Caractérisation de la fonction Γ sur $\mathbb{R}$

Julie Parreaux

2018-2019

Référence du développement : Rudin [1, p.179].

Leçons où on présente le développement : 229 (Fonctions monotones, fonctions convexes) ; 239 (Fonctions définie par une intégrale) ; 265 (Fonctions usuelles et spéciales).

1 Introduction

La fonction Γ est une fonction spéciale permettant de prolonger la fonction factorielle sur $\mathbb{R}$ puis $\mathbb{C}$ (sauf sur les entiers négatifs). C'est une fonction très importante car elle possède de nombreuses propriétés qui ont des applications dans l'ensemble des mathématiques (lien avec la fonction ζ de Rieman). L'objet de ce développement est d'en donner une caractérisation sur les réels.

2 Caractérisation de la fonction Γ

Théorème. *Soit f une fonction définie, positive sur $]0, +\infty[$ et vérifiant*

1. $f(x+1) = xf(x)$;
2. $f(1) = 1$;
3. *La fonction* $\ln f$ *est convexe sur* $]0, +\infty[$.

Alors, $f = \Gamma$.

Schéma du développement

1. La fonction Γ vérifie les trois propriétés.
2. Il existe une unique fonction vérifiant ces trois propriétés pour $x > 0$.

Démonstration. Soit f une telle fonction vérifiant les trois propriétés.

Étape 1 : la fonction Γ vérifie les trois propriétés

1. Montrons que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

$$\begin{array}{rcll}
\Gamma(x+1) & = & \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt & \text{(Définition de } \Gamma\text{)} \\
& = & \lim_{A \to +\infty} \int_0^A t^x e^{-t} dt & \text{(Définition de la limite)} \\
& = & \lim_{A \to +\infty} \left(\left[-t^x e^{-t} \right]_0^A - \int_0^A -x t^{x-1} e^{-t} dt \right) & \text{(Par intégration par partie } u = t^x \text{ et } v = -e^{-t}\text{)} \\
& = & \lim_{A \to +\infty} \left(t^A e^{-A} + x \int_0^A t^{x-1} e^{-t} dt \right) & \text{(Calcul et manipulation de l'intégrale)} \\
& = & x \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt & \text{(Calcul de la limite)} \\
& = & x\Gamma(x) & \text{(Définition de la fonction } \Gamma\text{)}
\end{array}$$

2. Montrons que $\Gamma(1) = 1$.

$$\begin{array}{rcll} \Gamma(1) & = & \int_0^{+\infty} e^{-t}dt & \text{(Définition de } \Gamma \text{ évaluer en 1)} \\ & = & \left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} & \text{(Primitive)} \\ & = & e^0 & \text{(Calcul)} \\ & = & 1 & \end{array}$$

3. Montrons que $\ln\Gamma$ est convexe sur $]0, +\infty[$. Soient $p > 1$ et q tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

$$\begin{array}{rcll} \Gamma(\frac{x}{p} + \frac{y}{q}) & = & \int_0^{+\infty} t^{\frac{x}{p}+\frac{y}{q}-1} e^{-t}dt & \text{(Définition de } \Gamma \text{ évaluer en 1)} \\ & = & \int_0^{+\infty} t^{\frac{x}{p}+\frac{y}{q}-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} e^{-\frac{t}{p}-\frac{t}{p}}dt & \text{(Car } 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\text{)} \\ & = & \int_0^{+\infty} \underbrace{\left(t^{\frac{x}{p}-\frac{1}{p}} e^{-\frac{t}{p}}\right)}_{f} \underbrace{\left(t^{\frac{y}{q}-\frac{1}{q}} e^{-\frac{t}{q}}\right)}_{g} dt & \text{(Manipulation des puissances)} \\ & \leq & \left(\int_0^{+\infty} \left(t^{\frac{x}{p}-\frac{1}{p}} e^{-\frac{t}{p}}\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{+\infty} \left(t^{\frac{y}{q}-\frac{1}{q}} e^{-\frac{t}{q}}\right)^q dt\right)^{\frac{1}{q}} & \text{(Par Holder)} \\ & = & \left(\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{+\infty} t^{y-1}e^{-t}dt\right)^{\frac{1}{q}} & \text{(Utilisation de la puissa,ce)} \\ & = & \Gamma(x)^{\frac{1}{p}} + \Gamma(x)^{\frac{1}{q}} & \end{array}$$

Appliquons la définition de la connexité à la fonction $\ln\Gamma$ avec $\lambda = \frac{1}{p}$.

$$\begin{array}{rcll} \ln\left(\Gamma(\frac{x}{p} + \frac{y}{q})\right) & \leq & \ln\left(\Gamma(\frac{x}{p})^{\frac{1}{p}})\Gamma(\frac{y}{q})^{\frac{1}{q}})\right) & \text{(Croissance de ln et précédent)} \\ & = & \frac{1}{p}\ln\left(\Gamma(\frac{x}{p}))\right) + \frac{1}{q}\ln\left(\Gamma(\frac{y}{q}))\right) & \text{Propriété de la fonction ln} \end{array}$$

Étape 2 : il existe une unique fonction vérifiant ces trois propriétés pour $x > 0$ Il existe une unique fonction vérifiant les trois propriétés pour $x > 0$.

— Par l'étape 1, il suffit de l'établir pour $x \in]0, 1]$ (on translate ensuite).

— Soit f une fonction vérifiant ces trois propriétés. On pose $\varphi = \ln f$.

  — On a $\varphi(x + 1) = \ln x + \varphi(x)$

$$\begin{array}{rcll} \varphi(x+1) & = & \ln(f(x+1)) & \text{(Définition de } \varphi\text{)} \\ & = & \ln(x + f(x)) & \text{(Propriété 1 de } f\text{)} \\ & = & \ln(x) + \ln(f(x)) & \text{(Propriété de ln)} \\ & = & \ln(x) + \varphi(x) & \text{Définition de } \varphi \end{array}$$

  — On a $\varphi(1) = 1$

$$\begin{array}{rcll} \varphi(1) & = & \ln(f(1)) & \text{(Définition de } \varphi\text{)} \\ & = & \ln(0) & \text{(Propriété 2 de } f\text{)} \\ & = & 1 & \text{(Propriété de ln)} \end{array}$$

  — φ est connexe (par la propriété 3 de f).

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, 1]$. Par connexité de φ, on applique l'inégalité des trois pentes.

  — Par l'inégalité des trois pentes, appliquée en $n \leq n + 1 + x \leq n + 2$ (car $x < 1$).

$$\begin{array}{rclcll} \frac{\varphi(n+1)-\varphi(n)}{n+1-n} & \leq & \frac{\varphi(n+1+x)-\varphi(n)}{n+1+x-n} & \leq & \frac{\varphi(n+1+x)-\varphi(n)}{n+1+x-n} & \text{(Inégalité des trois pentes)} \\ \varphi(n+1) - \varphi(n) & \leq & \frac{\varphi(n+1+x)-\varphi(n)}{1+x} & \leq & \frac{\varphi(n+1+x)-\varphi(n)}{x} & \text{(Calcul)} \\ \varphi(n+1) - \varphi(n) & \leq & \frac{\varphi(n+1+x)-\varphi(n)}{x} & \text{(Inégalité)} & & \end{array}$$

— Par l'inégalité des trois pentes, appliquée en $n+1 \leq n+1+x \leq n+2$ (car $x < 1$).

$$\begin{array}{rcll} \frac{\varphi(n+1+x)-\varphi(n+1)}{n+1+x-n-1} & \leq & \frac{\varphi(n+2)-\varphi(n+1)}{n-1-n+2} & \text{(Inégalité des trois pentes)} \\ \frac{\varphi(n+1+x)-\varphi(n+1)}{x} & \leq & \varphi(n+2)-\varphi(n+1) & \text{(Calcul)} \end{array}$$

— On obtient alors la double inégalité suivante :

$$\begin{array}{rcccll} \varphi(n+1)-\varphi(n) & \leq & \frac{\varphi(n+1+x)-\varphi(n+1)}{x} & \leq & \varphi(n+2)-\varphi(n+1) & \text{(Double inégalité)} \\ \varphi(n)+\ln(n)-\varphi(n) & \leq & \frac{\varphi(n+1+x)-\varphi(n)}{x} & \leq & \varphi(n+1)+\ln(n+1)-\varphi(n+1) & (\varphi(x+1)=\varphi(x)+\ln x) \\ \ln(n) & \leq & \frac{\varphi(n+1+x)-\varphi(n)}{x} & \leq & \ln(n+1) & \text{(Simplication)} \end{array}$$

— Étudions de plus près cette inégalité.

— $\varphi(n+1+x) = \varphi(x) + \ln(x(x+1)\dots(x+n))$. Montrons le par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : $n = 0$ Par une des propriétés de φ.

Hérédité : $n \in \mathbb{N}$ Soit n tel que $\varphi(n+1+x) = \varphi(x) + \ln(x(x+1)\dots(x+n))$.

$$\begin{array}{rcll} \varphi(n+2+x) & = & \varphi(n+1+x)+\ln(n+1+x) & \text{(Propriété de } \varphi) \\ & = & \varphi(x)+\ln(x(x+1)\dots(x+n))+\ln(n+1+x) & \text{(Hypothèse de récurrence)} \\ & = & \varphi(x)+\ln(x(x+1)\dots(x+n)(n+1+x)) & \text{(Propriété de ln)} \end{array}$$

— $\varphi(n+1) = \ln(n!)$. Montrons le par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : $n = 0$ Par une des propriétés de φ et de ln.

Hérédité : $n \in \mathbb{N}$ Soit n tel que $\varphi(n+1) = \ln(n!)$.

$$\begin{array}{rcll} \varphi(n+2) & = & \varphi(n+1)+\ln(n+1) & \text{(Propriété de } \varphi) \\ & = & \ln(n!)+\ln(n+1) & \text{(Hypothèse de récurrence)} \\ & = & \ln((n+1)!) & \text{(Propriété de ln)} \end{array}$$

— On en déduit que

$$\begin{array}{rcccll} 0 & \leq & \frac{\varphi(n+1+x)-\varphi(n)}{x} - \ln n & \leq & \ln(n+1)-\ln n & \text{(Soustraction de } \ln n) \\ 0 & \leq & \frac{\varphi(x)+\ln(x(x+1)\dots(x+n))-\ln(n!)}{x} - \ln n & \leq & \ln(n+1)-\ln n & \text{(Propriétés)} \\ 0 & \leq & \varphi(x)-(\ln(x\dots(x+n))-\ln(n!)+x\ln n) & \leq & x(\ln(n+1)-\ln n) & \text{(Mutiplication par } x) \\ 0 & \leq & \varphi(x)-\ln\left(\frac{n!n^x}{x(x+1)\dots(x+n)}\right) & \leq & x\left(\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\right) & \text{(Propriété de ln)} \end{array}$$

Comme $x\left(\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\right)$ tend vers 0 lorsque n tend vers ∞, on a que $\varphi(x) - \ln\left(\frac{n!n^x}{x(x+1)\dots(x+n)}\right)$ tend vers 0 lorsque n tend vers ∞.

On en déduit que si f vérifie les trois propriétés, $f = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)\dots(x+n)}$. Par unicité de la limite, $f = \Gamma$ (Γ vérifie les propriétés et l'unicité nous donne une seule fonction). □

Remarque. On remarque qu'on a démontrer que $\Gamma = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)\dots(x+n)}$. Cette formule est la formule d'Euler.

Références

[1] W. Rudin. *Principe d'analyse mathématiques*. Dunod, 2006.