Caractérisation du premier

Julie Parreaux

2018-2019

Référence du développement : Schwarzentruber [1, p.63]

Leçon où on présente le développement : 923 (Analyse lexicale et syntaxique).

1 Introduction

Lors d'une analyse syntaxique par analyse descendante (ou même ascendante) on utilise la notion de premier. Pour en avoir une caractérisation que l'on peut facilement calculé : on utilise la caractérisation suivante. Pour cela, comme dans le cas de grammaires $LL(1)$, on utilise uniquement une stratégie de dérivation gauche.

Remarques sur le développement

Ce développement permet de donner une caractérisation de l'ensemble premier.

1. Si on vérifie la caractérisation alors on est premier (à évoquer mais pas à s'étendre dessus le développement est déjà assez long).
2. Si on est premier alors on vérifie la caractérisation (par récurrence).

2 Caractérisation des premiers

On note T l'ensemble des terminaux et $\mathcal{N}$ l'ensemble des non-terminaux.

Théorème. *Premier est la plus petite partie P de $(T \cup \mathcal{N})^* \times (T \cup \{\bowtie\})$ telle que*

1. $P(a) = \{a\}$ *pour tout terminal a.*
2. $P(\epsilon) = \{\bowtie\}$.
3. *Pour toute règle $N \to \epsilon$, $P(\epsilon) \subseteq P(N)$.*
4. *Pour toute règle $N \to \alpha_1 \dots \alpha_n$, $P(\alpha_1 \dots \alpha_n) \subseteq P(N)$.*
5. *Si $\bowtie \notin P(\alpha_1)$, alors $P(\alpha_1) \subseteq P(\alpha_1 \dots \alpha_n)$.*
6. *Si $\bowtie \in P(\alpha_1)$, alors $P(\alpha_1) \setminus \{\bowtie\} \cup P(\alpha_2 \dots \alpha_n) \subseteq P(\alpha_1 \dots \alpha_n)$.*

Remarque. Le symbole $\bowtie$ est un symbole supplémentaire pour désigner la première lettre du mot vide (qui, stricto sensu, n'existe pas). Il permet de distinguer le langage engendré qui contient le mot vide à travers premier. En effet, le langage engendré par S est vide pour la grammaire $S \to S$ et $\text{Premier}(S) = \emptyset$, alors le langage engendré par S est $\{\epsilon\}$. Pour la grammaire $S \to \epsilon$ et $\text{Premier}(S) = \{\bowtie\}$.

Démonstration. P est bien définie. En effet, l'ensemble $(T \cup \mathcal{N})^* \times (T \cup \{\bowtie\})$ complet vérifie bien l'ensemble des propriétés par définition de l'ensemble $(T \cup \mathcal{N})^* \times (T \cup \{\bowtie\})$ et notamment quand on prend le point de vue fonctionnel (on est obligé de prendre l'ensemble des parties pour la seconde partie de l'ensemble).

Définition. On rappelle que la définition de Premier par

$$\text{Premier} : \begin{array}{ccl} (T \cup \mathcal{N})^* & \to & \mathcal{P}(T \cup \{\bowtie\}) \\ \alpha & \mapsto & \{a \in T \mid \alpha^* a\beta\} \cup \{\bowtie \text{ si } \alpha \to^* \epsilon\} \end{array}$$

Montrons que Premier $= P$ par double inclusion.

$P \subseteq$ Premier Premier vérifie les six conditions.

1. Premier$(a) = \{a\}$ car $a \in T$ et $a \to^* a$.
2. Premier$(\epsilon) = \{\bowtie\}$ car $\epsilon \to^* \epsilon$.
3. Soit $N \to \epsilon$. Montrons que Premier$(\epsilon) \subseteq$ Premier(N). Comme Premier$(\epsilon) = \{\bowtie\}$ (par la propriété 2), il nous faut donc montrer que $\{\bowtie\} \subseteq$ Premier(N) soit que $\bowtie \in$ Premier(N). Or $N \to \epsilon$, donc $N \to^* \epsilon$ et $\bowtie \in$ Premier(N) (par définition de Premier).
4. Soit $N \to \alpha_1 \dots \alpha_n$. Montrons que Premier$(\alpha_1 \dots \alpha_n) \subseteq$ Premier(N). Soit $e \in$ Premier$(\alpha_1 \dots \alpha_n)$.
   — Si $e = \bowtie$, alors $\alpha_1 \dots \alpha_n \to^* \epsilon$. Donc $N \to \alpha_1 \dots \alpha_n \to^* \epsilon$, soit $N \to^* \epsilon$.
   — Si $e = a$, alors $\alpha_1 \dots \alpha_n \to^* a\beta$. Donc $N \to \alpha_1 \dots \alpha_n \to^* a\beta$, soit $N \to^* a\beta$.
5. Supposons que $\bowtie \notin P(\alpha_1)$. Montrons que $P(\alpha_1) \subseteq P(\alpha_1 \dots \alpha_n)$. Soit $a \in$ Premier(α_1) ($a \neq \bowtie$ par hypothèse). Par définition de Premier, $\alpha_1 \to^* a\beta$. Comme notre stratégie est en dérivation gauche, $\alpha_1 \dots \alpha_n \to^* a\,\underbrace{\beta\alpha_2 \dots \alpha_n}_{\beta'}$. D'où $\alpha_1 \dots \alpha_n \to^* a\beta'$. Donc $a \in$ Premier$(\alpha_1 \dots \alpha_n)$.
6. Supposons que $\bowtie \in P(\alpha_1)$. Montrons que $P(\alpha_1) \setminus \{\bowtie\} \cup P(\alpha_2 \dots \alpha_n) \subseteq P(\alpha_1 \dots \alpha_n)$. Soit $a \in P(\alpha_1) \setminus \{\bowtie\} \cup P(\alpha_2 \dots \alpha_n)$, on distingue deux cas.

   Cas $a \in P(\alpha_1) \setminus \{\bowtie\}$ On se ramène à la propriété 5.

   Cas $a \in P(\alpha_2 \dots \alpha_n)$ On distingue deux cas :
   — $a = \bowtie$ car $\alpha_2 \dots \alpha_n \to^* \epsilon$. Dans cas, $\alpha_1 \dots \alpha_n \to^* \epsilon$ car $\alpha_1 \to^* \epsilon$. Donc $\bowtie \in$ Premier$(\alpha_2 \dots \alpha_n)$.
   — $a \in T$ d'où $\alpha_2 \dots \alpha_n \to^* a\beta$. Dans cas, $\alpha_1 \dots \alpha_n \to^* a\beta$ car $\alpha_1 \to^* \epsilon$. Donc $a \in$ Premier$(\alpha_1 \dots \alpha_n)$.

Donc Premier vérifie donc bien les six propriétés et par la minimalité de P, on a $P \subseteq$ Premier.

Premier $\subseteq P$ On raisonne par récurrence forte sur la longueur de la dérivation : $\forall n \in \mathbb{N}$, HR_n : "S'il existe une dérivation gauche $\alpha \to^n a\beta$, alors $a \in P(\alpha)$. S'il existe une dérivation gauche $\alpha \to^n \epsilon$, alors $\bowtie \in P(\alpha)$.".

Initialisation Montrons HR_0.

— Pour une dérivation gauche $\alpha \to^0 a\beta$ alors $\alpha = a\beta$. Montrons que $a \in P(\alpha)$.

$$a \in \{a\} \underset{(1)}{=} P(a) \underset{(5) \text{ car } (1) \text{ et } \bowtie \neq \alpha}{\subseteq} P(a\beta) \underset{(4)}{\subseteq} P(\alpha)$$

— Pour une dérivation gauche $\alpha \to^0 \epsilon$ alors $\alpha = \epsilon$. Montrons que $\bowtie \in P(\alpha)$.

$$\bowtie \in \{\bowtie\} \underset{(6)}{=} P(\epsilon) \underset{(4)}{\subseteq} P(\alpha)$$

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\forall i \leq n$, HR_i est vrai. Montrons que HR_{n+1}.

$*$ Considérons la dérivation gauche $\alpha \to^{n+1} a\beta$. Montrons que $a \in P(\alpha)$. La dérivation peut d'écrire $\alpha \to \gamma \to^n a\beta$ soit $N\alpha' \to \gamma'\alpha' \to^n a\beta$.

+ Si $N \to a\gamma''$ alors

$$a \in \{a\} \underset{(1)}{=} P(a) \underset{(5) \text{ car } \bowtie \neq a}{\subseteq} P(a\gamma') \underset{(4)}{\subseteq} P(\alpha)$$

+ Si $N \to x_1 \dots x_k$ alors

$$\underbrace{N\alpha'}_{\alpha} \to \underbrace{x_1 \dots x_k\alpha'}_{\gamma} \to^n a\beta$$

Par HR_n, $a \in P(\gamma)$. Montrons maintenant que $a \in P(N)$.

— Si $N \rightarrow^{j} \epsilon$ avec $j \leq n$, alors par HR_j (récurrence forte) $\bowtie \in P(N)$ D'où $\alpha' \rightarrow^{n-j} a\beta$ donc par HR_{n-j}, $a \in P(\alpha')$. Par la propriété 6, on a $a \in P(\alpha)$.

— Si $N \rightarrow x_1 \dots x_k$ et $x_1 \dots x_j \rightarrow^{\leq n} a\delta$ car $x_i \rightarrow a$ et $\forall j < i$ $x_j \rightarrow \epsilon$. Donc $\bowtie \in P(x_j)$, $\forall j < i$ et $x_i \dots x_k\alpha' \rightarrow^{n} a\beta$.

$$a \in \{a\} \underset{(1)}{=} P(x_i) \underset{(5)^*}{\subseteq} P(x_i \dots x_k) \underset{(6)}{\subset} P(x_{i-1} \dots x_k) \underset{(6)^*}{\subset} P(x_1 \dots x_k) \underset{(4)}{\subset} P(N)$$

Puis par la propriété 4 ou 6, $a \in P(\alpha)$.

$*$ Considérons la dérivation gauche $\alpha \rightarrow^{n+1} \epsilon$. La dérivation peut d'écrire $\underbrace{N\alpha'}_{\alpha} \rightarrow \underbrace{x_1 \dots x_k\alpha'}_{\gamma} \rightarrow^{n} \epsilon$.

$+$ $x_1 \dots x_k \rightarrow^{\leq n} \epsilon$ alors, par hypothèse de récurrence

$$\bowtie \in P(x_1 \dots x_k) \underset{(4)}{\subseteq} P(N)$$

$+$ $\alpha' \rightarrow^{\leq n} \epsilon$ alors, par hypothèse de récurrence

$$\bowtie \in P(\alpha') \underset{(6)}{\subseteq} P(\alpha)$$

$\square$

Références

[1] F. Schwarzentruber R. Legendre. *Compilation : Analyse lexicale et syntaxique du texte à sa structure en informatique*. Reference Sciences. Ellipses, 2015.