Théorème de Cauchy–Lipschitz global

Julie Parreaux

2018-2019

Référence du développement : Rouvière [1, p.180].

Leçons où on présente le développement : 203 (Compacité) ; 208 (Espace vectoriel normé) ; 220 (Équations différentielles (non linéaires)) ; 221 (Équations différentielles linéaires).
Leçons où il peut être évoqué : 226 (Suites récurrentes).

1 Introduction

Le théorème de Cauchy–Lipschitz trouve de nombreuses applications dans le domaine des équations différentielles car il donne un résultat d'existence et d'unicité de solution pour des équations différentielles. Ici nous allons montrer une version plus forte.

Théorème 1. *Soient $\mathbb{R}^m$ muni de sa norme $||.||$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ une application continue, supposée globalement lipschitzienne en y au sens suivant : pour tout compact $K \subset I$, il existe $k > 0$ tel que pour tous $t \in K$, $y, z \in \mathbb{R}^m$,*

$$||f(t,y) - f(t,z)|| \leq k||y - z||$$

Alors, pour tous $t_0 \in I$ et $x \in \mathbb{R}^m$, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' &= f(t,y) \\ y(t_0) &= x \end{cases}$$

admet une unique solution $t \mapsto y(t)$ qui est globale (définie sur I tout entier).

Le succès de ce théorème (et de la méthode sous-jacente) repose sur son applications aux équations différentielles de la méthode des approximations successives de Picard consistant à approximer la solution à partir d'une constante grâce à des intégrales successives. En effet, lors de l'application du théorème dans cette méthode, les fonctions ne sont plus nécessairement contractante : le choix de la norme est donc cruciale et la norme utilisée dans cette démonstration est importante.

On donne ici une version forte du théorème de Cauchy–Lipschitz car on va supposer que la fonction est globalement lipschitzienne. C'est cette hypothèse qui va nous garantir l'existence d'une unique solution sur l'intervalle de définition. Ce résultat s'applique alors à tous systèmes différentiels linéaires (motivation pour la leçon 221) :

$$\begin{cases} y' &= A(t)y + b(t) \\ y(t_0) &= x \end{cases}$$

où la matrice $A(t)$ et le vecteur $b(t)$ sont continues en t sur I (le domaine de définition), ce qui garanti l'existence et l'unicité d'une solution. Cependant, l'existence d'une solution sur tout le domaine de définition ne peut être garanti sans cette hypothèse. Prenons l'exemple de l'équation où f n'est pas globalement lipschitzienne :

$$\begin{cases} y' &= y^2 \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

dont la solution $y = \frac{1}{(1-t)}$ sagement partie de 1 en 0 explose dès que le temps atteint 1.

2 Le théorème de Cauchy–Lipschitz global

Montrons maintenant le résultat que l'on souhaite que l'on rappel ici :

Théorème 2. *Soient $m \geq 1$, $||.||$ une norme de $\mathbb{R}^m$, I un intervalle non vide ($\vec{I} \neq \emptyset$) de $\mathbb{R}$ et $f : I \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ une application continue, supposée globalement lipschitzienne en y au sens suivant : pour tout compact $K \subset I$, il existe $k > 0$ tel que pour tous $t \in K$, $y, z \in \mathbb{R}^m$,*

$$||f(t,y) - f(t,z)|| \leq k||y - z||$$

Alors, pour tous $t_0 \in I$ et $x \in \mathbb{R}^m$, le problème de Cauchy

$$(C) \quad \left\{ \begin{array}{rl} y' & = f(t,y) \\ y(t_0) & = x \end{array} \right.$$

admet une unique solution $t \mapsto y(t)$ qui est globale (définie sur I tout entier).

Schéma du développement

L'idée de la preuve est de se ramené à un problème de recherche de points fixes.

1. Montrer que y est solution de (C) si et seulement si y est un point fixe de F.
2. On supposons que I est compact et on montre que F admet un unique point fixe sur I.
   (a) Montrer que $(E, ||.||_k)$ est un Banach.
      i. Montrer que $||.||_k$ est une norme.
      ii. Montrer que $||.||_k$ et $||.||_\infty$ sont équivalentes.
   (b) Montrer que F est contractante pour $||.||_k$.
3. Montrer que (C) admet une unique solution pour I quelconque.

Démonstration. On note

$$\begin{array}{rccl} F : & E = \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^m) & \to & \{I \to \mathbb{R}\} \\ & y & \mapsto & \left(t \mapsto x + \int_{t_0}^t f(s, y(s))ds\right) \end{array}$$

Étape 1 : montrons que y est solution de (C) si et seulement si y est un point fixe de F. Supposons que y est solution de (C) et montrons que y est un point fixe de F (donc $y \in E$). Comme y est solution d'une équation différentielle, y est dérivable sur I et $y' = f(., y)$. De plus, f et y sont continues (par hypothèse), donc y' est continue (par composition de fonctions continues). Par intégration, pour tout $t \in I$,

$$\begin{array}{rcll} y(t) & = & \int_{t_0}^t y'(s)ds + y(t_0) & \text{(théorème fondamental de l'analyse : } \int_{t_0}^t y'(s)ds = y(t) - y(t_0)) \\ & = & \int_{t_0}^t f(s, y(s))ds + x & (y(t_0)x \text{ et } y' = f(., y)\text{, par hypothèses)} \\ & = & F(y)(t) & \text{(définition de } F) \end{array}$$

Donc y est bien un point fixe de F.

Réciproquement, supposons que y est un point fixe de F : $y = F(y)$. Par dérivabilité de F sur I (théorème fondamental de l'analyse), y est dérivable sur I et vérifie (C).

Remarque : On se ramène à un problème de recherche de point fixe : trouver une solution au problème c'est trouver un point fixe à F.

Étape 2 : supposons que I est compact et montrons que F admet un unique point fixe sur I. Soient I compact, k la constante de Lipschitz de f, l la longueur de I (son diamètre mais c'est un intervalle de $\mathbb{R}$) et $||y||_k = \max_{t \in I}\left(e^{-k|t-t_0|}||y(t)||\right)$ une norme de E (permet d'assure que F va bien être contractante). On souhaite appliquer le théorème de point fixe, nous allons en vérifier les hypothèses.

Étape a : Montrons que $(E,||.||_k)$ est un Banach. *Étape i : commençons par monter que $||.||_k$ est bien une norme.* Cela se déduit du fait que $||.||$ est une norme de $\mathbb{R}^m$ et du bon comportement du max vis-à-vis des propriétés d'une norme. En effet, pour tout $(y,z) \in E^2$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}^m$

Séparation

$$\begin{array}{rcll} ||y||_k = 0 & \Leftrightarrow & \max_{t\in I} e^{-k|t-t_0|}||y(t)|| = 0 & \text{(Définition de } ||.||_k) \\ & \Leftrightarrow & \forall t \in I, e^{-k|t-t_0|}||y(t)|| = 0 & \text{(Définition du max)} \\ & \Leftrightarrow & ||y(t)|| = 0 & (\text{par positivité de } e^{-k|t-t_0|} \forall t \in I) \\ & \Leftrightarrow & \forall t \in I, y(t) = 0 & (\text{Car } ||.|| \text{ est une norme de } \mathbb{R}^m) \end{array}$$

Homogénéité

$$\begin{array}{rcll} ||\lambda y||_k & = & \max_{t\in I} e^{-k|t-t_0|}||\lambda y(t)|| & \text{(Définition de } ||.||_k) \\ & = & \max_{t\in I} e^{-k|t-t_0|}|\lambda|||y(t)|| & (\text{Car } ||.|| \text{ est une norme de } \mathbb{R}^m) \\ & = & |\lambda| \max_{t\in I} e^{-k|t-t_0|}||y(t)|| & \text{(Par homogénéité du max)} \\ & = & |\lambda| \, ||y||_k & \text{(Définition de } ||.||_k) \end{array}$$

Inégalité triangulaire

$$\begin{array}{rcll} ||y+z||_k & = & \max_{t\in I} e^{-k|t-t_0|}||y(t)+z(t)|| & \text{(Définition de } ||.||_k) \\ & = & \forall t \in I, e^{-k|t-t_0|}||y(t)+z(t)|| & \text{(Définition du max)} \\ & \leq & \forall t \in I, e^{-k|t-t_0|}\left(||y(t)||+||z(t)||\right) & (||.|| \text{ est une norme}) \\ & \leq & \forall t \in I, e^{-k|t-t_0|}||y(t)|| + e^{-k|t-t_0|}||z(t)|| & \text{(En développant)} \\ & \leq & \max_{t\in I}\left(e^{-k|t-t_0|}||y(t)||\right) + \max_{t\in I}\left(e^{-k|t-t_0|}||z(t)||\right) & \text{(Définition du max)} \\ & \leq & ||y||_k + ||z||_k & \text{(Définition de } ||.||_k) \end{array}$$

Étape ii : montrons maintenant que $||.||_k$ est équivalente à $||.||_\infty$ où $||y||_\infty = \max_{t\in I}||y(t)||$. Soit $t \in I$, on a :

$e^{-kl}||y||_\infty \leq ||y||_k$ car

$$\begin{array}{rcl} & l \geq |t-t_0| & (l \text{ est la longueur de } I \text{ et } t, t_0 \in I) \\ \Rightarrow & -kl \leq -k|t-t_0| & (k \text{ est un coefficient de Lipschitz donc} > 0) \\ \Rightarrow & e^{-kl} \leq e^{-k|t-t_0|} & (\text{croissance de } e) \\ \Rightarrow & e^{-kl}||y(t)|| \leq e^{-k|t-t_0|}||y(t)|| & (\text{positivité de la norme } ||.||) \\ \Rightarrow & \max_{t\in I}\left(e^{-kl}||y(t)||\right) \leq \max_{t\in I}\left(e^{-k|t-t_0|}||y(t)||\right) & \text{(croissance du max)} \\ \Rightarrow & e^{-kl}\max_{t\in I}\left(||y(t)||\right) \leq \max_{t\in I}\left(e^{-k|t-t_0|}||y(t)||\right) & \text{(homogénéité du max)} \\ \Rightarrow & \max_{t\in I} e^{-kl}||y(t)||_\infty \leq ||y(t)||_k & \text{(définition des normes)} \end{array}$$

$||y||_k \leq ||y||_\infty$ car

$$\begin{array}{rcl} & e^{-k|t-t_0|} \leq 1 & (-k|t-t_0| < 0) \\ \Rightarrow & e^{-k|t-t_0|}||y(t)|| \leq ||y(t)|| & (\text{positivité de la norme } ||.||) \\ \Rightarrow & \max_{t\in I}\left(e^{-k|t-t_0|}||y(t)||\right) \leq \max_{t\in I}\left(||y(t)||\right) & \text{(croissance du max)} \\ \Rightarrow & ||y||_k \leq ||y||_\infty & \text{(définition des normes)} \end{array}$$

Donc les normes sont bien équivalentes. De plus, comme $(E,||.||_\infty)$ est un Banach, on en déduit que $(E,||.||_k)$ est un Banach.

Remarque : Comme f est continue, $F(y)$ est une fonction continue de I dans $\mathbb{R}^m$ par composition de fonction continue, y l'est également). On en déduit que $F : E \to E$.

Étape b : montrons que F est contractante pour $||.||_k$. Soit $y,z \in E$ et $t \in I$. On distingue alors deux cas.

Cas où $t \geq t_0$ Pour $t \geq t_0$, on a :

$$F(y)(t) - F(z)(t) \underbrace{=}_{\text{par } F} \int_{t_0}^t f(s,y(s))ds - \int_{t_0}^t f(s,z(s))ds \underbrace{=}_{\text{linéarité } \int} \int_{t_0}^t \left(f(s,y(s)) - f(s,z(s))\right) ds$$

On en déduit que : $A = e^{-k(t-t_0)}||F(y)(t) - F(z)(t)||$

$$
\begin{array}{rcll}
A & \leq & e^{-k(t-t_0)} \int_{t_0}^{t} (||f(s,y(s)) - f(s,z(s))||)\, ds & \text{(norme et } \int \text{ + positivité de exp)} \\
& \leq & e^{-k(t-t_0)} \int_{t_0}^{t} (k||y(s) - z(s)||)\, ds & (f \text{ est } k\text{−lipschitzienne)} \\
& \leq & e^{-k(t-t_0)} \int_{t_0}^{t} \left(ke^{k(s-t_0)}e^{-k(s-t_0)}||y(t) - z(t)||\right) ds & \\
& \leq & e^{-k(t-t_0)} \int_{t_0}^{t} \left(ke^{k(s-t_0)}||y - z||_k\right) ds & \text{(définition du max)} \\
& \leq & e^{-k(t-t_0)} \int_{t_0}^{t} \left(ke^{k(s-t_0)}\right) ds||y - z||_k & \text{(linéarité de } \int) \\
& \leq & e^{-k(t-t_0)} \left(e^{k(s-t_0)} - 1\right) ds||y - z||_k & \text{(par primitive)} \\
& & \int_{t_0}^{t} \left(ke^{k(s-t_0)}\right) ds = \left[e^{k(s-t_0)}\right]_{t_0}^{t} = e^{k(t-t_0)} - 1 & \\
& \leq & \left(1 - e^{-k(t-t_0)}\right) ||y - z||_k &
\end{array}
$$

Cas où $t \leq t_0$ on raisonne de même en faisant attention aux bornes de l'intégrale : on va alors remplacer $\int_{t_0}^{t}$ par $\int_{t}^{t_0}$ et on obtient :

$$e^{k(t-t_0)}||F(y)(t) - F(z)(t)|| \leq \left(1 - e^{k(t-t_0)}\right) ||y - z||_k$$

On voit alors apparaître la valeur absolue autour de $t - t_0$, pour tout $t \in I$, on obtient :

$$e^{k|t-t_0|}||F(y)(t) - F(z)(t)|| \leq \left(1 - e^{k|t-t_0|}\right) ||y - z||_k$$

En passant au max sur I, on obtient :

$$||F(y)(t) - F(z)(t)||_k \leq \left(1 - e^{kl}\right) ||y - z||_k$$

Comme $\left(1 - e^{kl}\right) \leq 1$, F est contractante pour la norme $||.||_k$. On applique alors le théorème de point fixe qui nous assure l'existence d'un unique point fixe pour F sur I. Donc par le point précédent, (C) admet une unique solution sur I.

Étape 3 : montrons que (C) **admet une unique solution pour** I **quelconque.** Comme I est un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$, on peut écrire I comme la réunion d'une suite croissante de compacts contenant tous t_0, soit : $I = \cup_n K_n$ avec $t_0 \in K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_n \subset \ldots$. Par ce qui précède, notons y_n l'unique solution de (C) sur K_n :

$$\left\{ \begin{array}{ll} y_n'(t) = f(t, y_n) & t \in K_n \\ y_n(t_0) = x & \end{array} \right.$$

Si $y(t)$ est une solution de (C) sur I

$$\left\{ \begin{array}{ll} y'(t) = f(t, y) & t \in I \\ y(t_0) = x & \end{array} \right.$$

alors sa restriction à K_n vaut y_n : $y_{|K_n} = y_n$, par unicité sur K_n. D'où l'unicité de la solution de (C) sur I.

Inversement, les y_n se raccroche : la fonction $y(t) = y_n(t)$ pour tout j tel que $t \in K_n$ est bien unicité par l'unicité sur les K_n et donne une solution du I par l'exhaustivité des K_n. D'où l'existence d'une solution de (C) sur I.

□

3 Compléments autours du théorème de Cauchy–Lipschitz

Équivalence entre résultats

Le point fixe de Picard, le théorème de Cauchy–Lipschitz, le théorème des fonctions implicites et le théorème d'inversion locale sont des résultats équivalents.

Théorème de Cauchy–Lipschitz local

Avant de se mettre à la recherche des solutions, nous voulons nous assurer qu'elles existent. C'est Cauchy qui est le premier à avoir formaliser l'existence de solution (la différence entre le local et le global apparaît à ce moment dans les mathématiques).

Lemme 1. *Une fonction $y : I \to \mathbb{R}^m$ est une solution du problème de Cauchy de données initiales (t_0, y_0) si et seulement si*

1. *y est continue et $\forall t \in I$, $(t, y(t)) \in U$.*
2. *$\forall t \in I, y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, y(u))du$.*

Démonstration. $\Rightarrow$ Si y vérifie 1 et 2 alors y est différentiable et $y(t_0) = y_0$, $y'(t) = f(t, y(t))$.
$\Leftarrow$ Si y est solution d'un problème de Cauchy, y vérifie automatiquement 1 et on déduit 2 en intégrant. □

Pour montrer l'existence d'une solution, il faut étudier notre intégrale. On commence par montrer qu'une solution ne peut pas trop s'éloigner de son point initial.

Définition 1. On dit que C est un cylindre de sécurité pour l'équation (E) si toute solution $y : I \to \mathbb{R}^m$ du problème de Cauchy $y(t_0) = y_0$ avec $I \subset [t_0 - T, t_0 + T]$ reste contenue dans $\overline{B}(y_0, r_0)$.

Théorème 3 (Cauchy–Peano–Arzela)**.** *Soit $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B}(y_0, r_0)$ (avec $T \leq \min\left(T_0, \frac{r_0}{M}\right)$) un cylindre de sécurité pour l'équation $(E) : y' = f(t, y)$. Alors, il existe une solution $y : [t_0 - T, t_0 + T] \to \overline{B}(y_0, r_0)$ de (E) avec condition initiale $y'(t_0) = y_0$.*

Idée de la preuve. Utilisation du théorème d'Ascoli pour montrer l'existence d'une sous-suite uniformément convergente de solutions approchées. □

Exemple : $y' = 3\,|y|^{\frac{2}{3}}$ admet deux solutions maximales pour le problème de Cauchy : $y_{(1)}(t) = 0$ et $y_{(2)}(t) = t^3$ pour $t \in \mathbb{R}$.

Corollaire 1. *Pour tout point $(t_0, y_0) \in U$, il passe au moins une solution maximale $y : I \to \mathbb{R}^m$ de (E). De plus, l'intervalle de définition I de toute solution maximale est ouvert (on a pas d'unicité en général).*

Démonstration. On utilise la théorème qui nous assure de pouvoir prolonger la solution donnée par le théorème de Cauchy–Peano. □

Définition 2. Une fonction $f : U \to \mathbb{R}^m$ où U est un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ est dite localement lipschitzienne en y si pour tout point $(t_0, x_0) \in U$ il existe un cylindre de $C_0 = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times \overline{B}(y_0, r_0)$ et une constante $j \geq 0$ tel que f soit k-lipschitzienne en y sur C_0 : $\forall (t, y_1), (t, y_2) \in C_0$, $\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq k\|y_1 - y_2\|$.

Remarque : Pour qu'une fonction soit localement lipschitzienne en y sur U, il suffit que ces dérivées partielles en y soient continues (théorème des accroissements finis).

Nous donnons maintenant le théorème de Cauchy–Lipschitz local. Elle permet d'étudier beaucoup plus d'équations différentielles que le théorème local mais ne garantie plus l'existence et l'unicité sur le domaine de définition complet (on se limite à du local).

Théorème 4 (Théorème de Cauchy–Lipschitz local)**.** *Si $f : U \to \mathbb{R}^m$ est localement lipschitzienne en y, alors pour tout cylindre de sécurité $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B}(y_0, r_0)$, le problème de Cauchy avec condition initiale (t_0, y_0) admet une unique solution exacte $y : [t_0 - T, t_0 + T] \to U$. De plus, toute suite $y_{(p)}$ de solutions ϵ_p-approchées avec ϵ_p tendant vers 0 converge uniformément vers la solution exacte y sur $[t_0 - T, t_0 + T]$.*

Idée de la preuve. Cette version est une adaptation de la démonstration que nous présentons avec l'utilisation de cylindre de sécurité qui permettent de garantir que les hypothèses (précédentes) sont bien vérifiée. □

Corollaire 2. *Soient U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ et $f : U \to \mathbb{R}^m$ de classe $\mathcal{C}^1$. Alors pour toute données initiale $(t_0, x) \in U$, le système différentiel*

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = x \end{cases}$$

admet une solution maximale unique.

Démonstration. On remarque maintenant que par hypothèse, f n'est plus que localement lipschitzienne en y (on majore la norme de la différentielle sur le bon compact et on utilise l'inégalité de moyenne). □

Remarque : Comme pour le théorème de Cauchy–Peano, cette solution est dite maximale car elle ne peut être prolongée sur un intervalle de temps strictement plus grand. On notera que l'énoncé ne précise pas l'intervalle, ni sa taille, (il dépend de la fonction f et des données initiales).

Théorème 5 (Théorème de Cauchy–Lipschitz global [1, p.170])**.** *Soient $\mathbb{R}^m$ muni de sa norme $||.||$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ une application continue, supposée globalement lipschitzienne en y au sens suivant : pour tout compact $K \subset I$, il existe $k > 0$ tel que pour tous $t \in K$, $y, z \in \mathbb{R}^m$,*

$$||f(t,y) - f(t,z)|| \leq k||y - z||$$

Alors, pour tous $t_0 \in I$ et $x \in \mathbb{R}^m$, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' &= f(t,y) \\ y(t_0) &= x \end{cases}$$

admet une unique solution $t \mapsto y(t)$ qui est globale (définie sur I tout entier).

Exemple (Équation du pendule [1, p.170]) : Étudions l'équation du pendule $\begin{cases} u'' &= -\sin u \\ u(0) &= a \\ u'(0) &= b \end{cases}$. On se ramène à un système différentiel d'ordre 1 : $y' = f(y)$, $y(0) = x$ où $y = \begin{pmatrix} u \\ u' \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $f(y) = \begin{pmatrix} u' \\ -sinu \end{pmatrix}$. Pour la norme 1, on vérifie (grâce à l'inégalité de la moyenne) que f est globalement lipschitzienne. On applique donc le théorème qui nous donne l'existence et l'unicité d'une solution sur tout $\mathbb{R}$.

Points fixes

Le théorème de point fixe joue un rôle central en calcul différentiel, comme clef des théorèmes des fonctions inverses, des fonctions implicites et du théorème de Cauchy-Lipschitz [1, p.137]. Ce théorème est puissant (avec une preuve relativement simple) puisqu'il donne existence, unicité et une bonne méthode d'approximation de la solution.

Définition 3. Soient X un espace métrique complet (non vide), d la distance de X, et F une application de X dans lui-même. On dit que F est contractante si et seulement si, il existe une constante positive $k < 1$ telle que pour tout $x, y \in X$, $d(F(x), F(y)) \leq kd(x,y)$.

Théorème 6. *Soient X un espace métrique complet (non vide), d la distance de X, et F une application de X dans lui-même. On suppose F contractante.*

Alors, il existe un unique point fixe $a \in X$ tel que $F(a) = a$ (point fixe de F). De plus, ce point peut s'obtenir comme limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des itérés, définie par récurrence à partir d'un point quelconque $x_0 \in X$ selon $x_{n+1} = F(x_n)$. On a plus précisément pour $n \geq 1$, $d(x_n, a) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1)$.

Démonstration [1, p.159]. Pour $n \geq 1$ on a $d(x_n, x_{n+1}) = d(F(x_{n-1}), F(x_n)) \leq kd(x_{n-1}, x_n)$ (car F est contractante). Par récurrence, on en déduit que $d(x_n, x_{n+1}) \leq k^n d(x_0, x_1)$. Par inégalité triangulaire, on a alors, pour $n \geq 0$ et $n \geq 0$, $d(x_n, x_{n+p}) \leq (k^n + k^{n+1} + \cdots + k^{n+p})\, d(x_0, x_1) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1)$ (sommation d'une série géométrique de raison $k < 1$).

On a donc $d(x_n, x_{n+p}) \leq \epsilon$ pour n assez grand et $p \geq 0$ (par l'inégalité précédente et $k < 1$). Les x_n forment une suite de Cauchy de X qui converge vers un point a. En faisant tendre p vers $+\infty$ dans l'inégalité ci-dessous, on obtient $d(x_n, a) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1)$ (caractère Cauchy de la suite).

Enfin, $x_{n+1} = F(x_n)$ tend vers a (par ce qui précède) et vers $F(a)$ (F est continue car contractante). D'où $F(a) = a$ et a est un point fixe de F.

Pour l'unicité, s'il existait un deuxième point fixe b, alors $d(a,b) = d(F(a), F(b)) \leq kd(a,b)$ d'où $d(a,b) = 0$ et par les propriétés de la distance $a = b$. □

Contre-exemple : Soient $X =]0,1[$ et $F(x) = \frac{x}{2}$ une application contractante de X dans lui-même. Cependant F est sans points fixes car X n'est pas complet.

Contre-exemple : Soient $X = [0,1]$ un espace complet et $F(x) = \sqrt{x^2+1}$ une application contractante. Cependant F est sans points fixes car F ne s'applique pas de X dans lui-même puisque $F(X) = \left[1, \sqrt{2}\right]$.

Contre-exemple : Soient $X = \mathbb{R}$ un espace complet et $F(x) = \sqrt{x^2+1}$ de X dans lui-même. Cependant F est sans points fixes car F n'est pas contractante dans X même si $|F(x) - F(y)| < |x - y|$ pour $x \neq y$.

Contre-exemple : Soient $X = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ un espace complet et $F(x) = \sin x$ de X dans lui-même mais non-contractante. Cependant F possède un unique point fixe dont la suite des itérés converge très lentement.

Contre-exemple : Soient X un espace complet quelconque et $F(x) = x$ de X dans lui-même mais non-contractante. Cependant tout point de X est point fixe de F.

Corollaire 3 ([1, p.159])**.** *Soient X un espace métrique complet et F une application de X dans lui-même. On suppose qu'une certaine itéré F^p est contractante, où $p \geq 1$.*

Alors, F a un unique point fixe qui est limite de la suite $(F^n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ avec $x_0 \in X$ quelconque. De plus, ka vitesse de convergence de cette suite est géométrique selon les puissances de $k_p^{\frac{1/p}{den}}$ où k_p est la constante de Lipschitz de F^p.

Démonstration. Le théorème 6 donne a, unique point fixe de F^p et limite de la suite des $(F^{np}(x_0))_{n\geq 0}$ pour tout $x_0 \in X$. Montrons alors que a est l'unique point fixe de F. Comme $F(a) = F(F^p(a)) = F^{p+1}(a) = F^p(F(a))$, le point $F(a)$ est aussi point fixe de F^p. D'où par l'unicité de ce point fixe, $F(a) = a$, soit a est un point fixe de F. Inversement, tout point fixe de F est point fixe de F^p. D'où par l'unicité sur F^p, a est l'unique point fixe de F.

D'après le théorème 6, on a $d\left(F^{np}(x_0), a\right) \leq \frac{k_p^n}{1-k_p} d(x_0, F^p(x_0))$. En remplaçant le point initial x_0 par $F^q(x_0)$ on en déduit $d\left(F^{np+q}(x_0), a\right) \leq \frac{k_p^n}{1-k_p} d\left(F^q(x_0), F^{p+q}(x_0)\right)$ pour $q \in \{0, \ldots, p-1\}$ et $n \geq 0$. Par division euclidienne, tout entier m s'écrit $m = np + q$ avec $0 \leq q \leq p-1$. Alors, $n > \left(\frac{m}{p}\right) - 1$ et on obtient facilement $d(F^m(x_0), a) \leq C k_p^{\frac{m}{p}}$, pour $m \in \mathbb{N}$ où C est une constante indépendante de m. La suite des itérés $F^m(x_0)$ à partir d'un x_0 quelconque, converge donc vers le point fixe. La vitesse de convergence est donc géométrique selon les puissances de $k_p^{\frac{1/p}{den}}$. □

Remarque : Ce raffinement du résultat possède quelques applications que nous allons détailler ici (dans une preuve de Cauchy–Lipschitz par exemple).

Application (Point fixe et équations intégrales [1, p.175]) : Soient $I = [a, b]$ un intervalle compact, $K : I \times I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et E l'espace des fonctions réelles continues sur I, muni de la norme de la convergence uniforme. On se donne $\varphi \in E$. Pour tout $t \in I$,

1. l'équation de Fredholm $x(t) = \varphi(t) + \int_a^b K(s,t)x(s)ds$ admet une unique solution $x \in E$ si $(b-a)\max_{s,t\in I}|K(s,t)| < 1$.
2. l'équation $x(t) = \varphi(t) + \int_0^1 \lambda x(s)ds$ admet une solution unique si $\lambda \neq 1$ et admet une solution si $\lambda = 1$ et $\int_0^1 \varphi(t)dt = 0$.
3. l'équation de Volterra $x(t) = \varphi(t) + \int_a^t K(s,t)x(s)ds$ admet toujours une unique solution $x \in E$.

Démonstration.

1. Soit $F(x)(t) = \varphi(t) + \int_a^b K(s,t)x(s)ds$ pour $t \in I$. A chaque $x \in E$, l'opérateur F associe la fonction $F(x) \in E$ et le problème s'écrit donc $F(x) = x$. On a
$$|F(x)(t) - F(y)(t)| = \left|\int_a^b K(s,t)(x(s) - y(s))ds\right| \leq (a-b)\ \|K\|_\infty \|x-y\|_\infty$$
D'où $\|F(x) - F(y)\|_\infty \leq (a-b)\ \|K\|_\infty \|x-y\|_\infty$. On en déduit que F est contractante sur E si $(b-a)\|K\|_\infty = (b-a)\max_{s,t\in I}|K(s,t)| < 1$. Par complétude de E, lorsque F est contractante, elle admet un unique point fixe.
2. L'équation proposée entraîne que $x(t) = \varphi(t) + c$ où c est une constante. En intégrant de 0 à 1 l'intégrale donnée, il vient que $\int_0^1 x(t)dt = \int_0^1 \varphi(t)dt + \lambda\int_0^1 x(s)ds$, d'où en reportant $x = \varphi + c$, $(1-\lambda)c = \lambda\int_0^1 \varphi(t)dt$.
   - Si $\lambda \neq 1$, il y a une unique solution quelle que soit $\varphi \in E$: $x(t) = \varphi(t) + \frac{\lambda}{1-\lambda}\int_0^1 \varphi(s)ds$.
   - Si $\lambda = 1$, il y a une solution si et seulement si $\int_0^1 \varphi(t)dt = 0$: $x(t) = \varphi(t) + c$ où c est une constante arbitraire.
3. Soit $F(x)(t) = \varphi(t) + \int_a^t K(s,t)x(s)ds$, l'équation intégrale devient donc $F(x) = x$. On a pour $x, y \in E$ et $a \leq t \leq b$,
$$|F(x)(t) - F(y)(t)| = \left|\int_a^b K(s,t)(x(s) - y(s))ds\right| \leq \|K\|_\infty \int_a^b |x(s) - y(s)|\,ds \leq (t-a)\|K\|_\infty\|x-y\|_\infty$$
On en déduit par récurrence sur $p \geq 1$, $|F^p(x)(t) - F^p(y)(t)| \leq \frac{((t-a)\|K\|_\infty)^p}{p!}\|x-y\|_\infty$ et finalement $\|F^p(x)(t) - F^p(y)(t)\|_\infty \leq \frac{((b-a)\|K\|_\infty)^p}{p!}\|x-y\|_\infty$.
Si p est choisi suffisamment grand, F^p est contractante sur E donc admet un unique point fixe x, qui est aussi l'unique point fixe de F.

□

Références

[1] F. Rouvière. *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation.* Cassini, 3^{me} edition, 2009.