine et le théorème de Rolle doivent y figurer et leur démonstration être connue. Par ailleurs, le candidat doit savoir quand la boule unité d'un espace vectoriel normé est compacte.

Des exemples significatifs d'utilisation comme le théorème de Stone-Weierstrass (version qui utilise la compacité), des théorèmes de point fixe, voire l'étude qualitative d'équations différentielles, sont tout à fait envisageables. Le rôle de la compacité pour des problèmes d'existence d'extrema mériterait d'être davantage étudié. On peut penser ensuite à des exemples en dimension $n \geq 2$.

Pour aller plus loin, les familles normales de fonctions holomorphes fournissent des exemples fondamentaux d'utilisation de la compacité. Les opérateurs auto-adjoints compacts sur un espace de Hilbert relèvent également de cette leçon, et on pourra développer l'analyse de leurs propriétés spectrales.

Métaplan

Cadre : E est un espace métrique

I. Rappel sur la notion de compacité et premières applications Cette section a pour but de poser les premières définitions de la compacité ainsi que ces première propriétés. Nous en donnons également quelques applications rapide : elle n'a pas vocation à être le coeur de la leçon.

A. *Propriété de Borel–Lebesgue [60, p.33]* Une première caractérisation de la compacité se fait par la propriété de Borel–Lebesgue. Nous donnons quelques caractérisations de compacts qui en découle directement.

- ⇝ *Définition* : Recouvrement ⇝ *Définition* : Espace compact
- ⇝ *Exemple* [39, p.27] : $[0, 1]$
- ⇝ *Contre-exemple* [44, p.302] : Espace vérifiant la propriété et non compact
- ⇝ *Remarque* : Cas non métrique
- ⇝ *Application* : Ensemble des valeurs d'une suite et limite : compact
- ⇝ *Proposition* [66, p.229] : Compact implique borné
- ⇝ *Application* [39, p.27] : Utilisation de la contraposé comme caractérisation
- ⇝ *Proposition* [39, p.28] : Réunion finie : compacte ⇝ *Application* : Ensemble fini est compact

B. *Caractérisation séquentielle de la compacité [39, p.28]* La propriété de Borel–Lebesgue est équivalente à la caractérisation séquentielle dans le cas métrique : c'est ce que nous appelons le théorème de Bolzano-Weierstrass. Ce point de vu nous donne de nouvelles applications.

- ⇝ *Théorème* : Bolzano–Weierstrass ⇝ *Application* : Caractérisation de limite via l'exponentielle
- ⇝ *Remarque* : Cas des espaces non métrique ⇝ *Proposition* : Unicité de la valeur d'adhérence
- ⇝ *Application* [53, p.8] : Convergence en loi de variables gaussiennes
- ⇝ *Théorème* : Théorème de Tychonoff (dénombrable)
- ⇝ *Remarque* : Le théorème est vrai dans le cas non-dénombrable
- ⇝ *Application* : Compacts dans $\mathbb{R}^n$

C. *Caractérisation par les fermés [60, p.34]* La propriété de Borel–Lebesgue possède une propriété dual permettant de caractériser les espaces compacts grâce à des fermés.

- ⇝ *Théorème* : Caractérisation par les fermés
- ⇝ *Théorème* : Sous-espace fermé d'un compact est compact
- ⇝ *Théorème* : Compact sont fermés ⇝ *Contre-exemple* [44, p.302] : Compact non fermé
- ⇝ *Application* [66, p.229] : $O_n(\mathbb{R})$ et $SO_n(\mathbb{R})$ sont compacts
- ⇝ *Théorème* : Surjectivité des applications ⇝ *Application* : Compacts dans $\mathbb{R}$

II. La compacité : une vue globale de ce qui est local La compacité permet d'adopter un point de vu fini sur un ensemble infini. Elle permet donc de transformée des propriétés locales propriétés globales

A. *Continuité uniforme* La continuité uniforme (consistant à l'inversion des bons quantificateurs) transforme la notion de continuité qui est locale en une notion globale.

- ⇝ *Définition* [60, p.28] : Continuité uniforme ⇝ *Théorème* [60, p.43] : Théorème de Heine

- ⇝ *Application* : Approximation de fonctions continues par des suites de fonctions affines
- ⇝ *Théorème* [53, p.8] : Deuxième théorème de Dini
- ⇝ *Application* [53, p.8] : Théorème de Glivenko–Cantelli

B. *Approximation de fonctions continues sur un compact [53, p.8]* L'approximation de fonction permet de donner des propriétés de régularité à une fonction.

- ⇝ *Théorème* : Premier théorème de Dini
- ⇝ *Application* : Approximation uniforme via des polynômes : $t \mapsto \sqrt{t}$ sur $[0, 1]$
- ⇝ *Définition* [39, p.284] : Approximation de l'unité
- ⇝ *Théorème* [39, p.284] : Théorème de Weierstrass ⇝ *Application* : Théorème de Féjer

III. Compacité et problème d'existences

La compacité permet d'exhiber des problèmes d'existences.

A. *Recherche d'extremum [60, p.42]* La recherche d'extremum sur un compact est plus facile car nous avons la garantie de l'existence de cet extremum.

- ⇝ *Théorème* : Image d'un compact est un compact
- ⇝ *Application* : Continue sur compact atteint ses bornes ⇝ *Application* : Cas réel
- ⇝ *Proposition* [60, p.156] : Théorème de Rolle
- ⇝ *Proposition* [60, p.156] : Théorème des accroissements finis
- ⇝ *Proposition* [65, p.44] : Équivalence des normes ⇝ *Application* [60, p.99] : Théorème de Riesz
- ⇝ *Application* : Caractérisation des compacts ⇝ *Définition* [65, p.44] : Fonction coersive
- ⇝ *Proposition* [65, p.44] : Borne d'une telle fonction
- ⇝ *Application* [65, p.44] : Théorème de d'Alembert

B. *Résolution des équations différentielles* La compacité nous permet de résoudre des équations différentielles.

- ⇝ *Théorème* [60, p.56] : Espace de fonction continue sur un compact est un Banach
- ⇝ *Application* [63, p.180] : Théorème de Cauchy–Lipschitz ⇝ *Exemple* : Problème de Cauchy
- ⇝ *Théorème* [60, p.83] : Théorème d'Ascoli ⇝ *Application* : Théorème de Cauchy–Peano

Leçon 208 : Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

Références pour la leçon

[13] Beck, Malik et Peyre, *Objectif agrégation.*
[39] Gourdon, *Analyse.*
[44] Hauchecorne, *Les contre-exemples en mathématiques.*
[63] Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation.*

Développements de la leçon

Méthode de Kackmarz | Théorème de Cauchy – Lipschitz

Motivation

Défense

- Les espaces vectoriels normés :
  - propriétés géométriques qui se ramène à l'algèbre linéaire en dimension finie pour des espaces de dimension infinie.
  - résolution d'équations différentielles.
  - analyse numérique : résolution de systèmes linéaires.
- Les espaces de Banach : convergence des suites (sans connaître la limite), résolution numérique.
- Les espaces de Hilbert : apporte une base, proche de $\mathbb{R}^n$.

Ce qu'en dit le jury

Le jury rappelle qu'une telle leçon doit contenir beaucoup d'illustrations et d'exemples, notamment avec quelques calculs élémentaires de normes subordonnées (notion qui met en difficulté un trop grand nombre de candidats). Le lien avec la convergence des suites du type $X_{n+1} = AX_n$ doit être connu (et éventuellement illustré, sans que cela puisse être mis au cœur de la leçon, de considérations d'analyse numérique matricielle). Lors du choix de ces exemples, le candidat veillera à ne pas mentionner des exemples pour lesquels il n'a aucune idée de leur pertinence et à ne pas se lancer dans des développements trop sophistiqués.

La justification de la compacité de la boule unité en dimension finie doit être maîtrisée. Il faut savoir énoncer le théorème de Riesz sur la compacité de la boule unité fermée d'un espace vectoriel normé. Le théorème d'équivalence des normes en dimension finie, ou le caractère fermé de tout sous-espace de dimension finie d'un espace normé, sont des résultats fondamentaux à propos desquels les candidats doivent se garder des cercles vicieux. Des exemples d'espaces vectoriels normés de dimension infinie ont leur place dans cette leçon et il faut connaître quelques exemples de normes usuelles non équivalentes, notamment sur des espaces de suites ou des espaces de fonctions et également d'applications linéaires qui ne sont pas continues. On peut aussi illustrer le théorème de Riesz sur des exemples simples dans le cas des espaces classiques de dimension infinie.

Les espaces de Hilbert ont également leur place dans cette leçon, mais le jury met en garde contre l'écueil de trop s'éloigner du cœur du sujet.

Métaplan

Cadre : E est un $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

I. Un espace vectoriel normé [39, p.47] Les espaces vectoriels normés sont des espaces vectoriels muni d'une norme. Après avoir rappelé la notion de norme, nous allons l'utiliser pour étudier les applications continues et le cas de la dimension finie. Les espaces vectoriels normés sont utiles dans la résolution d'équation différentielles (comme avec le théorème de Cauchy–Lipschitz) ou encore dans la résolution de système matricielle.

A. *Norme* La norme est un objet topologique qui apporte quelques propriétés aux espaces vectoriels normés.

- ⇝ *Définition* [39, p.7] : Norme et espace vectoriel normé
- ⇝ *Contre-exemple* [44, p.318] : Nécessité des trois axiomes
- ⇝ *Remarque* : Lien avec la distance
- ⇝ *Remarque* : Interprétation sur la topologie
- ⇝ *Contre-exemple* [44, p.320] : Normes
- ⇝ *Définition* : Normes équivalentes
- ⇝ *Contre-exemple* [44, p.320] : Norme plus fine
- ⇝ *Proposition* : Caractérisation de l'équivalence incomparables

B. *Application linéaire continue* Les applications linéaires et leur continuité donne la construction d'une algèbre qui permet d'étudier la résolution matricielle.

- ⇝ *Définition* : Application linéaire continue
- ⇝ *Application* : Norme est continue
- ⇝ *Remarque* : Dépendance à la norme choisie
- ⇝ *Définition* : Norme subordonnée
- ⇝ *Proposition* : Sous-multiplicativité
- ⇝ *Application* : Méthode de Kaczmarz
- ⇝ *Théorème* : Caractérisation de la continuité
- ⇝ *Exemple* : Applications continues selon des normes
- ⇝ *Contre-exemple* : Discontinue
- ⇝ *Définition* : $\mathcal{L}_C(E, F)$ (evn)
- ⇝ *Proposition* : Caractérisation de la limite
- ⇝ *Application* : Résolution matricielle et conditionnement

C. *Cas de la dimension finie* Dans le cas de la dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. Ce résultat nous donne quelques applications propres aux espaces de dimension fini.

- ⇝ *Théorème* : Équivalence des normes
- ⇝ *Proposition* : Caractérisation des compacts
- ⇝ *Corollaire* : Sous-espace vectoriel est fermé
- ⇝ *Théorème* : Théorème de Riesz
- ⇝ *Contre-exemple* : Dans le cas de la dimension infinie
- ⇝ *Proposition* : Continuité des applications linéaires

II. Espace de Banach Les espaces de Banach sont des espaces pour lesquels ont ajoute la complétude. Cela nous assure de l'existence de limite pour les suites sans nécessairement la connaître. Ce sont des espaces pratiques pour la résolution numérique car nous connaissons l'existence d'une limite.

A. *Définition et premières propriétés [63, p.8]*

- ⇝ *Définition* : Espace complet
- ⇝ *Définition* : Espace de Banach
- ⇝ *Exemple* : Espace vectoriel de dimension finie
- ⇝ *Contre-exemple* : Espace vectoriel normé non Banach pour une norme
- ⇝ *Contre-exemple* : Espace vectoriel normé jamais Banach
- ⇝ *Application* : Théorème de Cauchy–Lipschitz
- ⇝ *Proposition* [39, p.48] : Caractérisation de $\mathcal{L}_c(E, F)$ Banach
- ⇝ Conséquence
- ⇝ *Théorème* : Convergence des séries
- ⇝ *Application* : Résolution matricielle
- ⇝ *Application* : $GL_c(E)$ ouvert de $\mathcal{L}_c(E)$

B. *Lemme de Baire et applications [39, p.396]* Le lemme de Baire est un résultat important sur les espaces de Banach donnant quelques résultats surprenant de l'analyse.

- ⇝ *Lemme* : Lemme de Baire
- ⇝ *Application* : Application ouverte
- ⇝ *Application* : Théorème d'isomorphisme de Banach
- ⇝ *Application* : Théorème de Banach-Steinhaus
- ⇝ *Application* : Fonction continue différente de sa série de Fourier
- ⇝ *Application* : Densité des fonctions non continues

III. Espace de Hilbert Un espace de Hilbert est un espace vectoriel normé (dont la norme est issue d'un produit scalaire) complet. Les espaces de Hilbert (même en dimension infinie) possède une base : on se rapproche donc du cas $\mathbb{R}^n$.

A. *Espace de Hilbert [13, p.91]*

- ⇝ *Définition* : Espace préhilbertien
- ⇝ *Exemple* : l^2 et L^2
- ⇝ *Proposition* : Inégalité de Cauchy–Schwartz
- ⇝ *Conséquence* : Produit scalaire donne norme
- ⇝ *Définition* : Espace de Hilbert
- ⇝ *Définition* : Élément orthogonaux
- ⇝ *Application* : Pythagore
- ⇝ *Proposition* : Identité du parallélogramme

B. *Projection sur un convexe fermé [39, p.407]*

- ⇝ *Théorème* : Théorème de projection sur un convexe fermé
- ⇝ *Application* [63, p.384] : Moindre carré
- ⇝ *Application* : Représentation de Riesz

Leçon 214 : Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et application en analyse et en géométrie.

Références pour la leçon

[10] Avez, *Calcul différentiel.*
[13] Beck, Malik et Peyre, *Objectif agrégation.*
[39] Gourdon, *Analyse.*
[51] Marco, Thieullen et Weil, *Mathématiques pour la L2.*
[52] Mneimne et Testard, *Introduction à la théorie des groupes de Lie classique.*
[63] Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation.*
[69] Zavidovique, *Un max de maths.*

Développements de la leçon

Surjectivité de l'exponentielle — Théorème des extremums liés

Motivation

Défense

— Grande idée du calcul différentiel : approchée une application (quelconque) par une application linéaire.
— Application : Résoudre des systèmes d'équations via des systèmes linéaires.
— Interprétation géométrique qui permet de clarifier la notion de courbe

Ce qu'en dit le jury

Il s'agit d'une leçon qui exige une bonne maîtrise du calcul différentiel. Même si le candidat ne propose pas ces thèmes en développement, on est en droit d'attendre de lui des idées de démonstration des deux théorèmes fondamentaux qui donnent son intitulé à la leçon. Il est indispensable de savoir mettre en pratique le théorème des fonctions implicites au moins dans le cas de deux variables réelles. On attend des applications en géométrie différentielle notamment dans la formalisation de la méthode des multiplicateurs de Lagrange. En ce qui concerne la preuve du théorème des extrema liés, la présentation de la preuve par raisonnement « sous-matriciel » est souvent obscure ; on privilégiera si possible une présentation géométrique s'appuyant sur l'espace tangent. Plusieurs inégalités classiques de l'analyse peuvent se démontrer avec ce point de vue : arithmético-géométrique, Hölder, Carleman, Hadamard,...

Pour aller plus loin, l'introduction des sous-variétés est naturelle dans cette leçon. Il s'agit aussi d'agrémenter cette leçon d'exemples et d'applications en géométrie, sur les courbes et les surfaces.

Métaplan

Introduction [51, p.707] Pendant toute cette leçon nous décidons de rester en dimension finie. Cependant, il est important de garder en tête que la majorité des résultats s'étendent sur des Banach (donc en dimension infinie). Quelques résultats peuvent de déduire du cadre des Banach comme le théorème de l'application ouverte ou par le résultat sur la perturbation de l'identité dans un Banach.

- ⇝ *Cadre* : On reste en dimension finie : $n, p, k \in \mathbb{N}^*$
- ⇝ *Définition* : $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme
- ⇝ *Exemple* : $x \mapsto x^2$

I. Théorème d'inversion locale (TIL) Le théorème d'inversion locale tente d'étendre les propriétés d'inversion des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et des applications linéaires. On cherche alors à résoudre $y = f(x)$ en $x = f^{-1}(y)$.

A. *Quelques variantes de ce théorème [63, p.185]* Nous donnons quelques variantes de ce théorème (après avoir énoncé le cas classique $\mathcal{C}^1$) ainsi que quelque applications. Pour le cas $\mathcal{C}^k$, on n'est pas obligé de de réécrire tout le théorème. La version globale telle que nous l'énonçons (il en existe des versions plus forte) nous ait d'aucune utilité en pratique. On en donne cependant une applique qui est un cas particulier du théorème d'Hadamard–Lévy. L'hypothèse k-dilatante entraîne que f est propre et que $Df(x)$ est inversible en tout point.

- ⇝ *Théorème* : Variante $\mathcal{C}^1$ (Dessin)
- ⇝ *Interprétation* : Résolution d'équation
- ⇝ *Remarque* : Variante $\mathcal{C}^k$
- ⇝ *Exemple* [63, p.204] : Calcul pratique
- ⇝ *Contre-exemple* [63, p.204] : Fonction qui ne vérifient pas le théorème
- ⇝ *Théorème* : Variante globale
- ⇝ *Remarque* : En pratique revient à calculer l'inverse
- ⇝ *Contre-exemple* : Fonction non globale
- ⇝ *Application* [63, p.221] : Inversion globale
- ⇝ *Théorème* : Version holomorphe
- ⇝ *Remarque* : Aucune hypothèse sur la dérivée de f
- ⇝ *Application* [63, p.234] : Inverse d'une fonction holomorphe

B. *Application en analyse [63, p.190]* Le TIL possède de nombreuses applications, notamment en analyse. Nous allons en présenter quelques une. Le théorème de changement de coordonnées est une simple reformulation du théorème d'inversion locale. Noue en déduisons un corollaire qui est une généralisation du théorème de la base incomplète en algèbre linéaire. On peut ainsi simplifier un problème en changeant les coordonnées de fonctions qui y jouent un rôle important (résolution d'équations aux dérivées partielles).

- ⇝ *Théorème* : Changement de coordonnées
- ⇝ *Exemple* [63, p.71] : Coordonnées polaires
- ⇝ *Corollaire* : Base incomplète pour les fonctions
- ⇝ *Proposition* [52] : La fonction exp est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme
- ⇝ *Proposition* [51, p.715] : Isométrie de $\mathbb{R}^n$
- ⇝ *Théorème* [63, p.330] : Lemme de Morse à deux variables
- ⇝ *Application* [63, p.341] : Étude locale d'une conique

C. *Application en algèbre et en géométrie* Le TIL possède de nombreuses applications, notamment en algèbre et en géométrie. La réduction des forme quadratique nous donne deux résultats essentielles : les formes quadratiques de même signature (donnée) forment un ouvert et les matrices symétriques assez proche de l'identité admettent une racine carrée symétrique. Le TIL transforme un système quelconque (de classe $\mathcal{C}^1$) de deux équations à deux inconnues se discute comme un système linéaire de rang le rang de la matrice jacobienne.

- ⇝ *Théorème* : Théorème de D'Alembert–Gauss
- ⇝ *Proposition* : Simplicité de $SO_n(\mathbb{R})$

- ⇝ *Proposition* [63, p.209] : Réduction des formes quadratiques
- ⇝ *Application* [63, p.354] : Lemme de Morse
- ⇝ *Application* [63, p.211] : Résolution de système d'équation
- ⇝ *Théorème* [69, p.48] : Surjectivité de l'exponentielle de matrice
- ⇝ *Application* : $GL_n(\mathbb{C})$ n'a pas de sous-groupe arbitrairement petit

II. Théorème des fonctions implicites

Le théorème des fonctions implicites cherche à résoudre l'équation suivante : $f(x, y) = 0$ en exprimant y comme une fonction en c, soit $y = \varphi(x)$.

A. *Quelques variantes de ce théorème [63, p.192]*

- ⇝ *Théorème* : Version Ck^1 (Dessin)
- ⇝ *Remarque* : Version Ck^k
- ⇝ *Remarque* : Calcul explicite
- ⇝ *Exemple* [63, p.237] : Calcul
- ⇝ *Remarque* : Historique et équivalence aux autres théorèmes

B. *Applications de ce théorème*

Le théorème des fonctions implicites joue un rôle important en physique. Il permet de résoudre des équations en approximant les solutions. Mais il est également à l'origine de la théorie de la relativité générale ainsi que l'excentricité de Kepler.

- ⇝ *Théorème* [13, p.12] : Polynômes scindé
- ⇝ *Corollaire* : Les polynômes scindés sur $\mathbb{C}$ est un ouvert
- ⇝ *Application* [63, p.240] : Calcul de racines
- ⇝ *Application* [63, p.245] : Développement asymptotiques
- ⇝ *Remarque* : Application en physique : relativité générale (Kepler)

III. Sous-variétés

Le concept de sous-variété permet de clarifier la notion de courbe et de surface. Les sous-variétés sont une notion permettant d'uniformiser la théorie autours des objets appelés surface (parabole, ellipse, cylindre, tore, . . .). Elle se concentre sur l'aspect local des sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$: ce sont des sous-espaces affines propres qui ont été transformés.

A. *Sous-variété et espaces tangents [63, p.196]*

- ⇝ *Définition* : Sous-variétés
- ⇝ *Théorème* : Caractérisation des sous-variétés
- ⇝ *Définition* : Espace tangent
- ⇝ *Remarque* : Espace tangent affine
- ⇝ *Théorème* : Caractérisation de l'espace tangent

B. *Théorème des extremum liés*

Le théorème des extremum liés est un théorème résolvant u problème d'extremum liés. Ceux-ci sont liés par une surface ou un courbe (en réalité une sous-variété) et on cherche un extremum pour ceux-ci.

- ⇝ *Théorème* [10, p.103] : Théorème des extremum liés
- ⇝ *Application* [39, p.319] : Inégalité arithmético-géométrique
- ⇝ *Application* [63, p.409] : Inégalité de Hadamard
- ⇝ *Application* : Inégalité de Hölder
- ⇝ *Application* : Diagonalisation symétriques

Leçon 219 : Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.

Références pour la leçon

[13] Beck, Malik et Peyre, *Objectif agrégation.*
[44] Hauchecorne, *Les contre-exemples en mathématiques.*
[63] Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation.*
[65] Testard, *Analyse mathématique. La maîtrise de l'implicite.*

Développements de la leçon

Théorème des extremums liés et inégalité d'Hadamard — Gradient à pas optimal

Motivation

Défense

- Les problèmes d'existences utilisent souvent la notion d'extremum.
- On cherche à savoir quels sont les éléments maximaux de notre fonction.
- En fonction de l'espace de départ et des propriétés de la fonction : plus ou moins facile.

Ce qu'en dit le jury

Comme souvent en analyse, il est tout à fait opportun d'illustrer dans cette leçon un exemple ou un raisonnement à l'aide d'un dessin. Il faut savoir faire la distinction entre propriétés locales (caractérisation d'un extremum local) et globales (existence par compacité, par exemple). Dans le cas important des fonctions convexes, un minimum local est également global. Les applications de la minimisation des fonctions convexes sont nombreuses et elles peuvent illustrer cette leçon.

L'étude des algorithmes de recherche d'extremums y a toute sa place : méthode du gradient et analyse de sa convergence, méthode à pas optimal,... Le cas particulier des fonctionnelles sur $\mathbb{R}^n$ de la forme $\frac{1}{2}(Ax|x) - (b|x)$, où A est une matrice symétrique définie positive, ne devrait pas poser de difficultés (la coercivité de la fonctionnelle pose problème à de nombreux candidats). Les problèmes de minimisation sous contrainte amènent à faire le lien avec les extrema liés et la notion de multiplicateur de Lagrange. Sur ce point, certains candidats ne font malheureusement pas la différence entre recherche d'extremums sur un ouvert ou sur un fermé. Une preuve géométrique des extrema liés sera fortement valorisée par rapport à une preuve algébrique, formelle et souvent mal maîtrisée. On peut ensuite mettre en œuvre ce théorème en justifiant une inégalité classique : arithmético-géométrique, Hölder, Carleman, etc... Enfin, la question de la résolution de l'équation d'Euler-Lagrange peut donner l'opportunité de mentionner la méthode de Newton.

Les candidats pourraient aussi être amenés à évoquer les problèmes de type moindres carrés, ou, dans un autre registre, le principe du maximum et des applications.

Métaplan

I. Problème d'extremum [63, p.370] Nous commençons par fixer le cadre de notre leçon : nous nous plaçons sur un espace vectoriel de dimension finie. De plus, nous étudions uniquement les fonctions continues. La différence entre un extremum local et global est à la portée de celui-ci : un extremum global est un champion du monde et un extremum local est un champion régional.

- ⇝ *Cadre* : Espace vectoriel de dimension finie (norme euclidienne)
- ⇝ *Cadre* : Fonction continue
- ⇝ *Définition* : Extremum
- ⇝ *Définition* : Extremum local
- ⇝ *Définition* : Extremum global
- ⇝ *Définition* : Extremum strict

II. Extremum et aspects topologiques [65, p.44] L'utilisation des notions topologiques nous permet de nous assurer de l'existence des extremums. Ces extremums sont globaux.

A. *Utilisation de la compacité* La compacité est une notion topologique qui nous assure l'existence d'un maximum et d'un minimum local.

- ⇝ *Proposition* : Image continue d'un compact
- ⇝ *Théorème* : Existence du minimum et du maximum
- ⇝ *Exemple* : Norme infinie sur boule unité
- ⇝ *Contre-exemple* [44, p.202] : Continuité
- ⇝ *Application* : Équivalence de normes

B. *Extremum sur un non-compact* Dans le cas d'un ensemble non-compact (et en particulier non borné), nous définissons les fonctions coersives qui nous donne l'existence.

- ⇝ *Principe* : Où sont les extremums ?
- ⇝ *Définition* : Distance d'une partie
- ⇝ *Définition* : Fonction coersive
- ⇝ *Interprétation* : Va à l'infini sur les bords
- ⇝ *Théorème* : Minimum d'une fonction coersive
- ⇝ *Application* : Théorème de d'Alembert
- ⇝ *Théorème* : Maximum d'une fonction tendant vers 0

III. Extremum et aspects différentiels [65, p.147] La notion de différentielle nous permet de faire une caractérisation locale des extremums. Cette caractérisation est local et dépend de la régularité des fonctions.

A. *Utilisation de la différentielle* À l'ordre un, on est uniquement capable de définir les points critiques (nous ne pouvons en donné la nature).

- ⇝ *Cadre* : f est $\mathcal{C}^1$
- ⇝ *Définition* : Points critiques
- ⇝ *Théorème* : Caractérisation via les points critiques
- ⇝ *Contre-exemple* : Réciproque
- ⇝ *Application* [65, p.77] : Théorème de Rolle

B. *Utilisation des différentielles secondes* À l'ordre deux, nous sommes capable d'identifier la nature des points critiques non dégénérés.

- ⇝ *Cadre* : f est $\mathcal{C}^1$
- ⇝ *Définition* : Points critiques non dégénérés
- ⇝ *Théorème* : Caractérisation via ces points critiques
- ⇝ *Remarque* : Lien avec valeurs propres
- ⇝ *Remarque* : Local
- ⇝ *Application* : Perpendiculaire communes
- ⇝ *Remarque* : Passer du local au global

C. *Méthode de recherche des extremums* Nous avons alors une méthode de recherche des extremums qui commence par l'application de la méthode de Newton.

- ⇝ *Méthode* : Étapes de la recherche
- ⇝ *Application* : Recherche de points critiques
- ⇝ *Théorème* [63, p.152] : Méthode de Newton

IV. Extremum sous contraintes [13, p.20] Nous cherchons les extremums sous contraintes qui peuvent être une courbe, une surface ou autrement. Une analogie : les extremums libres sur une montagne sont ses sommets, les extremums liées sont les cols de dans notre montagne.

- ⇝ *Théorème* : Extremums liées
- ⇝ *Application* : Inégalités
- ⇝ *Application* [63, p.372] : Inégalité de Hadamard
- ⇝ *Application* : Diagonalisation des endomorphismes symétriques

V. Extremum et apport de la convexité [65, p.245] La notion de convexité fait un lien entre global et local car les extremums locaux d'une fonction convexe sont globaux. Cette remarque va alors nous facilité notre recherche d'extremum

A. *Extremum et convexité*

- ⇝ *Définition* : Fonction convexe / concave
- ⇝ *Théorème* : Caractérisation des extremums
- ⇝ *Proposition* : Continuité / Lipschitz
- ⇝ *Remarque* : Local = global

B. *Recherche par méthode de descente* La connexité permet d'accéléré la recherche (pas d'extremums locaux, une convergence plus rapide). Cependant si les fonctions ne sont pas convexes ces méthodes s'appliquent quand même mais peuvent tomber dans des extremums locaux.

- ⇝ *Remarque* : Permet d'avoir une meilleure recherche
- ⇝ *Proposition* : Convergence de Newton
- ⇝ *Principe* : Méthode de descente
- ⇝ *Méthode* : Gradient à pas fixe
- ⇝ *Application* : Formes quadratiques
- ⇝ *Méthode* : Gradient à pas optimal
- ⇝ *Application* : Formes quadratiques
- ⇝ *Remarque* : Si non convexe

Leçon 220 : Équations différentielles $X' = f(t, X)$. Exemples d'étude des solutions en dimension 1 et 2.

Références pour la leçon

[30] Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles.*
[39] Gourdon, *Analyse.*
[57] Queffélec et Zuily, *Éléménts d'analyse pour l'agrégation.*
[63] Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation.*

Développements de la leçon

Théorème de Cauchy – Lipschitz	Nombre de zéros d'une équation

Motivation

Défense

- $XVII^{\text{ième}}$ siècle : apparition du calcul différentiel et intégrable (apporte une riche théorie mathématiques)
- Les équations différentielles apparaissent alors en géométrie ou en mécanique (applications)
- À leur début, pas de recherche d'existence ni d'unicité (on ne cherche qu'à les résoudre sans savoir si c'est possible).

Ce qu'en dit le jury

Une nouvelle fois, le jury s'alarme des nombreux défauts de maîtrise du théorème de Cauchy–Lipschitz et, plus généralement, de l'extrême faiblesse des connaissances sur les équations différentielles. Il est regrettable de voir des candidats ne connaître qu'un énoncé pour les fonctions globalement lipschitziennes ou, plus grave, mélanger les conditions sur la variable de temps et d'état. Les notions de solution maximale et de solution globale sont souvent confuses. Le théorème de sortie de tout compact est attendu. Bien évidemment, le jury attend des exemples d'équations différentielles non linéaires. Le lemme de Grönwall semble trouver toute sa place dans cette leçon mais est trop rarement énoncé. L'utilisation du théorème de Cauchy–Lipschitz doit pouvoir être mise en œuvre sur des exemples concrets. Les études qualitatives doivent être préparées et soignées.

Pour les équations autonomes, la notion de point d'équilibre permet des illustrations pertinentes comme par exemple les petites oscillations du pendule. Trop peu de candidats pensent à tracer et discuter des portraits de phase alors que l'intitulé de la leçon y invite clairement.

Il est possible d'évoquer les problématiques de l'approximation numérique dans cette leçon en présentant le point de vue du schéma d'Euler. On peut aller jusqu'à aborder la notion de problèmes raides et la conception de schémas implicites pour autant que le candidat ait une maîtrise convenable de ces questions.

Métaplan

Cadre : On se place en dimension finie dans $\mathbb{R}^m$.

I. Théorie des équations différentielles On se place dans un cadre très général pour donner la théorie des équations différentielles et notamment l'étude des solutions.

A. *Notions de solutions [30, p.125]* Lorsqu'on se donne une équation différentielle qu'appelle-t-on une solution ? Dans de nombreuses situations concrète, la variable t représente le temps et y représente les différents paramètres de l'état de notre système. Résoudre un problème de Cauchy revient à décrire l'état d'un système en fonction du temps à partir d'un temps et des configurations initiaux. Prendre un unique exemple de ces notions sur une équation différentielle que nous pouvons commenter à l'oral.

- $\rightsquigarrow$ *Définition* [39, p.353] : Solution
- $\rightsquigarrow$ *Remarque* [39, p.353] : On se ramène à l'ordre 1.
- $\rightsquigarrow$ *Cadre* : Équations que l'on cherche à résoudre
- $\rightsquigarrow$ *Définition* : Problème de Cauchy
- $\rightsquigarrow$ *Définition* : Prolongement des solutions
- $\rightsquigarrow$ *Définition* : Solution maximale
- $\rightsquigarrow$ *Théorème* : Existence d'une solution maximale
- $\rightsquigarrow$ *Définition* : Solution globale
- $\rightsquigarrow$ *Remarque* : Globale implique maximale mais pas réciproque
- $\rightsquigarrow$ *Contre-exemple* : $y' = y^2$ sur $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

B. *Existence et unicité des solutions [30, p.131]* Avant de se mettre à la recherche des solutions, nous voulons nous assurer qu'elles existent. C'est Cauchy qui est le premier à avoir formaliser l'existence de solution (la différence entre le local et le global apparaît à ce moment dans les mathématiques). Il existe une caractérisation via l'intégrale du problème de Cauchy, cependant cette caractérisation demande l'étude de la dite intégrale. On utilise donc des critère plus simples à manipuler. Le théorème de Cauchy–Peano nous garantissant l'existence des solutions pour des fonctions continues. Pour obtenir l'unicité nous devons avoir un caractère Lipschitz supplémentaire, ce qui nous donnes les théorèmes de Cauchy–Lipschitz local et global. On réfléchie des hypothèses des plus faibles aux plus fortes.

- $\rightsquigarrow$ *Lemme* : Caractérisation des solutions via l'intégrale
- $\rightsquigarrow$ *Définition* : Cylindre de sécurité
- $\rightsquigarrow$ *Théorème* : Théorème de Cauchy–Peano–Arzela
- $\rightsquigarrow$ *Corollaire* : Existence de solution maximale (interprétation)
- $\rightsquigarrow$ *Exemple* : $y' = |y|^{\frac{2}{3}}$
- $\rightsquigarrow$ *Définition* : Fonctions lipschitziennes
- $\rightsquigarrow$ *Théorème* : Cauchy–Lipschitz local
- $\rightsquigarrow$ *Exemple* : $y' = |y|^{\frac{2}{3}}$
- $\rightsquigarrow$ *Théorème* [63, p.170] : Cauchy-Lipschitz global
- $\rightsquigarrow$ *Exemple* [63, p.170] : Équation du pendule

C. *Propriétés des solutions [39, p.377]* Maintenant que nous sommes capables de savoir si une équation possède ou non des solutions, nous donnes quelques propriétés sur ces équations.

- $\rightsquigarrow$ *Théorème* [30, p.130] : Régularité des solutions
- $\rightsquigarrow$ *Théorème* : Lemme de Grönwall
- $\rightsquigarrow$ *Corollaire* : Lemme de Grönwall
- $\rightsquigarrow$ *Application* : Distance entre deux solutions
- $\rightsquigarrow$ *Théorème* : Sortie de tout compact
- $\rightsquigarrow$ *Application* : Champs de vecteurs complets

II. Résolution explicite et étude qualitative Maintenant que nous savons si une équation différentielle possède ou non une solution, nous souhaitons calculer cette solution. Dans certains cas la résolution est facile (cas des équations différentielles linéaires), mais dans la majorité des cas nous devons nous contenter d'une étude qualitative des solutions. Nous aurions également pû parler de calcul numérique des solutions par approximations successives (schéma d'Euler).

A. *Solutions des équations différentielles linéaires [30, p.201]* Les équations différentielles linéaires sont des équations pour lesquelles la résolution est simple. De nombreux résultats et méthodes nous permettent de résoudre ses équations. Attention, nous avons besoins de l'exponentielle de matrice.

- ⇝ *Proposition* : Espace des solutions et dimension
- ⇝ *Théorème* : Solution d'équations sans deuxième membre
- ⇝ *Application* [39, p.363] : Système linéaire en dimension 3
- ⇝ *Application* : Résolution de $y'' + 4y = \tan t$
- ⇝ *Théorème* : Solution générale
- ⇝ *Méthode* : Variation de la constante

B. *Équations remarquables [30, p.164]* Voici quelques exemples d'équations que nous sommes capables de résoudre explicitement : soit elles se ramène à des équations linéaires, soit elles utilisent des outils analytiques comme les séries entières.

- ⇝ Équation de Bernoulli
- ⇝ Équation de Bessel
- ⇝ Équation de Ricatti
- ⇝ Équation homogène

C. *Étude qualitative des solutions* Dans la majorité des cas, nous ne sommes pas capable de résoudre une équation différentielle. Nous réalisons alors une étude quantitative des solutions pour en connaître quelques propriétés. On cherche à connaître leur régularité, leur monotonie ou leur zéros.

- ⇝ *Principe*
- ⇝ *Exemple* : Équation du pendule
- ⇝ *Remarque* : Approximation des solutions
- ⇝ *Exemple* : Équation de Catho–Voltena
- ⇝ *Proposition* [39, p.378] : Solution de $y'' + qy = 0$ bornée
- ⇝ *Proposition* : Nombre de zéros de cette équation

III. Stabilité des systèmes autonomes Cette partie est également une étude qualitative des équations différentielles : on les étudie asymptotiquement afin de savoir si elles restent ou non dans un compact.

A. *Systèmes autonomes stables dans le cas linéaire [57, p.380]* Dans ce cas, c'est toujours plus facile.

- ⇝ *Définition* : Système stable (Dessin)
- ⇝ *Définition* : Système asymptotiquement stable (Dessin)
- ⇝ *Définition* : Système instable (Dessin)
- ⇝ *Théorème* : Stabilité dans le cas linéaire

B. *Étude de la stabilité dans le cas non linéaire [63, p.132]* Dans ce cadre cette étude est plus compliquée. Cependant, nous sommes capable de nous ramené à une système linéaire qui va conserver les mêmes caractéristiques de stabilité.

- ⇝ *Définition* : Système linéarisé
- ⇝ *Exemple* : Équation de Van der Pol pour $\epsilon > 0$
- ⇝ *Exemple* : Équation du pendule
- ⇝ *Théorème* : Théorème de Lyapunov
- ⇝ *Contre-exemple* :

Leçon 221 : Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

Références pour la leçon

[16] Berthelin, *Équations différentielles.*
[30] Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles.*
[39] Gourdon, *Analyse.*
[57] Queffélec et Zuily, *Éléménts d'analyse pour l'agrégation.*
[63] Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation.*

Développements de la leçon

Théorème de Cauchy – Lipschitz | Nombre de zéros d'une équation

Motivation

Défense

— $XVII^{\text{ième}}$ siècle : apparition du calcul différentiel et intégrable (apporte une riche théorie mathématiques)
— Les équations différentielles apparaissent alors en géométrie ou en mécanique (applications)
— À leur début, pas de recherche d'existence ni d'unicité (on ne cherche qu'à les résoudre sans savoir si c'est possible).
— On peut linéariser les équations non-linéaires. On étudie ensuite cette équation linéarisée.

Ce qu'en dit le jury

Le jury attend d'un candidat qu'il sache déterminer rigoureusement la dimension de l'espace vectoriel des solutions. Le cas des systèmes à coefficients constants fait appel à la réduction des matrices qui doit être connue et pratiquée. Le jury attend qu'un candidat puisse mettre en œuvre la méthode de variation des constantes pour résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 2 simple (à coefficients constants par exemple) avec second membre; un trop grand nombre de candidats se trouve déstabilisés par ces questions.

L'utilisation des exponentielles de matrices a toute sa place ici et doit être maîtrisée. Les problématiques de stabilité des solutions et le lien avec l'analyse spectrale devraient être exploitées.

Le théorème de Cauchy–Lipschitz linéaire constitue un exemple de développement pertinent pour cette leçon. Les résultats autour du comportement des solutions, ou de leurs zéros, de certaines équations linéaires d'ordre 2 (Sturm, Hill–Mathieu,...) sont aussi d'autres possibilités.

Pour aller plus loin, la résolution au sens des distributions d'équations du type $T' = 0$, ou des situations plus ambitieuses, trouvera sa place dans cette leçon.

Métaplan

Cadre : $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}^*$, I intervalle de $\mathbb{R}$.

I. Équations différentielles linéaires Lorsque nous étudions les équations différentielles, qu'appelle-t-on les équations différentielles linéaires ? Nous nous intéressons au cas très particulier des équations différentielles linéaires. Le cadre linéaire apportent quelques propriétés sur les solutions, leurs existences et leurs unicités.

A. *Notion d'équation différentielle linéaire [39, p.357]* Nous définissons ce que nous appelons équation différentielle linéaire.

- ⇝ *Définition* : Équation différentielle linéaire
- ⇝ *Définition* : Équation homogène
- ⇝ *Proposition* : Revenir à l'ordre 1

B. *Notions de solutions [30, p.131]* Lorsqu'on se donne une équation différentielle linéaire qu'appelle-t-on une solution ? Dans de nombreuses situations concrète, la variable t représente le temps et y représente les différents paramètres de l'état de notre système. Résoudre un problème de Cauchy revient à décrire l'état d'un système en fonction du temps à partir d'un temps et des configurations initiaux. Prendre un unique exemple de ces notions sur une équation différentielle que nous pouvons commenter à l'oral.

- ⇝ *Définition* [39, p.353] : Solution
- ⇝ *Définition* : Problème de Cauchy
- ⇝ *Définition* : Prolongement des solutions
- ⇝ *Définition* : Solution maximale
- ⇝ *Théorème* : Existence d'une solution maximale
- ⇝ *Définition* : Solution globale
- ⇝ *Proposition* [16] : Une solution globale est maximale

C. *Existence et unicité des solutions* Comment savoir si une équation différentielle linéaire admet une solution ? Le cas linéaire nous facilite bien l'existence quand à ces questions.

- ⇝ *Proposition* [39, p.377] : Lemme de Grönwall
- ⇝ *Théorème* [63, p.180] : Théorème de Cauchy–Lipschitz
- ⇝ *Théorème* [16] : Théorème de Cauchy–Lipschitz linéaire

II. Propriétés des solutions Nous allons donner quelques propriétés des solutions : nous effectuons une étude qualitative de celles-ci.

A. *Ensemble des solutions [16]* Dans le cadre des équations différentielles linéaires nous sommes capable de caractériser l'ensemble des solutions. De plus, plus précisément, nous sommes capable d'en donner une structure. On obtient ainsi une méthode afin de trouver les solutions de notre équation.

- ⇝ *Notation* : S_H et S
- ⇝ *Proposition* : Structure de S_H
- ⇝ *Corollaire* : Structure de S
- ⇝ *Application* : Calcul d'une solution générale

B. *Stabilité des solutions [57, p.380]* On étudie la stabilité des solutions c'est-à-dire leur comportement à l'infini. On peut ainsi tracer des portrait de phases.

- ⇝ *Définition* : Système stable (Dessin)
- ⇝ *Définition* : Système instable (Dessin)

⇝ *Définition* : Système asymptotiquement stable (Dessin)

⇝ *Remarque* : On se limite à l'étude de la fonction nulle

⇝ *Théorème* : Stabilité dans le cas linéaire ⇝ *Définition* [63, p.132] : Système linéarisé

⇝ *Théorème* [63, p.132] : Théorème de Lyapunov ⇝ *Exemple* [63, p.132] : Équation du pendule

C. *Étude qualitative de l'équation $y'' + py' + qy = 0$*

On réalise une étude qualitative des solutions de cette famille d'équation. Pour ce donner une idée de la tête des solutions, on commence par la résoudre dans le cas constant (on voit apparaître la résolution via les polynômes caractéristiques). Ensuite, on étudie le nombre de zéros de cette équation. Enfin on termine par l'étude de la régularité de ces solutions.

Formes des solutions dans le cas constant [16]

⇝ *Définition* : Équation caractéristique ⇝ *Proposition* : Résolution via le polynôme caractéristique

⇝ *Application* : Oscillateur harmonique ⇝ *Application* : Équation d'Euler d'ordre 2

Étude des zéros des solution [57, p.404]

⇝ *Théorème* : Dénombrement des zéros ⇝ *Exemple* : $Id, t \mapsto t^2$

⇝ *Contre-exemple* : $q(x) = \frac{1}{4x^2}$; $q'(x) = \frac{1}{2x^3}$; $y'' = q(t)y$.

Régularité des solutions [57, p.404]

⇝ *Proposition* [30, p.130] : Régularité des solutions ⇝ *Proposition* [39, p.378] : Solution est bornée

III. Résolution explicite d'équations différentielles linéaires

Le cas des équations différentielles linéaires est le cas facile de la résolution d'équation (d'où la recherche d'équation linéarisé). Nous allons présenter quelques méthode afin de résoudre des équations dans ce cadre.

A. *Le cas de l'ordre un [16]*

Le cas de l'ordre un est le plus facile, en intégrant et en appliquant la méthode de résolution vu dans la partie II, on fait juste apparaître une exponentielle.

⇝ *Proposition* : Solution d'une équation homogène ⇝ *Proposition* : Solution générale

B. *Cas particulier des coefficients constants [16]*

La résolution dans ce cas reste relativement simple. Cependant, elle demande l'introduction de nouveau outils comme l'exponentielle de matrices.

⇝ *Cadre* : Solution que nous souhaitons résoudre ⇝ *Définition* : Exponentielle de matrice

⇝ *Proposition* : Calcul de cet exponentielle de matrice

⇝ *Proposition* : Comportement face à la dérivation

⇝ *Proposition* : Propriétés d'une exponentielle de matrice

⇝ *Proposition* : Solution d'un tel système d'équation

⇝ *Proposition* : Base de l'espace des solutions

C. *Résolvantes et Wronskien [30]*

Lorsque les coefficients ne sont plus constants, la résolution est toujours possible mais nous devons faire appelle à des outils plus puissant comme la résolvante et le Wronskien

⇝ *Cadre* : Équation que l'on souhaite résoudre ⇝ *Définition* : Système fondamental de solution

⇝ *Définition* : Résolvante ⇝ *Proposition* : Caractère isomorphique

⇝ *Proposition* : Comportement face à la dérivation ⇝ *Proposition* : Propriétés de la résolvante

⇝ *Proposition* : Solution d'un tel système d'équation ⇝ *Définition* : Wronskien

⇝ *Proposition* [16] : Identité d'Abel

D. *Méthode de la variation de la constante [16]*

La résolvante est un outil lourd et difficile à manipuler. La méthode de la constante permet de simplifier la résolution de tels équations différentielles.

⇝ *Principe* : Solution homogène donne une solution globale ⇝ *Méthode*

⇝ *Proposition* : Formule de Duhamel

Leçon 223 : Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemple et application.

Références pour la leçon

[39] Gourdon, *Analyse.*
[51] Marco, Thieullen et Weil, *Mathématiques pour la L2.*
[63] Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation.*

Développements de la leçon

Suite de polygones — Méthode de Newton

Motivation

Défense

- Notion d'itération introduite par Archimède afin de calculer une valeur de π.
- Formalisation via les travaux de Cauchy et de Gauss.
- Étude des suites dans un espace vectoriel normé s'y ramène.

Ce qu'en dit le jury

Cette leçon permet souvent aux candidats de s'exprimer. Il ne faut pas négliger les suites de nombres complexes mais les suites vectorielles (dans R^n) ne sont pas dans le sujet. Le jury attire l'attention sur le fait que cette leçon n'est pas uniquement à consacrer à des suites convergentes, mais tout comportement asymptotique peut être présenté. Le théorème de Bolzano-Weierstrass doit être cité et le candidat doit être capable d'en donner une démonstration. On attend des candidats qu'ils parlent des limites inférieure et supérieure d'une suite réelle bornée, et qu'ils en maîtrisent le concept. Les procédés de sommation peuvent être éventuellement évoqués mais le théorème de Cesàro doit être mentionné et sa preuve maîtrisée par tout candidat à l'agrégation. Les résultats autour des sous-groupes additifs de R permettent d'exhiber des suites denses remarquables et l'ensemble constitue un joli thème. Des thèmes des leçons 225 et 226 peuvent également se retrouver dans cette leçon.

Pour aller plus loin, un développement autour de l'équirépartition est tout à fait envisageable. La méthode de Newton peut aussi illustrer la notion de vitesse de convergence.

Métaplan

Cadre : On se place dans un corps K qui est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. Convergence d'une suite L'étude de la convergence d'une suite est une propriété que l'on vérifie dès que nous manipulons des suites.

A. *Notion de convergence* Nous commençons par définir la notion de convergence pour la suite et la divergence d'une suite.

- $\rightsquigarrow$ *Définition* : Suite
- $\rightsquigarrow$ *Définition* : Convergence
- $\rightsquigarrow$ *Proposition* : Unicité de la limite
- $\rightsquigarrow$ *Application* : Caractérisation séquentielle de la continuité
- $\rightsquigarrow$ *Proposition* : Espace vectoriel
- $\rightsquigarrow$ *Application* : Limites géométrique et arithmétique
- $\rightsquigarrow$ *Définition* : Divergence
- $\rightsquigarrow$ *Remarque* : Suite divergente
- $\rightsquigarrow$ *Définition* : Notation de Landau

B. *Propriétés de la limite* Étudions le comportement pour une suite monotone, bornée et sur les opérations.

- $\rightsquigarrow$ *Théorème* : Comportement des limites $+$, $\times$, $\leq$
- $\rightsquigarrow$ *Définition* : Suite monotone, bornée
- $\rightsquigarrow$ *Proposition* : Monotone et bornée est convergence
- $\rightsquigarrow$ *Proposition* : Convergence implique suite bornée
- $\rightsquigarrow$ *Remarque* : Réciproque est fausse
- $\rightsquigarrow$ *Proposition* : Critère de convergence

C. *Valeurs d'adhérence* Les valeurs d'adhérence sont des limites de suites extraites On définie alors la notion de liminf et limsup qui sont des limites moins puissantes que les autres.

- $\rightsquigarrow$ *Définition* : Suite extraite
- $\rightsquigarrow$ *Définition* : Valeurs d'adhérence
- $\rightsquigarrow$ *Théorème* : Théorème de Bolzano–Weierstrass
- $\rightsquigarrow$ *Application* : Principe des compacts croissant
- $\rightsquigarrow$ *Proposition* : Lien entre valeur d'adhérence et limite
- $\rightsquigarrow$ *Définition* : Limite supérieure et inférieure d'adhérence
- $\rightsquigarrow$ *Proposition* : Inégalité
- $\rightsquigarrow$ *Application* : Critère d'Hadamard
- $\rightsquigarrow$ *Remarque* : Existence
- $\rightsquigarrow$ *Proposition* : Liminf - Limsup et valeurs d'adhérence

D. *Convergence au sens des complexes* Lorsqu'on regarde une suite de complexe, sa convergence se lit dans la convergence de la suite induite par sa norme.

- $\rightsquigarrow$ *Définition* : Convergence
- $\rightsquigarrow$ *Proposition* : Caractérisation via la partie réelle et imaginaire
- $\rightsquigarrow$ *Remarque* : Analogue au cas d'un espace vectoriel
- $\rightsquigarrow$ *Application* : Suite de polygones

II. Convergence de suites particulières Nous donnons quelques études de convergences pour quelques suites particulières : suite adjacente, de Cauchy, définie par récurrence.

A. *Suites adjacentes et de Cauchy*

- $\rightsquigarrow$ *Définition* : Suite adjacente
- $\rightsquigarrow$ *Proposition* : Même limite
- $\rightsquigarrow$ *Application* : Théorème des valeurs intermédiaires
- $\rightsquigarrow$ *Application* : Séries alternées
- $\rightsquigarrow$ *Théorème* : Théorème des gendarmes
- $\rightsquigarrow$ *Application* : Comparaison série-intégrale
- $\rightsquigarrow$ *Exemple* : Série de Riemann
- $\rightsquigarrow$ *Définition* : Convergence et suite de Cauchy
- $\rightsquigarrow$ *Application* : Divergence de H_n

B. *Suites récurrentes* Les suites définies par récurrence peuvent faire l'objet d'une leçon entière. Cependant, dans le cadre de la convergence, la régularité de la fonction f va jouer un rôle prédominant.

- $\rightsquigarrow$ *Cadre* : $u_{n+1} = f(u_n)$
- $\rightsquigarrow$ *Proposition* : Continue : point fixe
- $\rightsquigarrow$ *Application* : $u_{n+1} = au_n + b$ et $u_{n+1} = \frac{au_n+b}{cu_n+d}$
- $\rightsquigarrow$ *Proposition* : Lien entre monotonie et limité
- $\rightsquigarrow$ *Théorème* : Point fixe de Picard
- $\rightsquigarrow$ *Théorème* : Méthode de Newton

III. Sommation La sommation est une suite logique dans l'étude de la convergence des suites (on peut les voir comme des suites). Nous donnons donc quelques résultats sur les séries et leurs convergences, leur équivalents, ...

- $\rightsquigarrow$ *Proposition* : Sommation et notations de Landau
- $\rightsquigarrow$ *Proposition* : Série harmonique
- $\rightsquigarrow$ *Proposition* : Stirling
- $\rightsquigarrow$ *Théorème* : Lemme de Cesàro
- $\rightsquigarrow$ *Application* : Convergence lente

Leçon 224 : Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.

Références pour la leçon

[6] Arnaudies et Fraysse, *Analyse, tome 1.*
[39] Gourdon, *Analyse.*
[57] Quffelec et Zuily, *Éléments d'analyse pour l'agrégation.*
[63] Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation.*

Développements de la leçon

Nombre de zéros d'une équation — Méthode de Newton

Motivation

Défense

— Utile en physique : calcul du potentiel d'un dipôle loin des sources.
— Étude de voisinage de singularité de certaines fonction.
— Vitesse de convergence de méthodes numérique.
— Simplification d'étude complexe en se ramenant à l'étude de fonctions plus simples

Ce qu'en dit le jury

Cette leçon doit permettre aux candidats d'exprimer leur savoir-faire sur les techniques d'analyse élémentaire que ce soit sur les suites, les séries ou les intégrales. On peut par exemple établir un développement asymptotique à quelques termes des sommes partielles de la série harmonique, ou bien la formule de Stirling que ce soit dans sa version factorielle ou pour la fonction Γ. On peut également s'intéresser aux comportements autour des singularités de fonctions spéciales célèbres. Du côté de l'intégration, on peut évaluer la vitesse de divergence de l'intégrale de la valeur absolue du sinus cardinal, avec des applications pour les séries de Fourier, voire présenter la méthode de Laplace.

Par ailleurs, le thème de la leçon permet l'étude de suites récurrentes (autres que le poncif $u_{n+1} = \sin u_n$), plus généralement de suites ou de fonctions définies implicitement, ou encore des études asymptotiques de solutions d'équations différentielles (sans résolution explicite).

On peut aller plus loin en abordant des techniques de phase stationnaire et en en discutant des applications.

Métaplan

Cadre : Soit f une fonction définie sur un intervalle I différent d'un point à valeurs dans $\mathbb{R}$, $a \in \overline{I}$ et $n \in \mathbb{N}$.

I. Définition d'un développement asymptotique [39, p.86]

A. *Relations de comparaison* Cette partie constitue en l'études notations de Landau : leurs définitions, et leurs propriétés. Ces notations vont nous servir tout au long de la leçon.

$\leadsto$ *Définition* : Notation de Landau (fonction et suite) $\leadsto$ *Proposition* : Comportement des ces objets

$\leadsto$ *Proposition* : $o \Rightarrow O$ et $\sim \Rightarrow O$ dans les deux sens

B. *Développement asymptotique* Les échelle de comparaison permettent de réduire des fonctions compliquées à des combinaisons linéaires de fonctions modèles plus simples.

$\leadsto$ *Définition* : Échelle de comparaison $\leadsto$ *Définition* : Développement asymptotique

$\leadsto$ *Proposition* : Unicité $\leadsto$ *Application* : Formule sommatoire de Poisson et fonction Θ

C. *Un cas particulier : développement limité*

$\leadsto$ *Définition* : Développement limité en 0 à l'ordre k

$\leadsto$ *Remarque* : On peut toujours se ramener en 0 $\leadsto$ *Théorème* : Taylor–Young

$\leadsto$ *Contre-exemple* : Développable en 0 mais pas 2 fois dérivables : $x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

$\leadsto$ *Proposition* : Réciproque pour fonction continue $\leadsto$ *Application* : Théorème central limite

$\leadsto$ *Proposition* : Somme, multiplication, composée $\leadsto$ *Proposition* : Dérivation

$\leadsto$ *Application* : Calcul de limite

II. Développement asymptotique et intégration

A. *Intégration d'un développement limité [39, p.88]*

$\leadsto$ *Proposition* : Intégration d'un développement limité

$\leadsto$ *Application* : Calcul du DL(0) de $\ln(1 + x)$ et $\arctan(x)$

B. *Intégration des relations de comparaison [39, p.159]*

$\leadsto$ *Proposition* : Intégration des relations par comparaison $\leadsto$ *Exemple* : $\ln x = O(x^\alpha)$

$\leadsto$ *Application* : Développement asymptotique du log intégrable

C. *Étude qualitative d'équation différentielle : le nombre de zéros d'une solution [57]*

$\leadsto$ *Proposition* : Nombre de zéros d'une solution différentielle

III. Développement asymptotique de suites et séries

A. *Suites récurrentes*

$\leadsto$ *Théorème* : Convergence de Cesàro $\leadsto$ *Application* : Convergence lente

$\leadsto$ *Application* [63] : Newton

B. *Sommation des relations de comparaisons [39, p.202]*

$\leadsto$ *Proposition* : Sommation des relations par comparaison $\leadsto$ *Contre-exemple* : Positivité

$\leadsto$ *Application* : $H_n \underset{n\to\infty}{\sim} \ln n$ $\leadsto$ *Application* : Master théorème

C. *Comparaison série/intégrale [39, p.282]*

$\leadsto$ *Proposition* : Comparaison série/intégrale $\leadsto$ *Application* : Série de Bertrand

$\leadsto$ *Application* : Équivalence des sommes de Riemann

Leçon 226 : Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_n = f(u_{n-1})$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.

Références pour la leçon

[2] Allaire et Kaber, *Algèbre linéaire numérique.*
[30] Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles.*
[39] Gourdon, *Analyse.*
[63] Rouvière, *Petit guide du calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation.*

Développements de la leçon

Suite de polygones — Méthode de Newton

Motivation

Défense

- Analyse numérique :
  - recherche d'extrema ;
  - résolution de système d'équation.
- Probabilité : analyse de processus stochastique.

Ce qu'en dit le jury

Citer au moins un théorème de point fixe est évidemment pertinent et savoir le mettre en œuvre sur un exemple simple est indispensable. Le jury est toutefois surpris que des candidats évoquent un théorème de point fixe dans les espaces de Banach... sans être capables de définir ce qu'est un espace de Banach ou d'en donner un exemple ! On peut déjà commencer par énoncer un théorème de point fixe sur $\mathbb{R}$. Le jury attend d'autres exemples que la sempiternelle suite récurrente $u_{n+1} = \sin(u_n)$ (dont il est souhaitable de savoir expliquer les techniques sous-jacentes et le jury ne se privera pas de vérifier ce point sur un exercice). La notion de points attractifs ou répulsifs peut illustrer cette leçon.

L'étude des suites linéaires récurrentes d'ordre p est souvent mal connue, notamment le lien avec l'aspect vectoriel, d'ailleurs ce dernier point est trop souvent négligé. Le comportement des suites vectorielles définies par une relation linéaire $X_{n+1} = AX_n$ fournit pourtant un matériel d'étude conséquent.

La formulation de cette leçon invite résolument à évoquer les problématiques de convergence d'algorithmes (notamment savoir estimer la vitesse) d'approximation de solutions de problèmes linéaires et non linéaires : dichotomie, méthode de Newton (avec sa généralisation au moins dans R^2), algorithme du gradient, méthode de la puissance, méthodes itératives de résolution de systèmes linéaires, schéma d'Euler,...

Métaplan

Cadre : E un espace vectoriel, f une fonction telle que $f(I) \subseteq I$ pour I un intervalle de $\mathbb{R}$.

I. Itération d'une fonction

$\rightsquigarrow$ *Définition* : Suite définie par f

$\rightsquigarrow$ *Idée* : La régularité de la fonction va nous être utile

A. *Cas de f continue [63, p.258]*

$\rightsquigarrow$ *Définition* : Point fixe d'une fonction

$\rightsquigarrow$ *Proposition* : Lien continuité, convergence et points fixes

$\rightsquigarrow$ *Contre-exemple* : Continuité et convergence

$\rightsquigarrow$ *Conséquence* : Caractérisation de la convergence

$\rightsquigarrow$ *Théorème* : Caractérisation de la convergence

$\rightsquigarrow$ *Exemple* [39, p.192] : Suite homographique

B. *Cas de f monotones [39, p.257]*

$\rightsquigarrow$ *Proposition* : Caractérisation de la monotonie de u_n

$\rightsquigarrow$ *Théorème* : Caractérisation des points fixes

$\rightsquigarrow$ *Contre-exemple* : Décroissance et non bornée

$\rightsquigarrow$ *Exemple* : Suite arithmético-géométrique

C. *Application à la dichotomie*

$\rightsquigarrow$ *Théorème* : Valeurs intermédiaires

$\rightsquigarrow$ *Algorithme* : Dichotomie

$\rightsquigarrow$ *Remarque* : Convergence

II. Récurrences linéaires

A. *Suite récurrente linéaire à coefficients constants [39]*

$\rightsquigarrow$ *Définition* : Suite récurrente d'ordre p homogène

$\rightsquigarrow$ *Remarque* : Système matriciel (écriture)

$\rightsquigarrow$ *Exemple* : Suite de polynômes

$\rightsquigarrow$ *Méthode* : Résolution via l'équation caractéristique

$\rightsquigarrow$ *Exemple* : Fibonacci

B. *Résolution numérique de système par itérations [2]*

$\rightsquigarrow$ *Problème*; Résolution de système

$\rightsquigarrow$ *Théorème* : Convergence de la méthode

$\rightsquigarrow$ *Méthode* : Jacobi

$\rightsquigarrow$ *Méthode* : Gauss–Seidel

$\rightsquigarrow$ *Méthode* : Relaxation

$\rightsquigarrow$ *Théorème* : Convergence

III. Méthode de points fixes

A. *Théorème de point fixe*

$\rightsquigarrow$ *Théorème* [30, p.101] : Théorème de points fixe

$\rightsquigarrow$ *Contre-exemple* : I non compact

$\rightsquigarrow$ *Contre-exemple* : $f(I) \not\subset I$

$\rightsquigarrow$ *Contre-exemple* : f non contractante

$\rightsquigarrow$ *Application* [63] : Théorème de Cauchy–Lipschitz

B. *Classification des points fixes [30, p.103]*

$\rightsquigarrow$ *Théorème* : Classification

$\rightsquigarrow$ *Remarque* : Le cas $|\varphi'(a)| = 1$

B. *Application à la méthode de Newton [63]*

$\rightsquigarrow$ *Théorème* : Méthode de Newton

$\rightsquigarrow$ *Remarque* : Extension

Leçon 228 : Continuité et dérivabilité d'une fonction réelle à une variable réelle. Exemples et applications.

Références pour la leçon

[39] Gourdon, *Analyse.*
[44] Hauchecorne, *Les contre-exemples en mathématiques.*
[47] Kieffer, *66 leçons pour l'agrégation de mathématiques.*
[50] Marco, *Mathématiques L3, Analyse*
[54] Ouvrard, *Probabilité 1.*
[62] Rombaldi, *Éléments d'analyse réel : capes et agrégation.*

Développements de la leçon

Théorème de Weierstrass — Méthode de Newton

Motivation

Défense

— La notion de continuité a été très tôt intuitée mais il a fallut attendre les travaux de Peano pour ébauché la théorie actuelle.
— La notion de dérivation s'est quand à elle développée avec les travaux de Leibniz et de Newton sur l'infinitésimal.
— Comme nous le verrons dans la suite de la leçon ses deux notions sont très proches l'une de l'autre et interagissent à bien des égares.

Ce qu'en dit le jury

Cette leçon permet des exposés de niveaux très variés. Les théorèmes de base doivent être maîtrisés et illustrés par des exemples intéressants, par exemple le théorème des valeurs intermédiaires pour la dérivée. Le jury s'attend évidemment à ce que le candidat connaisse et puisse calculer la dérivée des fonctions usuelles. Les candidats doivent disposer d'un exemple de fonction dérivable de la variable réelle qui ne soit pas continûment dérivable. La stabilité par passage à la limite des notions de continuité et de dérivabilité doit être comprise par les candidats. De façon plus fine, on peut s'intéresser à des exemples de fonctions continues nulle part dérivables.

Les propriétés de régularité des fonctions convexes peuvent être mentionnées. Pour aller plus loin, la dérivabilité presque partout des fonctions lipschitziennes ou des fonctions monotones relève de cette leçon. L'étude des liens entre dérivée classique et dérivée au sens des distributions de fonctions telles que la fonction de HEAVISIDE, de la valeur absolue ou de la fonction $x \mapsto \int_a^x f(y)dy$, f étant intégrable, peuvent trouver leur place dans cette leçon. On peut aussi relier la dérivée faible et la limite du taux d'accroissement au sens des distributions et établir le lien entre fonction croissante et dérivée faible positive.

Métaplan

Cadre : I désigne un ensemble $\mathbb{R}$, a un point de I et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$.

I. Continuité d'une fonction

A. *Définitions et premières propriétés* *Objectif* : formaliser la notion de continuité et en dégager les premières propriétés.

- $\rightsquigarrow$ *Définition* [62, p. 37] : Continuité en un point
- $\rightsquigarrow$ *Exemple* [62, p. 39] : $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ n'est continue en aucun point de $\mathbb{R}$
- $\rightsquigarrow$ *Remarque* [62, p.208] : Continue en $a \Leftrightarrow$ DL d'ordre 0 en a
- $\rightsquigarrow$ *Définition* [62, p. 37] : Fonction continue
- $\rightsquigarrow$ *Exemple* : Fonctions usuelles et leurs réciproques sont continues
- $\rightsquigarrow$ *Remarque+ Exemple* [44, p.149] : Réciproque d'une fonction continue
- $\rightsquigarrow$ *Théorème* [62, p. 38] : Caractérisation séquentielle de la continuité
- $\rightsquigarrow$ *Application* [62, p.39] : Discontinuité de la fonction en un point : $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$
- $\rightsquigarrow$ *Théorème* [62, p.56, thm 2.28] : TVI
- $\rightsquigarrow$ *Contre-exemple* [44] : $x \mapsto cos(\frac{1}{x})$ *si* $x \neq 0$; 1 *sinon*
- $\rightsquigarrow$ *Application* [62, p.56] : Dichotomie
- $\rightsquigarrow$ *Application* [47, p.397] : Théorème de point fixe
- $\rightsquigarrow$ *Théorème* [62, p.40] : Prolongement continue
- $\rightsquigarrow$ *Exemple* [62, p.40] : $x \longmapsto \frac{sinx}{x}$

B. *Propriétés globales des fonctions continues* *Objectif* : Étendre la notion de continuité (qui est locale) à des propriétés globales sur les fonctions continues.

- $\rightsquigarrow$ *Définition* [62, p.47] : Continuité uniforme
- $\rightsquigarrow$ *Théorème* : Heine
- $\rightsquigarrow$ *Remarque* [62, p.48] : Uniforme continuité $\Rightarrow$ continuité mais pas $\Leftrightarrow$
- $\rightsquigarrow$ *Exemple* [62, p.48] : $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue
- $\rightsquigarrow$ *Contre-exemple* [62, p.47] : $x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
- $\rightsquigarrow$ *Proposition* [62, p.48] : Fonctions lipschitziennes sont uniformément continue.

C. *Exemples de fonctions continues* *Objectif* : Donner quelques classes de fonctions remarquable au vue de la continuité.

- $\rightsquigarrow$ *Théorème* [62, p.44] : Fonction monotone et continuité
- $\rightsquigarrow$ *Application* [62, p.44] : Fonction monotone et points de discontinuité
- $\rightsquigarrow$ *Proposition* [39] : La convergence uniforme préserve la continuité
- $\rightsquigarrow$ *Théorème* [39, p. 229] : Lemmes de Dini
- $\rightsquigarrow$ *Théorème* [39, p.225] : Weierstrass
- $\rightsquigarrow$ *Théorème* [39, p. 157] : Continuité sous le signe intégrale
- $\rightsquigarrow$ *Contre-exemple* [44, p.231] : $f_n : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ telle que $f_n(x) = x^n$
- $\rightsquigarrow$ *Application* : Transformée de Fourier d'une fonction $L^1(\mathbb{R})$ est continue.

II. Dérivabilité

A. *Définitions et lien avec la continuité* *Objectif* : Formaliser la notion de dérivabilité et la mettre en relation avec la notion de continuité.

- $\rightsquigarrow$ *Définition* [39, p.69] : Dérivabilité en un point, sur un intervalle, fonction dérivable, fonction dérivé

- ⇝ *Remarque* [39, p.70] : Dérivabilité → continuité
- ⇝ *Remarque* [39, p.70] : Fonction dérivée n'est pas forcément continue.
- ⇝ *Exemple* : $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$ si $x \neq 0$ et 0 sinon. La dérivée de f est non continue en 0.
- ⇝ *Remarque* [62, p.208] : f est dérivable en $a \Leftrightarrow f$ admet un DL d'ordre 1 en a
- ⇝ *Application* [62] : Caractérisation par dérivabilité pour les fonctions lipschitziennes
- ⇝ *Proposition* [62] : f continue, strictement monotone et dérivable en a. La réciproque est dérivable en $f(a) \Leftrightarrow f'(a) \neq 0$ et dans ce cas $(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$.
- ⇝ *Exemple* [62] : $x \longmapsto arcsin'(x)$ ⇝ *Théorème* [62] : Darboux
- ⇝ *Application* : Recherche de racine de f' par dichotomie.
- ⇝ *Théorème* [39] : Prolongement de dérivée ⇝ *Exemple* [39] : $x \longmapsto \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$

B. *Dérivées d'ordre supérieure* *Objectif* : dériver des fonctions dérivées.

- ⇝ *Définition* [62] : Dérivée d'ordre n + classes $\mathcal{C}^n$ et $\mathcal{C}^\infty$ ⇝ *Contre-exemple* : Lien avec les DL d'ordre n
- ⇝ *Exemple* : La fonction déterminant est $\mathcal{C}^\infty$ car c'est un polynôme.
- ⇝ *Application* [62] : Caractérisation des fonctions convexes par dérivée seconde
- ⇝ *Proposition* [62] : Leibniz

C. *Interprétation géométrique de la dérivée*

- ⇝ *Théorème* : Rolle ⇝ *Contre-exemple* : $t \longmapsto e^{it}$
- ⇝ *Théorème* : Accroissement ⇝ *Théorème* : Fondamental de l'analyse $\int_a^b f(t)dt = f(b) - f(a)$

III. Continuité et dérivabilité : des outils puissants

A. *Étude variationnelle des fonctions*

- ⇝ *Proposition* : Signe de la dérivé et monotonie ⇝ *Proposition* : $f' > 0 \Rightarrow$ stricte croissance
- ⇝ *Contre-exemple* : $x \longmapsto x^3$ ⇝ *Application* : Caractérisation des fonctions convexes par monotonie
- ⇝ *Proposition* : Fonction dérivée monotone est continue ⇝ *Proposition* : Extremum local
- ⇝ *Contre-exemple* : $w \longmapsto x^3$ ⇝ *Application* : Méthode de Newton
- ⇝ *Proposition* : Règle de l'Hôpital ⇝ *Exemple* : $\lim_{x \to 0} \frac{sinx}{x} = 1$
- ⇝ *Contre-exemple* : $x \longmapsto sin(x^2)$ et $x \longmapsto x$

B. *Formules de Taylor [62, p.181]*

- ⇝ *Théorème* : Formule de Taylor–Lagrange ⇝ *Théorème* : Formule de Taylor–Young
- ⇝ *Théorème* : Formule de Taylor avec reste intégrable
- ⇝ *Application* [54, p.231] : Théorème central limite

C. *Quelques résultats de densité*

- ⇝ *Théorème* : Fonction continue partout, dérivable en aucun point
- ⇝ *Application* : Densité de ces fonctions dans les fonctions continues
- ⇝ *Théorème* : Densité des fonctions $\mathcal{C}^n$ à support compact dans $L^p(\mathbb{R})$ pour $1 \leq p < \infty$.

Leçon 229 : Fonctions monotones. Fonctions convexes.

Références pour la leçon

[39] Gourdon, *Analyse.*
[44] Hauchecorne, *Les contre-exemples en mathématiques.*
[53] Nourdin, *Agrégation de mathématiques épreuve orale.*
[58] Ramis et Warusfel, *Cours de mathématiques pures et appliquées.*
[63] Rouvière, *Petit guide du calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation.*
[64] Rudin, *Principes d'analyse mathématiques.*

Développements de la leçon

Caractérisation de Γ — Méthode du gradient à pas optimal

Motivation

Défense

— La monotonie décrit les variations d'une fonctions (extremum local d'une fonction)

— La convexité des fonctions (extremum global)

Ce qu'en dit le jury

L'énoncé et la connaissance de la preuve de l'existence de limites à gauche et à droite pour les fonctions monotones sont attendues. Ainsi on doit parler des propriétés de continuité et de dérivabilité à gauche et à droite des fonctions convexes de la variable réelle. Il est souhaitable d'illustrer la présentation de la convexité par des dessins clairs. On notera que la monotonie concerne les fonctions réelles d'une seule variable réelle, mais que la convexité concerne également les fonctions définies sur une partie convexe de $\mathbb{R}^n$, qui fournissent de beaux exemples d'utilisation. L'étude de la fonctionnelle quadratique ou la minimisation de $||Ax - b||^2$ pourront illustrer agréablement cette leçon.

Pour aller plus loin, la dérivabilité presque partout des fonctions monotones est un résultat remarquable (dont la preuve peut être éventuellement admise). L'espace vectoriel engendré par les fonctions monotones (les fonctions à variation bornée) relève de cette leçon. Enfin, la dérivation au sens des distributions fournit les caractérisations les plus générales de la monotonie et de la convexité ; les candidats maîtrisant ces notions peuvent s'aventurer utilement dans cette direction.

Métaplan

Cadre : I intervalle de $\mathbb{R}$

I. Fonctions monotones

A. *Définitions*

- $\rightsquigarrow$ *Définition* : Fonction croissante, décroissante
- $\rightsquigarrow$ *Définition* : Fonction monotone
- $\rightsquigarrow$ *Remarque* : Monotonie de f et $-f$
- $\rightsquigarrow$ *Remarque* : Stricte croissance / décroissance
- $\rightsquigarrow$ *Application* [63, p.257] : Monotonie d'une suite
- $\rightsquigarrow$ *Exemple* : Fonction caractéristique

B. *Régularité des fonctions monotones*

- $\rightsquigarrow$ *Proposition* : Limite à gauche et à droite en tout points
- $\rightsquigarrow$ *Contre-exemple* [44] : stricte croissante et discontinuité
- $\rightsquigarrow$ *Proposition* : Bijection et f^{-1}
- $\rightsquigarrow$ *Théorème* (ADMIS) : Dérivable presque partout

C. *Étude des variations*

- $\rightsquigarrow$ *Proposition* : Caractérisation de la croissance
- $\rightsquigarrow$ *Contre-exemple* : $x \mapsto x^3$
- $\rightsquigarrow$ *Remarque* : Généralisation de la stricte croissance

D. *Suites et séries de fonctions [53, p.8]*

- $\rightsquigarrow$ *Lemme* : Dini
- $\rightsquigarrow$ *Application* : Théorème de Glivenko–Ganteli
- $\rightsquigarrow$ *Théorème* : Comparaison série-intégrale
- $\rightsquigarrow$ *Application* [39, p.204] : Séries de Bertrand

II. Fonctions convexes

A. *Définitions*

- $\rightsquigarrow$ *Définition* : Fonction convexe (stricte)
- $\rightsquigarrow$ *Exemple* : Norme convexe mais pas stricte linéaire
- $\rightsquigarrow$ *Définition* : Fonction concave
- $\rightsquigarrow$ *Proposition* : Comportements limites et combinaison linéaire
- $\rightsquigarrow$ *Proposition* : Fonction affine convexe (concave)
- $\rightsquigarrow$ *Théorème* : Caractérisation par épigraphe
- $\rightsquigarrow$ *Remarque* : Représentation graphique

B. *Caractérisation*

- $\rightsquigarrow$ *Lemme* : 3 pentes
- $\rightsquigarrow$ *Application* : Bornée $\Rightarrow$ constante
- $\rightsquigarrow$ *Application* [64] : Caractérisation de Gamma
- $\rightsquigarrow$ *Proposition* : Régularité
- $\rightsquigarrow$ *Proposition* : f est dérivable
- $\rightsquigarrow$ *Remarque* : Généralisation différentiable
- $\rightsquigarrow$ *Proposition* : f est 2 fois dérivable
- $\rightsquigarrow$ *Remarque* : Généralisation différentiable
- $\rightsquigarrow$ *Contre-exemple* : $x \mapsto x^4$
- $\rightsquigarrow$ *Exemple* : Convexité de exp

C. *Inégalités [63]*

- $\rightsquigarrow$ *Proposition* : Inégalité de la moyenne
- $\rightsquigarrow$ *Proposition* : Inégalité de Young
- $\rightsquigarrow$ *Proposition* : Inégalité de Hölder
- $\rightsquigarrow$ *Application* : Inégalité de Minkowski
- $\rightsquigarrow$ Inégalité de Jensen (caractérisation via affine et variance)

D. *Optimisation*

- $\rightsquigarrow$ *Proposition* : Unicité d'extremum locaux - globaux
- $\rightsquigarrow$ *Proposition* : Méthode de Newton
- $\rightsquigarrow$ *Définition* : Fonction coersive (apport de la convexité)
- $\rightsquigarrow$ *Proposition*[58] : Gradient à pas optimal
- $\rightsquigarrow$ Inégalité de Jensen (caractérisation via affine et variance)

Leçon 230 : Séries de nombres réels et complexes. Comportement des restes et des sommes partielles des séries numériques.

Références pour la leçon

[33] Francinou, Gianella et Nicolas, *Oraux X-ENS, algèbre 1*.
[35] Francinou, Gianella et Nicolas, *Oraux X-ENS, analyse 2*.
[39] Gourdon, *Analyse*.
[44] Hauchecorne, *Les contre-exemples en mathématiques*.

Développements de la leçon

Nombre de Bell	Nombre de Bernoulli

Motivation

Défense

Ce qu'en dit le jury

De nombreux candidats commencent leur plan par une longue exposition des conditions classiques assurant la convergence ou la divergence des séries numériques. Sans être hors sujet, cette exposition ne doit pas former l'essentiel de la matière de la leçon. Un thème important de la leçon est en effet le comportement asymptotique des restes et sommes partielles (équivalents, développements asymptotiques — par exemple pour certaines suites récurrentes — cas des séries de Riemann, comparaison séries et intégrales,...). Le manque d'exemples est à déplorer.

On peut aussi s'intéresser à certaines sommes particulières, que ce soit pour exhiber des nombres irrationnels (voire transcendants), ou mettre en valeur des techniques de calculs non triviales (par exemple en faisant appel aux séries de Fourier ou aux séries entières).

Enfin, si le jury apprécie que le théorème des séries alternées (avec sa version sur le contrôle du reste) soit maîtrisé, il rappelle aussi que ses généralisations possibles utilisant la transformation d'Abel trouvent toute leur place dans cette leçon.

Métaplan

— *Définition* : $\sum u_n$

— *Définition* : S_n

I. Séries à termes positifs [39, p.200]

⇝ *Cadre* : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$

⇝ *Proposition* : Convergence $\Rightarrow u_n \to 0$

⇝ *Définition* : Convergence de $\sum u_n$

⇝ *Définition* : Divergence grossière

A. *Critère de convergence*

⇝ *Proposition* : Majoration par une série convergente

⇝ *Théorème* : Comparaison série-intégrale

⇝ *Contre-exemple* [44, p.122]

⇝ *Application* : H_n et Stirling

⇝ *Proposition* : Règle de d'Alembert

⇝ *Proposition* : Règle de Cauchy

⇝ *Proposition* : Règle de Roab–Duahamel

⇝ *Exemple* [39, p.211] : Zéta

⇝ *Exemple* : Série de Riemann

⇝ *Proposition* : Convergence et Lando

⇝ *Exemple* : Série de Bertrand

⇝ *Contre-exemple* [44, p.119]

⇝ *Contre-exemple* [44, p.120]

B. *Comportements des restes des sommes partielles*

⇝ *Proposition* : Bijection et f^{-1}

⇝ *Théorème* (ADMIS) : Dérivable presque partout

II. Séries à termes quelconques [39, p.210] On obtient la motivation pour la partie précédente.

— *Cadre* : u_n quelconques dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

— *Remarque* : Convergence absolue $\Rightarrow$ simple

— *Définition* : Convergence absolue

— *Définition* : Série semi-convergente

A. *Critères de convergence*

⇝ *Proposition* : Séries alternées

⇝ *Proposition* : Cauchy-Hadamard

⇝ *Proposition* : Transformation d'Abel

⇝ *Proposition* : Cas complexe

B. *Comportement des restes*

⇝ *Proposition* : Reste de série absolument convergente

⇝ *Proposition* : Comparaison reste-intégrale

III. Calculs de sommes

A. *Cas de séries faciles*

⇝ *Proposition* : Série télescopique

⇝ *Proposition* : Linéarité de la somme

B. *Utilisation des séries entières*

⇝ *Définition* : Série entière

⇝ *Application* : Calcul de $\sum \frac{2^n}{n!}$

⇝ *Théorème* : Abel

⇝ *Application* [33] : Nombre de Bell

C. *Utilisation des séries de Fourier*

⇝ *Définition* : Série de Fourier

⇝ *Application* : Calcul de $\sum \frac{1}{n^2}$

⇝ *Théorème* : Dirichlet

⇝ *Application* [35] : Série des nombres de Bernoulli

Leçon 233 : Analyse numérique matricielle : résolution approchée de systèmes linéaires, recherche de vecteurs propres.

Références pour la leçon

[2] Allaire et Kaber, *Algèbre linéaire numérique.*
[19] Brezinski et Redivo–Zaglia, *Méthodes numériques itératives.*
[58] Ramis et Warusfel, *Cours de mathématiques pures et appliquées.*

Développements de la leçon

Méthode de Kackmarz | Méthode du gradient à pas optimal

Motivation

Défense

- Rayon spectral est difficile à calculer mais utile, par exemple pour le web.
- Problèmes résolus grâce à ces méthodes :
  - $Ax = b$ (inverser A) : schéma numériques, résolution approchées d'équations différentielles, calcul de bases d'un espace vectoriel.
  - Valeurs propres de A (diagonaliser) : stat, stabilité de système différentiel, estimation du rayon spectral.
- Méthodes itératives :
  - Rapidité
  - Stabilité : méthode directe (exacte) : arrondit, solution loin de la réalité, comment se comporte les solutions lorsqu'elles sont perturbées ?

Ce qu'en dit le jury

Le jury reprend une formulation antérieure de l'intitulé car la leçon se focalisait trop exclusivement sur la résolution de systèmes linéaires par des méthodes itératives. Le jury souhaite un sujet plus ouvert et des propositions qui ne négligent plus la recherche de vecteurs propres et, de manière générale, l'exploitation de techniques d'analyse pour aborder la résolution approchée de systèmes linéaires et de leurs propriétés spectrales et approfondir la compréhension des algorithmes.

Dans cette leçon de synthèse, les notions de norme matricielle et de rayon spectral sont centrales, en lien avec le conditionnement et avec la convergence des méthodes itératives ; elles doivent être développées et maîtrisées. Le conditionnement d'une matrice symétrique définie positive doit être connu et un lien avec $\sup_{||x||=1} x^T Ax$ doit être fait. Le résultat général de convergence, relié au théorème du point fixe de Banach, doit être enrichi de considérations sur la vitesse de convergence.

Le jury invite les candidats à étudier diverses méthodes issues de contextes variés : résolution de systèmes linéaires, optimisation de fonctionnelles quadratiques (du type $\frac{1}{2}(Ax,x) - (b,x)$), recherche de valeurs propres,... Parmi les points intéressants à développer, on peut citer les méthodes de type Jacobi pour la résolution de systèmes linéaires, les méthodes de gradient dans le cadre quadratique, les méthodes de puissance et QR pour la recherche de valeurs propres. Les candidats pourront illustrer leur propos sur des matrices issues de schémas numériques pour les équations différentielles ou aux dérivées partielles linéaires.

Métaplan

Cadre : $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

I. Normes matricielles, rayon spectral et conditionnement [19, p.1] But : conditionnement petit

- ⇝ *Définition* : norme subordonnée
- ⇝ *Proposition* : Propriété de cette norme
- ⇝ *Exemple* : Norme subordonnée à 2
- ⇝ *Contre-exemple* : Frobenius
- ⇝ *Définition* : Rayon spectral
- ⇝ *Remarque* : Lien avec la norme
- ⇝ *Définition* : Conditionnement d'une matrice
- ⇝ *Proposition* : Propriétés du conditionnement
- ⇝ *Proposition* [2, p.90] : Lien avec la résolution
- ⇝ *Proposition* [2, p.91] : Lien avec les valeurs propres

II. Résolution approchée de systèmes linéaires But : problème à résoudre.

A. *Méthodes itératives de décomposition [2, p. 157]*

- ⇝ *Définition* : Méthodes itératives
- ⇝ *Définition* : Convergence d'une méthode
- ⇝ *Définition* : Erreur
- ⇝ *Théorème* : Critère de convergence
- ⇝ *Définition* : Méthode de Jacobi
- ⇝ *Proposition* : Convergence dans le cas hermitien
- ⇝ *Définition* : Méthode de Gauss–Seidel
- ⇝ *Proposition* : Convergence dans le cas hermitien
- ⇝ *Remarque* [19, p.19] (ADMIS) : Comparaison des convergences
- ⇝ *Définition* : Méthode de la relaxation
- ⇝ *Remarque* : Valeurs de ω
- ⇝ *Théorème* : Convergence et sa vitesse
- ⇝ *Théorème*(ADMIS) : Cas des matrices triangulaires

B. *Méthodes itératives géométriques*

- ⇝ *Méthode* : Kackmarz
- ⇝ *Lemme* : Caractérisation des solutions
- ⇝ *Théorème* : Convergence de la méthode

C. *Optimisation [58]*

- ⇝ *Définition* : Lien entre $Ax = b$ et fonction
- ⇝ *Proposition* : Gradient de cette fonctionnelle
- ⇝ *Proposition* : Existence et unicité des solutions
- ⇝ *Méthode* : Gradient à pas optimal

III. Recherche de valeurs et de vecteurs propres [2, p.215]

A. *Calcul de la plus grande valeur propre*

- ⇝ *Définition* : Méthode de la puissance
- ⇝ *Théorème* : Correction
- ⇝ *Théorème* : Terminaison
- ⇝ *Proposition* : Vitesse de convergence

B. *Calcul des autres valeurs propres*

- ⇝ *Définition* : Méthode de la puissance inverse
- ⇝ *Théorème* : Terminaison
- ⇝ *Théorème* : Correction
- ⇝ *Remarque* : Lien avec ce qui précède

Leçon 236 : Illustration par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales.

Références pour la leçon

[20] Briance et Pagès, *Théorie de l'intégration.*
[30] Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles.*
[39] Gourdon, *Analyse.*
[57] Queffelec et Zuily, *Éléments d'analyse pour l'agrégation.*

Développements de la leçon

Intégrale de Fresnel

Formule de Poisson et fonction Θ

Motivation

Défense

Ce qu'en dit le jury

Cette leçon doit être très riche en exemples, que ce soit l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ ou bien d'autres encore. Il est tout à fait pertinent de commencer par les différentes techniques élémentaires (intégration par parties, changement de variables, décomposition en éléments simples, intégrale à paramètres,...). On peut également présenter des utilisations du théorème des résidus, ainsi que des exemples faisant intervenir les intégrales multiples comme le calcul de l'intégrale d'une gaussienne. Le calcul du volume de la boule unité de R^n ne doit pas poser de problèmes insurmontables. Le calcul de la transformation de Fourier d'une gaussienne a sa place dans cette leçon.

On peut aussi penser à l'utilisation du théorème d'inversion de Fourier ou du théorème de Plancherel. Certains éléments de la leçon précédente, comme par exemple l'utilisation des théorèmes de convergence monotone, de convergence dominée et/ou de Fubini, sont aussi des outils permettant le calcul de certaines intégrales.

Enfin, il est tout à fait pertinent d'évoquer les méthodes de calcul approché d'intégrales (méthodes des rectangles, méthode de Monte-Carlo, etc.).

Métaplan

I. Méthodes de calcul direct

A. *Utilisation des primitives [39, p.133]*

- ⇝ *Théorème* [39, p.123] : Existence d'une primitive
- ⇝ *Exemple* : Fonctions usuelles (complément annexe)
- ⇝ *Méthode* : Décomposition en éléments simples
- ⇝ *Méthode* : Linéarisation des cos et des sin

B. *Intégration par partie*

- ⇝ *Théorème* [39, p.123] : Intégration par partie
- ⇝ *Exemple* $\int_0^x \ln(u)du$
- ⇝ *Exemple* $\int_0^x \arctan(u)du$
- ⇝ *Exemple* [39, p.126] : Intégrale de Wallis
- ⇝ *Application* [39, p.211] : Stirling
- ⇝ *Exemple* : Fonction $\Gamma(n+1) = n!$
- ⇝ *Méthode* [39, p.137] : $\int \sqrt{ax^2+bx+c}dx$
- ⇝ *Exemple* : $\int \sqrt{t^2-1}dt$
- ⇝ *Théorème* : Fubini
- ⇝ *Application* [20, p.265] : Gauss
- ⇝ *Exemple* : Intégrale de Fresnel

C. *Changement de variables [39, p.139]*

- ⇝ *Théorème* : Cas de la dimension 1
- ⇝ *Application* [39, p.124] : Fonctions paires
- ⇝ *Application* [39, p.124] : Fonctions impaires
- ⇝ *Application* [39, p.124] : Fonctions périodiques
- ⇝ *Exemple* : Polynôme en cos et en sin
- ⇝ *Exemple* : Fraction rationnelle en cos et en sin
- ⇝ *Exemple* : Règle de Bioche
- ⇝ *Exemple* : Intégrale Abélienne
- ⇝ *Théorème* [39, p.335] : Cas de la dimension d
- ⇝ *Application* [39, p.335] : Passage en coordonnées polaires
- ⇝ *Application* [20, p.246] : Volume de la boule unité

II. Calculs via des fonctions auxiliaires et leurs propriétés

A. *Suites et séries de fonctions*

- ⇝ *Théorème* [20, p.117] : Beppo–Lévi
- ⇝ *Application* : TCL
- ⇝ *Théorème* [20, p.134] : Convergence dominée
- ⇝ *Exemple* : Limite de $I_n(\alpha) = \int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-\alpha x}dx$
- ⇝ *Théorème* [20, p.137] : Interversion série-intégrale
- ⇝ *Exemple* : Calcul de $\int_1^1 \frac{\ln t}{1+t^2}dt$
- ⇝ *Application* : Théorème de Borel–Canteli

B. *Régularité des intégrales à paramètres [20, p.138]*

- ⇝ *Théorème* : Continuité
- ⇝ *Application* : Convolution
- ⇝ *Théorème* : Dérivabilité
- ⇝ *Remarque* : Analogue pour $\mathcal{C}^\infty$
- ⇝ *Application* : Convolution
- ⇝ *Exemple* : Γ est $\mathcal{C}^\infty$

C. *Transformée de Fourier*

- ⇝ *Définition* [20, p.140] : Transformée de Fourier
- ⇝ *Théorème* [20, p.140] : Régularité de $\hat{f}$
- ⇝ *Théorème* [57, p.330] : Inversion
- ⇝ *Application* [39, p.272] : Formule de Poisson

III. Méthodes de calcul approché

A. *Sommes de Riemman [39, p.124]*

- ⇝ *Définition* : Somme de Riemann
- ⇝ *Théorème* : Calcul de l'intégral
- ⇝ *Application* : Calcul pour les fonctions continues par morceaux

B. *Méthodes numériques [30, p.63]*

- ⇝ *Méthode* : Rectangle
- ⇝ *Méthode* : Trapèzes

B. *Méthode de Monté–Carlos*

- ⇝ *Méthode* : Monté–Carlos
- ⇝ *Théorème* : Correction

Leçon 239 : Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre.

Références pour la leçon

[6] Arnaudies et Fraysse, *Analyse, tome 2.*
[13] Beck, Malik et Peyre, *Objectif agrégation.*
[20] Briance et Pagès, *Théorie de l'intégration.*
[39] Gourdon, *Analyse.*
[44] Hauchecorne, *Les contres-exemples en mathématiques.*
[53] Nourdin, *Agrégation de mathématiques épreuve orale.*
[64] Rudin, *Principe d'analyse mathématiques.*
[57] Queffelec et Zuily, *Éléments d'analyse pour l'agrégation.*

Développements de la leçon

Caractérisation de Γ — Théorème de Weierstrass

Motivation

Défense

Application : Définir de nouvelles fonctions.

Ce qu'en dit le jury

Les candidats incluent les théorèmes de régularité (version segment — a minima — mais aussi version « convergence dominée ») ce qui est pertinent mais la leçon ne doit pas se réduire seulement à cela. Cette leçon doit être riche en exemples, ce qui parfois n'est pas suffisamment le cas, et peut être encore enrichie par des études et méthodes de comportements asymptotiques. Les propriétés de la fonction Γ d'Euler fournissent un développement standard, mais non sans risque (on pourra y inclure le comportement asymptotique, voire son prolongement analytique) ; certains candidats sont trop ambitieux pour le temps dont ils disposent. Le jury invite donc à bien préciser ce que le candidat souhaite montrer pendant son développement. Les différentes transformations classiques (Fourier, Laplace,...) relèvent aussi naturellement de cette leçon. On peut en donner des applications pour obtenir la valeur d'intégrales classiques (celle de l'intégrale de Dirichlet par exemple). Le théorème d'holomorphie sous le signe intégrale est trop peu souvent cité.

Pour aller encore plus loin, on peut par exemple développer les propriétés des transformations mentionnées (notamment la transformée de Fourier, par exemple en s'attardant sur le lien entre régularité de la fonction et décroissance de sa transformée de Fourier), ainsi que de la convolution.

Métaplan

I. Régularité des intégrales à paramètres

A. *Continuité [20, p.138]*

- ⇝ *Théorème* : Continuité
- ⇝ *Contre-exemple* [44, p. 224] : $\int f$ non continue
- ⇝ *Exemple* [6, p.442] : Conséquence de f continue et existence de $\int_0^\infty f$
- ⇝ *Contre-exemple* [44, p. 224] : si f continue

B. *Régularité d'ordre supérieur*

- ⇝ *Théorème* [20, p.140] : Dérivabilité
- ⇝ *Contre-exemple* [44, p.224] : f $\mathcal{C}^1$ tel que $\int f$ non définie
- ⇝ *Exemple* [6, p.444] : Dérivée de fonctions usuelles
- ⇝ *Exemple* [6, p.444] : Calcul de $\int_0^\infty \frac{1-\cos xt}{t^2} dt$
- ⇝ *Remarque* : Extension à $\mathcal{C}^\infty$
- ⇝ *Exemple* [6, p.442] : $\int_0^\infty e^{-at} f(t) dt$
- ⇝ *Application* [39, p.163] : Calcul de Gauss

II. Étude d'intégrales à paramètres particulières

A. *La fonction* Γ

- ⇝ *Définition* [39, p.159] : Fonction Gamma, Γ
- ⇝ *Théorème* [64, p.179] : Caractérisation sur $\mathbb{R}$
- ⇝ *Proposition* [39, p.159] : Propriétés de Γ
- ⇝ *Application* [64, p.179] : $\Gamma = \lim_{n\to\infty} \frac{n!x^n}{x(x+1)\dots(x+n)}$

B. *Transformée de Fourier [57, p.327]*

- ⇝ *Définition* : Transformée de Fourier
- ⇝ *Exemple* : e^{-x^2}
- ⇝ *Application* : Fonction caractéristique
- ⇝ *Théorème* : Régularité de $\hat{f}$
- ⇝ *Théorème* : Inversion

III. Convolution [13, p.113] But : régulariser des fonctions. Remarque : les théorèmes de densité de déduisent de la convolution.

— *Définition* : Convolution si elle existe

A. *Existence de la convolution*

- ⇝ *Proposition* : Convolution dans L^1
- ⇝ *Proposition* : Convolution dans L^p et L^q
- ⇝ *Application* : Convolution de $\hat{f}$

B. *Régularisation de fonctions*

- ⇝ *Théorème* : Convolution et dérivation
- ⇝ *Application* : Convolution par Gaussienne
- ⇝ *Application* : Si $f \in \mathcal{C}^\infty$ alors $f * g \in \mathcal{C}^\infty$
- ⇝ *Application* : Équation de la chaleur

C. *Approximation de fonctions*

- ⇝ *Définition* : Approximation de l'identité
- ⇝ *Théorème* [39, p.284] : Théorème de Weierstrass
- ⇝ *Exemple* : Dilatation
- ⇝ *Application* [53, p.3] : Noyau de Fejer

Leçon 243 : Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

Références pour la leçon

[5] Appel, *Probabilités pour les non-probabilistes.*
[7] Arnaudies et Fraysse, *Compléments d'analyse.*
[8] Arnaudies et Fraysse, *Exercices résolus du compléments d'analyse*
[36] Francinou, Gianella et Nicolas, *Oraux X-ENS, analyse 4.*
[39] Gourdon, *Analyse.*
[44] Hauchecorne, *Les contres-exemples en mathématiques.*
[51] Marco, Thieullen et Weil, *Mathématiques pour la L2.*
[57] Queffelec et Zuily, *Éléments d'analyse pour l'agrégation.*

Développements de la leçon

Nombre de Bell	Méthode de Bernoulli

Motivation

Défense

Application : Définir de nouvelles fonctions.

Ce qu'en dit le jury

Les candidats évoquent souvent des critères (Cauchy, D'Alembert) permettant d'estimer le rayon de convergence mais oublient souvent la formule de Cauchy-Hadamard ou toute technique utilisant une majoration ou un équivalent. Le jury attend bien sûr que le candidat puisse donner des arguments justifiant qu'une série entière en 0 dont le rayon de convergence est R est développable en série entière en un point z_0 intérieur au disque de convergence et de minorer le rayon de convergence de cette série.

Sans tomber dans un catalogue excessif, on peut indiquer les formules de développement de fonctions usuelles importantes (exp, log, $\frac{1}{(1-z)}$, sin,...). S'agissant d'exemples fondamentaux et classiques, le jury attend que le candidat puisse les donner sans consulter ses notes. En ce qui concerne la fonction exponentielle, le candidat doit avoir réfléchi au point de vue adopté sur sa définition et donc sur l'articulation entre l'obtention du développement en série entière et les propriétés de la fonction. À ce propos, les résultats sur l'existence du développement en série entière pour les fonctions dont on contrôle toutes les dérivées successives sur un voisinage de 0 sont souvent méconnus. Le comportement de la série entière dans le disque de convergence vis à vis des différents modes de convergence (convergence absolue, convergence uniforme, convergence normale) doit être maîtrisé.

Le théorème d'Abel (radial ou sectoriel) trouve toute sa place mais doit être agrémenté d'exercices pertinents. Réciproquement, les théorèmes taubériens offrent aussi de jolis développements. On pourra aller plus loin en abordant quelques propriétés importantes liées à l'analyticité de la somme d'une série entière ou encore la résolution de certaines équations différentielles ordinaires par la méthode du développement en série entière.

Métaplan

I. Convergence et rayons : étude de la série

- *Définition* [7, p.19] : Série entière
- *Rappel* : Convergence des séries de fonctions

A. *Rayon de convergence [7]* Quels sont les points de convergence de la série ?

- ⇝ *Lemme* : Abel
- ⇝ *Exemple*
- ⇝ *Définition* : Cercle d'incertitude
- ⇝ *Définition* : Rayon de convergence
- ⇝ *Proposition* : Caractérisation du rayon de convergence
- ⇝ *Exemple* [44] : Convergence sur le cercle

B. *Opérations sur les séries entières [51, p.479]* Comment calculer un tel rayon de convergence lorsqu'on a une série entière ?

- ⇝ *Proposition* : Addition de rayons
- ⇝ *Proposition* : Produit de rayons
- ⇝ *Exemple* : Rayons de convergence égaux
- ⇝ *Exemple* : Égalité est stricte

C. *Calcul d'un rayon de convergence [7]*

- ⇝ *Exemple* : Via la définition
- ⇝ *Exemple* [51, p.476] : Règle de Cauchy
- ⇝ *Remarque* [39] : Alembert ⇒ Cauchy
- ⇝ *Exemple*
- ⇝ *Proposition* [51, p.475] : Règle de d'Alembert
- ⇝ *Exemple- Contre-exemple*
- ⇝ *Proposition* [51, p.477] : Règle de Cauchy–Hadamard
- ⇝ *Proposition* [7, p.24] : Opérations séries entières

II. Régularité, analycité et holomorphie : étude de la fonction Quelles sont les propriétés de la somme sur le disque de convergence de la série ?

A. *La fonction série entière [7, p.29]*

- ⇝ *Exemple* : Fonction exponentielle
- ⇝ *Proposition* : Propriétés de la fonctions
- ⇝ *Exemple* : Fonction exponentielle
- ⇝ *Application* : Unicité des coefficients
- ⇝ *Application* : Calcul d'une série numérique
- ⇝ *Proposition* : Continuité
- ⇝ *Application* [39, p.23] : Principe des zéros isolés
- ⇝ *Définition+ Proposition* [7, p.38] : Dérivabilité dans $\mathbb{C}$
- ⇝ *Application* : Équation fonctionnelle de l'exponentielle
- ⇝ *Proposition* [39, p.239] : Intégration des séries entières
- ⇝ *Théorème* : Inégalité de Parseval
- ⇝ *Théorème* : Formule de Cauchy
- ⇝ *Application* : Théorème de Liouville

B. *Résolution d'une équation différentielle* La notion de fonction est importante : elle permet de définir proprement des fonctions comme la fonction exponentielle et permet d'évaluer la somme d'une série numérique en évaluant une fonction en un point.

- ⇝ *Méthode* [7, p.57] : Résolution d'EDO avec les séries entières
- ⇝ *Proposition* [57, p.409] : Critère d'application de cette méthode
- ⇝ *Exemple* [8, p.46]
- ⇝ *Application* [36, p101] : Équation de Bessel

C. *Développement en série entière [7, p.49]* Permet de justifier la nécessité de savoir développer en série entière des fonctions et vise-versa

- ⇝ *Définition* : Formule de Taylor–Mac Laurin
- ⇝ *Exemple* : Exponentielle
- ⇝ *Définition* : Développable en série entière
- ⇝ *Contre-exemple*

- ⇝ *Proposition* [39, p.240] : Caractérisations avec les formules de Taylor
- ⇝ *Proposition* [7, p.57] : Taylor contrôlé
- ⇝ *Méthode* [51, p.493] : Calcul d'un développement en série entière
- ⇝ *Proposition* : Opération sur les développement en séries entières
- ⇝ *Exemple* : Fonctions usuelles
- ⇝ *Exemple* : Illustration des deux méthodes
- ⇝ *Définition* [7, p.72] : fonctions analytiques

III. Les séries génératrices [5, p.159]

A. *Dénombrement* Il peut être pratique de représenter les objets que l'on souhaite compté avec une série entière.

- ⇝ *Application* [33] : Nombre de Bell
- ⇝ *Application* [35] : Nombre de Bernoulli

B. *Probabilités* On peut également parler de la convergence en loi

- ⇝ *Définition* : Fonctions génératrices
- ⇝ *Proposition* : Propriétés de la fonction génératrice
- ⇝ *Application* : Fonction caractéristiques des lois usuelles
- ⇝ *Proposition* : Récupération des moments
- ⇝ *Application* : Problème du collectionneur
- ⇝ *Application* : Processus de Galton–Watson

Leçon 246 : Séries de Fourier. Exemples et applications.

Références pour la leçon

[3] El Amrani, *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels.*
[35] Francinou, Gianella et Nicolas, *Oraux X-ENS, analyse tome 2.*
[39] Gourdon, *Analyse.*
[57] Queffelec et Zuily, *Éléments d'analyse pour l'agrégation.*

Développements de la leçon

Nombre de Bernoulli | Formule de Poisson et fonction Θ

Motivation

Défense

Motivation : Historique.

Ce qu'en dit le jury

Les différents résultats autour de la convergence (L^2, Fejér, Dirichlet, ...) doivent être connus. On prendra garde au sens de la notation $\sum_{n\in\mathbb{Z}}$ (qu'il est plus prudent d'éviter car elle est souvent inadaptée). Il faut avoir les idées claires sur la notion de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux (elles ne sont pas forcément continues). Le théorème d'isométrie bijective entre espaces L^2 et l^2 doit apparaître. Dans le cas d'une fonction continue et C 1 par morceaux on peut conclure sur la convergence normale de la série Fourier sans utiliser le théorème de Dirichlet. Il est classique d'obtenir des sommes de séries remarquables comme conséquence de ces théorèmes.

On peut aussi s'intéresser à la formule de Poisson et à ses conséquences. L'existence d'exemples de séries de Fourier divergentes, associées à des fonctions continues (qu'ils soient explicites ou obtenus par des techniques d'analyse fonctionnelle) peuvent aussi compléter le contenu.

Il est souhaitable que cette leçon ne se réduise pas à un cours abstrait sur les coefficients de Fourier. La résolution d'équations aux dérivées partielles (par exemple l'équation de la chaleur ou l'équation des ondes avec une estimation de la vitesse de convergence) peut illustrer de manière pertinente cette leçon, mais on peut penser à bien d'autres applications (inégalité isopérimétrique, comportements remarquables des fonctions à spectre lacunaire,...).

Métaplan

- ⇝ *Cadre* : On se concentre uniquement sur des fonctions 2π-périodiques.
- ⇝ *Définition* : Fonctions 2π-périodiques
- ⇝ *Définition* : Convolution

I. Séries de Fourier [3, p.170]

A. *Coefficient de Fourier*

- ⇝ *Définition* : Formules de Fourier
- ⇝ *Exemple* [57, p.90] : Fonction triangle
- ⇝ *Proposition* : Propriétés élémentaires
- ⇝ *Proposition* [3, p.201] : Relation domination/régularité
- ⇝ *Exemple* [57, p.90] : Fonction signal
- ⇝ *Remarque* [3, p.177] : Coefficients réels
- ⇝ *Proposition* : Coefficients tendant vers 0
- ⇝ *Remarque* : Généralisation

B. *Série de Fourier* La question si une série de Fourier correspond à une fonction et plus précisément si un développement en série de Fourier correspond à une fonction apparaît ici et va être développée tout au long de la leçon.

- ⇝ *Définition* : Série de Fourier
- ⇝ *Exemple* : Série de $x \mapsto (2 + \cos x)^{-1}$
- ⇝ *Remarque* : On assure ni le convergence ni la convergence vers f
- ⇝ *Théorème* : Critère pratique de convergence vers f

C. *Noyaux trigonométriques*

- ⇝ *Définition* : Noyau de Dirichlet
- ⇝ *Proposition* : Caractérisation de ce noyau
- ⇝ *Remarque* : Ce n'est pas une approximation de l'unité
- ⇝ *Définition* : Noyau de Fejer
- ⇝ *Proposition* : Caractérisation de ce noyau

II. Convergence dans L^1

A. *Convergence ponctuelle*

- ⇝ *Proposition* : $f \in L^1$: convergence simple
- ⇝ *Théorème* [3, p.196] : Dirichlet ($f \in L^1$)
- ⇝ *Théorème* [3, p.195] : Dirichlet ($f \in \mathcal{C}^1_{pm}$)
- ⇝ *Théorème* : Unicité du développement
- ⇝ *Application* : Principe de localisation
- ⇝ *Application* [35] : Nombre de Bernoulli
- ⇝ *Application* [39] : Formule de Poisson
- ⇝ *Application* [3, p.217] : Résolution d'équa diff

B. *Convergence au sens de Cesàro [3, p.181]* Motivation de l'étude de la convergence de $K_n * f$.

- ⇝ *Définition* : Somme de Cesàro
- ⇝ *Théorème* : Cesàro
- ⇝ *Application* : Séries de Fourier
- ⇝ *Définition* : Convergence au sens de Cesàro
- ⇝ *Contre-exemple* : $(-1)^n$

III. Convergence dans L^2

A. *Systèmes trigonométriques [3, p.172]*

- ⇝ *Définition* : Système trigonométrique
- ⇝ *Théorème* : Approximation dans L^2 par un polynôme
- ⇝ *Définition* : Polynômes trigonométrique
- ⇝ *Définition* [3, p.38] : Base hilbertienne
- ⇝ *Théorème* : Système trigonométrique est une base hilbertienne dans L^2

B. *Théorème de Fejer*

- ⇝ *Théorème* : Fejer
- ⇝ *Application* : Théorème de Weierstrass
- ⇝ *Remarque* : Traduction des coefficients
- ⇝ *Application* : Isométrie de L^2 dans l^2
- ⇝ *Remarque* : Système trigonométrique et base
- ⇝ *Théorème* : Formule de Parseval
- ⇝ *Application* : $\forall k \in \mathbb{N}, \int_0^1 -x^k f(x)dx = 0 \Leftrightarrow f = 0$
- ⇝ *Application* [3, p.210] : Calcul d'une série

Leçon 250 : Transformation de Fourier. Applications.

Références pour la leçon

[3] El Amrani, *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels.*
[15] Bernis et Bernis, *Analyse pour l'agrégation de mathématiques : 40 développements.*
[37] Garet et Kurtzmann, *De l'intégration aux probabilités.*

Développements de la leçon

Théorème Central Limite — Formule de Poisson et théorème de Shannon

Motivation

Défense

Motivation : Historique.

Ce qu'en dit le jury

Cette leçon offre de multiples facettes. Les candidats peuvent adopter différents points de vue : L^1, L^2 et/ou distributions. L'aspect « séries de Fourier » n'est toutefois pas dans l'esprit de cette leçon ; il ne s'agit pas de faire de l'analyse de Fourier sur n'importe quel groupe localement compact mais sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^d$.

La leçon nécessite une bonne maîtrise de questions de base telle que la définition du produit de convolution de deux fonctions de L^1. En ce qui concerne la transformation de Fourier, elle ne doit pas se limiter à une analyse algébrique de la transformation de Fourier. C'est bien une leçon d'analyse, qui nécessite une étude soigneuse des hypothèses, des définitions et de la nature des objets manipulés. Le lien entre la régularité de la fonction et la décroissance de sa transformée de Fourier doit être fait, même sous des hypothèses qui ne sont pas minimales. Les candidats doivent savoir montrer le lemme de Riemann-Lebesgue pour une fonction intégrable.

La formule d'inversion de Fourier pour une fonction L^1 dont la transformée de Fourier est aussi L^1 est attendue ainsi que l'extension de la transformée de Fourier à l'espace L^2 par Fourier-Plancherel. Des exemples explicites de calcul de transformations de Fourier, classiques comme la gaussienne ou $(1+x^2)^{-1}$, paraissent nécessaires.

Pour aller plus loin, la transformation de Fourier des distributions tempérées ainsi que la convolution dans le cadre des distributions tempérées peuvent être abordées. Rappelons une fois de plus que les attentes du jury sur ces questions restent modestes, au niveau de ce qu'un cours de première année de master sur le sujet peut contenir. Le fait que la transformée de Fourier envoie $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans lui même avec de bonnes estimations des semi-normes doit alors être compris et la formule d'inversion de Fourier maîtrisée dans ce cadre. Des exemples de calcul de transformée de Fourier peuvent être donnés dans des contextes liés à la théorie des distributions comme par exemple la transformée de Fourier de la valeur principale. Dans un autre registre, il est aussi possible d'orienter la leçon vers l'étude de propriétés de fonctions caractéristiques de variables aléatoires.

La résolution de certaines équations aux dérivées partielles telles que, par exemple, l'équation de la chaleur sur $\mathbb{R}$, peut être abordée, avec une discussion sur les propriétés qualitatives des solutions.

Métaplan

- $\rightsquigarrow$ *Cadre* : On se limite à la dimension 1. Sinon, on introduit un produit scalaire dans l'exponentiel.
- $\rightsquigarrow$ *Définition* : Transformation de Fourier (si elle existe)
- $\rightsquigarrow$ *Remarque* : Plusieurs définitions

I. Transformée de Fourier dans L^1 [3, p.109]

A. *Existence de la transformée de Fourier*

- $\rightsquigarrow$ *Lemme* : Riemann-Lebesgue
- $\rightsquigarrow$ *Corollaire* : Application linéaire et continue
- $\rightsquigarrow$ *Définition* : Fourier conjuguée
- $\rightsquigarrow$ *Corollaire* : Propriétés de parité
- $\rightsquigarrow$ *Théorème* : Fonction transformée de Fourier
- $\rightsquigarrow$ *Exemple* : Classique
- $\rightsquigarrow$ *Proposition* : Symétrie et conjugaison
- $\rightsquigarrow$ *Proposition* : Translation

B. *Convolée et transformation de Fourier*

- $\rightsquigarrow$ *Proposition* : Convolution $\Rightarrow$ produit
- $\rightsquigarrow$ *Théorème* : Formule de dualité
- $\rightsquigarrow$ *Application* : Résoudre $f * e^{-2|x|} = e^{-3|x|}$
- $\rightsquigarrow$ *Proposition* : Convolution $\Leftarrow$ produit
- $\rightsquigarrow$ *Application* : Résoudre l'équation $f * f = f$
- $\rightsquigarrow$ *Théorème* : Injectivité de f
- $\rightsquigarrow$ *Théorème* : Formule d'inversion
- $\rightsquigarrow$ *Remarque* : $f \in \mathcal{L}^1 \not\Rightarrow \hat{f} \in \mathcal{L}^1$

C. *Transformée de Fourier et dérivabilité*

- $\rightsquigarrow$ *Proposition* : Dérivée de la transformée
- $\rightsquigarrow$ *Proposition* : Transformée de la dérivée
- $\rightsquigarrow$ *Application* : Résolution d'équation différentielle

D. *Application aux probabilités [37, p.212]*

- $\rightsquigarrow$ *Définition* : Fonction caractéristique
- $\rightsquigarrow$ *Exemple* : Fonction caractéristique de $\mathcal{N}(0,1)$
- $\rightsquigarrow$ *Théorème* : Théorème Central Limite
- $\rightsquigarrow$ *Théorème* : Caractérisation d'une loi
- $\rightsquigarrow$ *Proposition* : Beppo–Lévi

II. Transformée de Fourier dans L^2

A. *Existence de la transformation de Fourier* Comme $L^2 \subset L^1$, la construction est un peu délicate mais on en a toujours voulue une dans L^2 car f et $\hat{f}$ ont le même rôle.

- $\rightsquigarrow$ *Théorème* : Formule de Plancherel–Perceval
- $\rightsquigarrow$ *Théorème* : Construction de la transformée
- $\rightsquigarrow$ *Définition* : Transformée de Fourier dans L^2
- $\rightsquigarrow$ *Remarque* : Conservation des propriétés
- $\rightsquigarrow$ *Corollaire* : Formule d'inversion pour $\hat{f} \in L^1$
- $\rightsquigarrow$ *Remarque* : Interprétation comme produit scalaire
- $\rightsquigarrow$ *Remarque* : $L^1 \cap L^2$ dense dans L^2
- $\rightsquigarrow$ *Proposition* : Transformée sur $L^1 = L^2$
- $\rightsquigarrow$ *Proposition* : Symétries
- $\rightsquigarrow$ *Théorème* : Dualité

B. *Convolution et transformation de Fourier*

- $\rightsquigarrow$ *Théorème* : Produit vs Convolution
- $\rightsquigarrow$ *Théorème* : Formule d'inversion
- $\rightsquigarrow$ *Proposition* : Convolution vs Produit

III. Transformée de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

A. *Transformée de Fourier des fonctions à décroissance rapide*

- $\leadsto$ *Définition* : Fonction à décroissance rapide
- $\leadsto$ *Exemple* : $e^{-|x|}$
- $\leadsto$ *Lemme* : $x^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}), \forall \alpha$ si f décroissance rapide
- $\leadsto$ *Proposition* : Transformation de Fourier à décroissance rapide

B. *Espace de Schwartz* $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

- $\leadsto$ *Définition* : Espace de Schwartz
- $\leadsto$ *Remarque* : Intégrable, limite 0 ainsi que leur dérivée
- $\leadsto$ *Proposition* : Caractérisation de cet espace

C. *Transformée de Fourier dans* $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

- $\leadsto$ *Théorème* : Stabilité de la transformée de Fourier
- $\leadsto$ *Théorème* : Transformée de Fourier : une application
- $\leadsto$ *Application* [15] : Théorème de Shanon
- $\leadsto$ *Définition* : Suite tendant vers 0
- $\leadsto$ *Application* [15] : Formule de Poisson
- $\leadsto$ *Proposition* : $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dense dans L^2

Leçon 260 : Espérance, variance et moments d'une variable aléatoire.

Références pour la leçon

[5] Appel, *Probabilités pour les non-probabilistes.*
[12] Barde et Ledoux, *Probabilité.*
[15] Bernis et Bernis, *Analyse pour l'agrégation de mathématiques : 40 développements.*
[37] Garet et Kurtzmann, *De l'intégration aux probabilités.*
[44] Hauchecorne, *Les contres-exemples en mathématiques.*
[54] Ouvrard, *Probabilité, tome 1.*
[57] Queffelec et Zuily, *Éléments d'analyse pour l'agrégation.*

Développements de la leçon

Théorème de Weierstrass — Théorème Central Limite

Motivation

Défense

Ce qu'en dit le jury

Le jury attend des candidats qu'ils donnent la définition des moments centrés, qu'ils rappellent les implications d'existence de moments (décroissance des L^p). Les variables aléatoires à densité sont trop souvent négligées. Le candidat peut citer — mais doit surtout savoir retrouver rapidement — les espérances et variances de lois usuelles, notamment Bernoulli, binomiale, géométrique, Poisson, exponentielle, normale. La variance de la somme de variables aléatoires indépendantes suscite souvent des hésitations. Les inégalités classiques (de Markov, de Bienaymé-Chebyshev, de Jensen et de Cauchy-Schwarz) pourront être données, ainsi que les théorèmes de convergence (lois des grands nombres et théorème central limite). La notion de fonction génératrice des moments pourra être présentée ainsi que les liens entre moments et fonction caractéristique.

Pour aller plus loin, le comportement des moyennes empiriques pour une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées n'admettant pas d'espérance pourra être étudié. Pour les candidats suffisamment à l'aise avec ce sujet, l'espérance conditionnelle pourra aussi être abordée.

Métaplan

Cadre : $(\Omega, A, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire réelle

I. Espérance [37, p.143] Espérance = moyenne

A. *Espérance et premières propriétés*

- ⇝ *Définition* : Espérance de X
- ⇝ *Définition* : Variable aléatoire intégrable
- ⇝ *Exemple* : $X = \lambda$ pp, $\mathcal{E}[X] = \lambda$
- ⇝ *Exemple* : Espérance d'une indicatrice
- ⇝ *Proposition* : Espérance est linéaire
- ⇝ *Corollaire* : Variables aléatoire intégrables est un ev
- ⇝ *Proposition* : Interprétation de l'espérance
- ⇝ *Proposition* : Croissance
- ⇝ *Définition* : Variables centrées

B. *Calcul de l'espérance [37, p.148]*

- ⇝ *Théorème* : Formule de transfert
- ⇝ *Remarque* : Lien avec la loi
- ⇝ *Théorème* : Cas d'une variable discrète
- ⇝ *Corollaire* : Caractérisation
- ⇝ *Application* [5, couverture] : Lois usuelles
- ⇝ *Contre-exemple* [44, p.358] : $\mathbb{P}(X = 2^n) = \frac{1}{2^n}$
- ⇝ *Théorème* : Cas d'une variable à densité
- ⇝ *Corollaire* : Caractérisation
- ⇝ *Remarque* : f paire $\Rightarrow X$ toujours intégrable
- ⇝ *Application* [5, couverture] : Lois usuelles
- ⇝ *Contre-exemple* [44, p358] : Loi de Cauchy

C. *Applications de l'espérance*

- ⇝ *Proposition* [37, p.144] : Inégalité de Markov
- ⇝ *Application* [29] : Hachage parfait
- ⇝ *Proposition* [37, p.152] : Inégalité de Jensen
- ⇝ *Exemple* : $x \mapsto x^2$
- ⇝ *Définition* : Famille mutuellement indépendante
- ⇝ *Proposition* : Calcul de l'espérance

II. Variance La variance donne l'écartement à l'espérance.

A. *Moment d'ordre* 2 *et variance [37, p.154]*

- ⇝ *Définition* : X de carré intégrable
- ⇝ *Définition* : Variance et écart type
- ⇝ *Proposition* : Formule de calcul
- ⇝ *Exemple* [5, couverture] : Variance de lois usuelles
- ⇝ *Contre-exemple* [44, p.359] : Cas discret et cas densité
- ⇝ *Proposition* : $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$
- ⇝ *Proposition* [37, p.160] : Inégalité de Bienaymé–Chebychev
- ⇝ *Application* : Théorème de Stone–Weierstrass via Bernstein
- ⇝ *Proposition* : Inégalité de Cauchy–Schwartz

B. *Covariance*

- ⇝ *Définition* : Covariance
- ⇝ *Proposition* : Propriétés de la covariances
- ⇝ *Remarque* : Variance est une forme quadratique de forme polaire la covariance
- ⇝ *Définition* : Matrice de cavariance
- ⇝ *Remarque* : Représentation matricielle de la covariance

C. *Indépendance et corrélation*

- ⇝ *Définition* : Corrélation
- ⇝ *Contre-exemple* [44, p.360]
- ⇝ *Proposition* : Indépendance $\Rightarrow$ non corrélé
- ⇝ *Contre-exemple* : $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $Y = X^2$
- ⇝ *Proposition* : Indépendance et variance
- ⇝ *Théorème* [37, p.290] : Gaussienne et réciproque
- ⇝ *Proposition* : Identité de Bienaymé
- ⇝ *Application* : $\mathbb{P}\left[\left|\sum x_i - \mathcal{E}[X_i]\right| \geq t\right] \leq \sum \frac{VarX_i}{t^2}$

III. Moment d'ordre p

A. *Moments d'ordre p et conséquences [54, p.125]*

- ⇝ *Définition* : Moment d'ordre p
- ⇝ *Exemple* : $X \sim \mathcal{N}(0,1)$
- ⇝ *Proposition* : Inégalité de Hölder
- ⇝ *Proposition* : Inégalité de Minkowski
- ⇝ *Interprétation* : $\mathcal{E}[X^k]$ existe alors existe $\forall k' \leq k$
- ⇝ *Application* : $L^1 \supset L^2 \supset \dots$
- ⇝ *Définition* : Convergence des L^p
- ⇝ *Application* : convergence dans L^p donc dans L^q, $p \geq q$

B. *Fonction génératrice [37, p.209]*

- ⇝ *Définition* : Fonction génératrice G
- ⇝ *Remarque* : Rayon de définition
- ⇝ *Exemple* : Lois usuelles
- ⇝ *Proposition* [5, p.160] : $|G(s)| \leq 1$ et $G(1) = 1$
- ⇝ *Proposition* [5, p.160] : G est croissante et convexe
- ⇝ *Théorème* : Caractérisation de la loi
- ⇝ *Application* [5, p.195] : Processus de Galtson–Watson
- ⇝ *Théorème* : Espérance et fonction génératrice

C. *Fonction caractéristique [37, p.212]* Généralisation des fonctions génératrices aux variables via la transformée de Fourier.

- *Définition* : Fonction caractéristique
- *Théorème* : $\varphi_X = \varphi_Y \Rightarrow \mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$
- *Exemple* : $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$
- *Théorème* : Fonction caractéristique et indépendance
- *Remarque* : Interprétation en transformée de Fourier
- *Corollaire* : φ_X caractérise la loi
- *Exemple* : $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$
- *Théorème* : Fonction caractéristique et moment

IV. Convergence

- *Définition* [37, p.240] : Convergence en probabilité
- *Définition* [37, p.237] : Convergence presque sûre
- *Définition* [37, p.265] : Convergence en loi
- *Théorème* [15] : Théorème central limite
- *Théorème* : Loi faible des grands nombres
- *Théorème* [37, p.247] : Loi forte des grands nombres
- *Remarque* : Lien entre les convergence
- *Application* [15] : Approximation de la loi de Poisson

Leçon 264 : Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.

Références pour la leçon

[5] Appel, *Probabilités pour les non-probabilistes.*
[12] Barde et Ledoux, *Probabilité.*
[15] Bernis et Bernis, *Analyse pour l'agrégation de mathématiques : 40 développements.*
[25] Chesneau, *Probabilité et variables discrètes.*
[37] Garet et Kurtzmann, *De l'intégration aux probabilités.*
[44] Hauchecorne, *Les contres-exemples en mathématiques.*
[54] Ouvrard, *Probabilité, tome 1.*

Développements de la leçon

Théorème de Weierstrass

Théorème Central Limite

Motivation

Défense

— Les variables aléatoires discrètes c'est facile.

— Ce sont des variables usuelles en pratique.

— Elles approximent les variables à densité.

Ce qu'en dit le jury

Le jury attend des candidats qu'ils rappellent la définition d'une variable aléatoire discrète et que des lois usuelles soient présentées, en lien avec des exemples classiques de modélisation. Le lien entre variables aléatoires de Bernoulli, binomiale et de Poisson doit être discuté. Il peut être d'ailleurs intéressant de mettre en avant le rôle central joué par les variables aléatoires de Bernoulli.

Les techniques spécifiques aux variables discrètes, notamment à valeurs entières, devront être mises en évidence, comme par exemple la caractérisation de la convergence en loi, la notion de fonction génératrice.

Pour aller plus loin, le processus de Galton–Watson peut se traiter intégralement à l'aide des fonctions génératrices et cette voie a été choisie par plusieurs candidats : cela donne un développement de très bon niveau pour ceux qui savent justifier les étapes délicates.

Pour aller beaucoup plus loin, les candidats pourront étudier les marches aléatoires, les chaînes de Markov à espaces d'états finis ou dénombrables, les sommes ou séries de variables aléatoires indépendantes.

Métaplan

Cadre : $(\Omega, A, \mathbb{P})$ un espace probabilisé

I. Variables aléatoires discrètes

- $\rightsquigarrow$ *Définition* : Variable aléatoire discrète
- $\rightsquigarrow$ *Remarque* [54, p.20] : Cas de $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$
- $\rightsquigarrow$ *Définition* : Loi de ces variables
- $\rightsquigarrow$ *Définition* [54, p.73] : Événements indépendant

A. *Lois discrètes usuelles [25, p.15] [37, p.124]* On modélise via une urne.

1. Loi uniforme
   - $\rightsquigarrow$ *Modélisation* : Urne avec une boule de chaque couleur
   - $\rightsquigarrow$ *Définition* : Loi uniforme sur un ensemble
   - $\rightsquigarrow$ *Exemple* : Lancé de dés non truqués
2. Loi de Bernoulli
   - $\rightsquigarrow$ *Modélisation* : Urne avec deux couleurs et un tirage
   - $\rightsquigarrow$ *Définition* : Loi de Bernoulli
   - $\rightsquigarrow$ *Remarque* : Indicatrice
   - $\rightsquigarrow$ *Exemple* : Lancé de pièces (équilibré ou non)
3. Loi binomiale
   - $\rightsquigarrow$ *Modélisation* : n tirages, nombre de boules blanches
   - $\rightsquigarrow$ *Définition* : Loi binomiale
   - $\rightsquigarrow$ *Proposition* : Caractérisation via iid
   - $\rightsquigarrow$ *Exemple* : Lancer n fois la même pièce
4. Loi géométrique
   - $\rightsquigarrow$ *Modélisation* : Nombre de tirage pour obtenir une boule blanche
   - $\rightsquigarrow$ *Définition* : Loi géométrique
   - $\rightsquigarrow$ *Exemple* : Lancé jusqu'au premier "pile"
   - $\rightsquigarrow$ *Proposition* : Caractérisation via des événements indépendants
5. Loi de Poisson
   - $\rightsquigarrow$ *Modélisation* : Temps de vie d'une ampoule
   - $\rightsquigarrow$ *Définition* : Loi de Poisson
   - $\rightsquigarrow$ *Exemple* : Nombre d'erreurs de processus de fabrication
6. Loi hypergéométrique
   - $\rightsquigarrow$ *Modélisation* : Tirage simultané
   - $\rightsquigarrow$ *Définition* : Loi hypergéométrique
   - $\rightsquigarrow$ *Exemple* : Taille dans une population

B. *Conditionnement [12, p.150]*

- $\rightsquigarrow$ *Définition* : Probabilité conditionnelle
- $\rightsquigarrow$ *Exemple* : Variable aléatoire pour Poisson
- $\rightsquigarrow$ *Remarque* : Indépendance d'événements et probabilités conditionnelles
- $\rightsquigarrow$ *Définition* : Système complet
- $\rightsquigarrow$ *Exemple* : $X(\Omega) = \{x_i\}_{i \in I}$, $\{X = x_i\}_{i \in I}$
- $\rightsquigarrow$ *Proposition* : Formule de probabilité totale
- $\rightsquigarrow$ *Application* : Cas choix des pièces
- $\rightsquigarrow$ *Proposition* : Formule de Bayes
- $\rightsquigarrow$ *Application* : QCM en examen

II. Moments d'une variable discrète

A. *Espérance, variance et moments d'ordres supérieurs*

1. Espérance
   - $\rightsquigarrow$ *Définition* [37, p.143] : Espérance
   - $\rightsquigarrow$ *Théorème* [37, p.148] : Formule de transfert
   - $\rightsquigarrow$ *Corollaire* [37, p.148] : Cas d'une variable discrète
   - $\rightsquigarrow$ *Contre-exemple* [44, p.358]
   - $\rightsquigarrow$ *Proposition* [25, p.151] : Propriétés élémentaires $\mathbb{E}$
   - $\rightsquigarrow$ *Application* [25, p.151] : Lois usuelles
2. Variance [37, p.154]
   - $\rightsquigarrow$ *Définition* : Variance
   - $\rightsquigarrow$ *Définition* : Écart type
   - $\rightsquigarrow$ *Proposition* : Formule de calcul
   - $\rightsquigarrow$ *Application* [25, p.157] : Lois usuelles
   - $\rightsquigarrow$ *Contre-exemple* [44, p.359]
   - $\rightsquigarrow$ *Proposition* : Propriétés élémentaires
   - $\rightsquigarrow$ *Application* : Théorème de Weierstrass via Bernstein
3. Moment d'ordre p
   - $\rightsquigarrow$ *Définition* [54, p.128] : Moment d'ordre p
   - $\rightsquigarrow$ *Remarque* : Moment d'ordre p alors moment $\leq p$

B. *Fonction génératrice [37, p.209]*

- ⇝ *Définition* : Fonction génératrice G
- ⇝ *Exemple* : Lois usuelles
- ⇝ *Théorème* : Caractérisation de la loi
- ⇝ *Remarque* : Rayon de définition
- ⇝ *Proposition* [5, p.160] : $|G(s)| \leq 1$ et $G(1) = 1$
- ⇝ *Application* [5, p.195] : Processus de Galtson–Watson

C. *Moments et indépendance*

- ⇝ *Définition* [37, p.274] : Variables indépendantes
- ⇝ *Proposition* : Espérance et indépendance
- ⇝ *Application* : Définition de Bernoulli
- ⇝ *Exemple* : Lancé de dés
- ⇝ *Remarque* : Extension à une famille
- ⇝ *Théorème* : Espérance et fonction génératrice

III. Convergence

- ⇝ *Définition* [37, p.240] : Convergence en probabilité
- ⇝ *Définition* [37, p.237] : Convergence presque sûre
- ⇝ *Définition* [37, p.265] : Convergence en loi
- ⇝ *Théorème* [15] : Théorème central limite
- ⇝ *Application* : Intervalle de confiance
- ⇝ *Théorème* : Loi faible des grands nombres
- ⇝ *Théorème* [37, p.247] : Loi forte des grands nombres
- ⇝ *Remarque* : Lien entre les convergence
- ⇝ *Application* [15] : Approximation de la loi de Poisson
- ⇝ *Proposition* : Autres approximations

Leçon 265 : Exemples d'études et d'applications des fonctions usuelles et spéciales.

Références pour la leçon

[39] Gourdon, *Analyse.*
[43] Groux et Soulat, *Les fonctions spéciales vues par les problèmes.*
[46] Jolissant, *Fonction d'une variable complexe.*
[64] Rudin, *Principe d'analyse mathématiques.*

Développements de la leçon

Caractérisation de Γ | Formule de Poisson et fonction Θ

Motivation

Défense

Ce qu'en dit le jury

Cette leçon est très riche ; c'est une leçon de synthèse qui doit permettre d'explorer de nombreux pans du programme. Évidemment, la leçon ne doit pas se cantonner au seul champ des fonctions usuelles (logarithme, exponentielle, trigonométriques, hyperboliques et réciproques). Le jury attend surtout d'un agrégé qu'il soit en mesure de présenter rapidement les définitions et les propriétés fondamentales de ces fonctions, qu'il sache les tracer sans difficultés, qu'il puisse mener l'étude aux bornes de leur domaine, ainsi que discuter leurs prolongements éventuels, leurs développements de Taylor ou en série entière, leurs applications au calcul intégral, les équations fonctionnelles associées ou formules particulières, etc. Le jury n'attend pas un catalogue mais plutôt un choix pertinent et réfléchi, avec des applications en probabilité, convexité, études de courbes, ou autour des développements asymptotiques. Les déterminations du logarithme complexe peuvent tout à fait mériter une discussion approfondie dans cette leçon et donner lieu à des développements de bon niveau, pouvant aller jusqu'à leur interprétation géométrique.

Le domaine des fonctions spéciales est très vaste. Il faut absolument éviter l'écueil d'une taxonomie fastidieuse et dépourvue de motivation ; il vaut bien mieux se concentrer sur des exemples restreints, mais fouillés, par exemple une étude approfondie (d'une) des fonctions

Γ, ζ ou θ, leurs propriétés fonctionnelles, leurs prolongements, leur étude asymptotique aux bornes et les domaines d'applications de ces fonctions.

Il y a donc bien des manières, très différentes, de construire valablement cette leçon. Par exemple, on peut bâtir un exposé organisé selon des problématiques et des techniques mathématiques : suites et séries de fonctions, fonctions holomorphes et méromorphes, problèmes de prolongement, développements asymptotiques, calculs d'intégrales et intégrales à paramètres, transformées de Fourier ou de Laplace, etc. Mais on pourrait tout aussi bien suivre un fil conducteur motivé par un domaine d'application :

— en arithmétique pour évoquer, par exemple, la fonction ζ et la distribution des nombres premiers,

— en probabilités où la loi normale et la fonction erreur sont évidemment incontournables mais on peut aussi évoquer les lois Gamma et Bêta, les fonctions de Bessel et leurs liens avec la densité du χ^2 non centrée et celle de la distribution de Von Mises-Fisher ou plus simplement comme loi du produit de variables aléatoires normales et indépendantes, la loi ζ et ses liens avec la théorie des nombres,...

— en analyse des équations aux dérivées partielles où les fonctions spéciales interviennent notamment pour étudier le problème de Dirichlet pour le Laplacien ou l'équation des ondes,

— il est aussi possible d'évoquer les polynômes orthogonaux, leurs propriétés et leurs diverses applications, en physique (oscillateur harmonique et polynômes de Hermite), en probabilités (polynômes de Hermite pour les lois normales, de Laguerre pour les lois Gamma, de Jacobi pour les lois Bêta...), pour l'étude d'équations aux dérivées partielles ou pour l'analyse de méthodes numériques,

— en théorie des représentations de groupes avec les fonctions de Bessel,

— en algèbre en abordant les fonctions p-elliptiques.

Là encore, le jury renouvelle sa mise en garde d'éviter de faire un catalogue qui s'avérerait stérile, il s'agit bien plutôt de se tenir à détailler l'un ou l'autre de ces points de vue. Au final, cette leçon peut être l'occasion de montrer un véritable investissement personnel, adossé aux goûts du candidat.

Métaplan

I. La fonction exponentielle [64, p.157] Une fonction très importante en mathématiques dont l'étude amène à beaucoup de mathématiques.

A. *Séries entières*

- ⇝ *Définition* : Fonction analytique
- ⇝ *Corollaire* : Dérivée d'ordre supérieures
- ⇝ *Application* : Produit de Cauchy
- ⇝ *Théorème* : Convergence, dérivabilité et continuité
- ⇝ *Théorème* : Abel
- ⇝ *Théorème* : Développement en série entière et unicité

B. *Fonction exponentielle*

- ⇝ *Définition* : Fonction exponentielle
- ⇝ *Théorème* : Propriétés de cette fonction
- ⇝ *Application* : Transformée de Fourier
- ⇝ *Remarque* : Lien avec l'exponentielle
- ⇝ *Remarque* : Existence
- ⇝ *Application* : Loi sans mémoire
- ⇝ *Application* : Définition des fonctions trigonométriques
- ⇝ *Théorème* : exp est 2π-périodique
- ⇝ *Corollaire* : Fonction trigonométrique sont 2π-périodique
- ⇝ *Application* : Théorème de d'Alembert

C. *Inversion de la fonction exponentielle [46, p.91]*

- ⇝ *Définition* : ln réciproque de exp
- ⇝ *Proposition* : Pas d'inverse dans $\mathbb{C}$
- ⇝ *Remarque* : Pas de détermination sur des ouverts
- ⇝ *Remarque* : $\log(z_1 z_2) \neq \log(z_1)\log(z_2)$
- ⇝ *Proposition* : Développement du log
- ⇝ *Remarque* : Définition par primitive
- ⇝ *Définition* : Détermination (et principal) du log
- ⇝ *Remarque* : f détermination du log holomorphe
- ⇝ *Remarque* : Détermination du log sur demi-droite
- ⇝ *Application* : Définition des fonctions puissances

II. La fonction Gamma Γ La fonction Γ est un prolongement sur $\mathbb{C}$ de la fonction $n!$ sur $\mathbb{N}$

A. *Étude de cette fonction dans $\mathbb{R}_+^*$ [64, p.178]*

- ⇝ *Définition* : Γ sur $\mathbb{R}_+^*$
- ⇝ *Remarque* [43] : Formule de Gauss
- ⇝ *Proposition* : Formule de Stirling
- ⇝ *Théorème* [64] : Caractérisation
- ⇝ *Proposition* : Formule des compléments
- ⇝ *Corollaire* : $\Gamma(x) = \frac{2^{x-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)$

B. *Étude complexe de Γ*

- ⇝ *Notation* : B_0
- ⇝ *Remarque* : La fonction est bien définie
- ⇝ *Proposition* (ADMIS) : Γ se prolonge sur $\mathbb{C}$
- ⇝ *Application* : Loi Gamma
- ⇝ *Définition* : Γ sur B_0
- ⇝ *Proposition* : Propriété de cette fonction
- ⇝ *Lemme* : Expressions de Γ
- ⇝ *Théorème* : Formule des compléments

C. *Produit infini et Γ [43, p.147]* Ne pas oublier ζ.

- ⇝ *Définition* : Produit infini et convergence
- ⇝ *Proposition* [39] : Formule sommatoire de Poisson
- ⇝ *Proposition* : Définition de Γ via θ
- ⇝ *Lemme* : Caractérisation de cette convergence
- ⇝ *Application* [39] : θ de Jacobi
- ⇝ *Application* (Culturel) : les 0 de ζ

Bibliographie

[1] M. Alessandri. *Thèmes de géométrie : groupe en situation géométrique*. Dunod, 1999.

[2] G. Allaire and S.M. Kaber. *Algèbre linéaire numérique*. ellipses, 2002.

[3] M. El Amrani. *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels, niveau M1*. ellipses, 2008.

[4] M. El Amrani. *Arithmétique dans Z et dans K[X]*. ellipses, 2016.

[5] W. Appel. *Probabilités pour les non-proabilitstes*. H&K édition.

[6] J.M. Arnaudies and H. Fraysse. *Analyse*. Dunod Université, 1988.

[7] J.M. Arnaudies and H. Fraysse. *Compléments d'analyse*. Dunod Université, 1989.

[8] J.M. Arnaudies and H. Fraysse. *Exercices résolus du compléments d'analyse*. Dunod Université, 1989.

[9] M. Audin. *Géométrie*. EDP Science, 2006.

[10] A. Avez. *Calcul différentiel*. Masson, 1983.

[11] G. Bailly-Maitre. *Arithmétique et cryptologie*. ellipse, 2012.

[12] P. Barde and M. Ledoux. *Probabilité*. EDP Science, 2007.

[13] V. Beck, J. Malik, and G. Peyré. *Objectif Agrégation*. H et K, 2004.

[14] G. Berhuy. *Algèbre : le grand combat*. Calvage & Mounet, 2018.

[15] J. Bernis and L. Bernis. *Analyse pour l'agrégation de mathématiques, 40 développements*. Ellipse, 2018.

[16] F. Berthelin. *Équations différentielles*. Cassini, 2017.

[17] J. De Biasi. *Mathématiques pour le CAPES et l'agrégation Interne*. ellipse, 1998.

[18] P. Boyer. *Algèbre et géométries*. Calvage et Mounet, 2015.

[19] C. Brezinski and M. Redivo-Zaglia. *Méthodes numériques itératives*. ellipse, 2006.

[20] M. Briance and G. Pagès. *Théorie de l'intégration. 4ème édition*. Vuibert, 2006.

[21] J. Calais. *Éléments de la théorie des groupes*. puf, 1984.

[22] P. Caldero and J. Germoni. *Histoires hédonistes de groupes et de géométries, tome 1*. Calvage et Mounet, 2013.

[23] P. Caldero and J. Germoni. *Histoires hédonistes de groupes et de géométries, tome 2*. Calvage et Mounet, 2015.

[24] P. Caldero and J. Germoni. *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries, tome 2*. Calvage et Mounet, 2018.

[25] C. Chesneau. *Probabilité et variables discrètes*. ellipse, 2016.

[26] M. Cognet. *Algèbre linéaire*. Bréal, 2000.

[27] M. Cognet. *Algèbre bilinéaire*. Bréal, 2002.

[28] F. Combes. *Algèbre et géométrie*. Breal, 1998.

[29] T. Cormen, C. Leiserson, R. Rivest, and C. Stein. *Algorithmique, 3ème édition*. Dunod, 2010.

[30] J.-P. Demailly. *Analyse numérique et équations différentielles*. EDP Science, 4^{me} edition, 2016.

[31] J.D. Eiden. *Géométrie analytique classique*. Calvage & Mounet, 2009.

[32] S. Al Fakir. *Algèbre et théorie des nombres*. ellipse, 2003.

[33] S. Francinou, H. Gianella, and S.Nicolas. *Oraux X-ENS, Algèbre 1*. Cassini.

[34] S. Francinou, H. Gianella, and S.Nicolas. *Oraux X-ENS, Algèbre 2*. Cassini.

[35] S. Francinou, H. Gianella, and S.Nicolas. *Oraux X-ENS, Analyse 2*. Cassini.

[36] S. Francinou, H. Gianella, and S.Nicolas. *Oraux X-ENS, Analyse 4*. Cassini, 2012.

[37] O. Garet and A. Kurtzmann. *De l'intégration aux probabilités*. ellipses, 2011.

[38] J-M. Garnier. *Groupes et géométrie pour l'agrégation*. ellipse, 2018.

[39] X. Gourdon. *Analyse*. Les maths en tête. Ellipses, 2008.

[40] X. Gourdon. *Algèbre*. Les maths en tête. Ellipses, 2009.

[41] I. Gozard. *Théorie de Galois*. ellipse, 2009.

[42] J. Grifone. *Algèbre linéaire*. Cépaduès édition, 2015.

[43] R. Groux and P. Soulat. *Les fonctions spéciales vues par les problèmes.* Cépaduès édition.

[44] B. Hauchecorne. *Les contre-exemples en mathématiques*. Ellipses, 1988.

[45] M. Hindry. *Arithmétique*. Calvage & Mounet (tableau noir), 2008.

[46] P. Jolissant. *Fonction d'une variable complexe.* ellipses, 2016.

[47] M. Kieffer. *66 leçons pour l'agréation de mathématiques*. ellipses, 2017.

[48] J.P. Lamoitier. *Arithmétique modulaire*. ellipse, 2012.

[49] G. Laville. *Géométrie pour le capes et l'agrégation*. ellipse, 1998.

[50] J.-P. Marco. *Mathématiques L3, Analyse*. Pearson education, 2009.

[51] J.-P. Marco, P. Thieullen, and J.-A.Weil. *Mathématiques pour la L2*. Pearson education, 2007.

[52] R. Mneimne and F. Testard. *Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques*. Hermann, 1997.

[53] I. Nourdin. *Agrégation de mathématiques épeuve orale*. Dunod, 2 edition, 2006.

[54] J.Y. Ouvrard. *Probabilités 1*. Cassini, 1998.

[55] C. De Seguin Pazzis. *Invitation aux formes quadratiques*. Calvage & Mounet, 2010.

[56] D. Perrrin. *Cours d'algèbre*. Ellipse, 1996.

[57] H. Queffélec and C. Zuily. *Éléments d'analyse pour l'agrégation*. Dunod, 2013.

[58] Ramis and Warusfel. *Cours de mathématiques pures et appliquées*. De Boecl, 2010.

[59] E. Ramis, C. Deschamps, and J. Odoux. *Cours de mathématiques spéciale, tome 1*. Masson, 1998.

[60] J. Saint Raymond. *Topologie, calcul différentiel et variable complexe*. Calvage & Mounet, 2008.

[61] J.-J. Risler and P. Boyer. *Algèbre pour la licence 3*. Dunod, 2006.

[62] J.E. Rombaldi. *Éléments d'analyse réelle : CAPES et agrégation interne de mathématiques*. EDP Sciences, 2004.

[63] F. Rouvière. *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation*. Cassini, 3^{me} edition, 2009.

[64] W. Rudin. *Principe d'analyse mathématiques*. Dunod, 2006.

[65] F. Testard. *Analyse mathématique. La maîtrise de l'implicite*. Calvage & Mounet, 2012.

[66] O. Teytaud, C. Antonini, P. Borgnat, A. Chateau, and E. Lebeau. *Les maths pour l'agreg*. Dunod, 2007.

[67] J. Trignan. *La géométrie des nombres complexes*. Bréal, 1993.

[68] F. Ulmer. *Théorie des groupes*. ellipses, 2012.

[69] M. Zavidovique. *Un max de maths*. Calvage & Mounet, 2013.