Les fonctions μ-récursives sont équivalentes aux fonctions λ-définissables

Julie Parreaux

2018-2019

Référence du développement : Hanking [1, p.88]

Leçon où on présente le développement : 929 (Lambda-calcul).
Leçons où on peut l'évoquer : 912 (Fonctions récursives) ; 913 (Machines de Turing) ; 914 (Décidabilité, indécidabilité).

1 Introduction

Le λ-calcul est un modèle aussi expressif que les machines de Turing ou encore que les fonctions μ-récursives. Il fait alors partis des modèles vérifiant la thèse de Church et permettant de délimiter la frontière du calculable. Dans ce document, on ne s'intéresse à l'équivalence entre les fonctions λ-définissable et les fonctions μ-récursives (pour le λ-calcul c'est l'équivalence la plus facile).

Remarques sur le développement

Le développement se fait par induction structurelle des fonctions μ-récursives. Il faut faire attention car il faut bien connaître les différentes représentations de ces dites fonctions.

2 Les fonctions μ-récursives sont λ-définissables

On utilise la représentation des entiers de Barendregt pour coder nos entiers.

Théorème. *Les fonctions μ-récursives sont λ-définissables*

Démonstration. Soit φ une fonction μ-récursive. On raisonne par induction sur φ.

Cas $\varphi = \mathbb{O}$ $[\varphi] = \lambda x. [0]_B$.

Cas $\varphi = \pi_i^p$ $[\varphi] = \lambda x_0 \dots x_p.x_i$.

Cas $\varphi =$ succ $[\varphi] = \lambda x. \langle F, x\rangle$.

Cas de la composition Dans ce cas, on a $\varphi = \chi(\psi_1, \dots, \psi_k)$. Soit G le représentant de χ et F_i ceux des ψ_i (existent par induction). Alors, $[\varphi] = \lambda x.G\,(F_1 x, \dots, F_k x)$.

Cas de la récursivité Dans ce cas, on a $\varphi(0, n) = \psi(n)$ et $\varphi(k+1, n) = \chi(\varphi(k, n), k, n)$. Soit G et H les représentants de ψ et χ (existent par induction). On note $C =$ if $\textsc{Zero}\ x$ then Gy else $H\,(b(\mathsf{pred}\ x)y)\,(\mathsf{pred}\ x)y$. Alors $[\varphi] = \Theta\,(\lambda fxy.C)$. Par récurrence sur k, montrons que H_k : "$[\varphi]\,[k]\,[n] =_\beta [\varphi(k,n)]$".

Initialisation Si $k = 0$, alors $[\varphi]\,[k]\,[n] \to_\beta^* G\,[n] =_\beta [\chi(n)] =_\beta [\varphi(0,n)]$.

Hérédité Soit $k \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait H_k. Montrons que nous avons H_{k+1}.

$$
\begin{array}{rcll}
[\varphi]\,[k+1]\,[n] & \to_\beta^* & H\,([\varphi]\,(\mathsf{pred}\,[k+1]\,[n]))\,(\mathsf{pred}\,[k+1])\,[n] & \text{(Application de la } \beta\text{-rédution)} \\
& \to_\beta & H\,([\varphi]\,[k]\,[n])\,[k]\,[n] & \text{(Définition de pred)} \\
& =_\beta & H\,[\varphi(k,n))\,[k]\,[n] & \text{(Par } H_k) \\
& =_\beta & [\psi\,(\varphi(k,n), k, n)] & \text{(Par induction)} \\
& =_\beta & \varphi(k+1, n) & \text{(Par définition)}
\end{array}
$$

Cas de la minimisation Dans ce cas, $\varphi(n) = \mu_k(\chi(k, n) = 0)$. Soit P un λ-terme et notons

$$\begin{aligned} H_P &= \Theta\,(\lambda hz.\text{if } Px \text{ then } z \text{ else } h\,(\mathsf{succ}\ z)) \\ \mu_P &= H_P\,[0] \end{aligned}$$

Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P\,[n]_B =_\beta T$ ou $P\,[n]_B = F$ et qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $P\,[n]_B = T$. Montrons que si $\mu_n(P\,[n]_B = T)$ alors $\mu P =_\beta [n]$. En effet, si $k < n$,

$$H_P\,[k] \to_\beta^* \text{ if } P\,[k] \text{ then } [k] \text{ else } H_P\,(\mathsf{succ}\ [k]) \to_\beta^* H_P\,[k+1]$$

Donc par récurrence, $\mu_P =_\beta [n]$ donc si G est un représentant de χ (existe par induction), on pose $[\varphi] = \lambda y.\mu\,(\lambda x.Gxy)$.

□

3 Les fonctions λ-définissables sont μ-récursives

La réciproque qui nous permet de montrer que le λ-calcul est aussi expressif que les fonctions μ-récursives est plus délicat. Il demande à montrer que le graphe de la fonction λ-définissable que nous considérons soit récursivement énumérable. Puis grâce à la caractérisation de RE via les fonctions μ-récursives on obtient que ce graphe est l'image d'une fonction μ-récursive (cette preuve n'est pas constructive).

Références

[1] C. Hankin. *Lambda Calculi : A Guide for Computer Scientists*. Graduate texts in computer science. Clarendon Press, 1994.