Dénombrement du nombre de zéros des solutions d'une équation différentielle.

Julie Parreaux

2018-2019

Référence du développement : Zully–Queffelec [2, p.404].

Leçons où on présente le développement : 220 (Équations différentielles non-linéaires) ; 221 (Équations différentielles linéaires) ; 224 (Développement asymptotique).
Leçons où on peut l'évoquer : 190 (Dénombrement).

1 Introduction

Résoudre des équations différentielles même linéaire peut être délicat car nous devons calculer une exponentielle de matrice (ce qui nous complique beaucoup la tâche). Lorsque le calcul de cette solution n'est pas réalisable dans de bonne condition, on est amené à se poser des questions de nature quantitative sur les solutions de l'équation que l'on considère. On peut alors se demander si les solutions admettent des zéros et combien, sont-elle développable en série entière ou encore si celles-ci sont stable.

L'objectif de ce développement est de dénombrer les zéros des solutions d'une équation différentielle qui n'est en apparence pas très désagréable. Les deux outils essentiels de notre développement est le passage en coordonnées polaires et le principe d'entrelacement de Sturm.

2 Dénombrer le nombre de solution d'une équation différentielle

Théorème. *Soient $a \in \mathbb{R}$ et $q \in \mathcal{C}^1([a, +\infty])$, $q > 0$ tels que*

$$\int_a^{+\infty} \sqrt{q(u)}du = +\infty \quad \text{et} \quad q'(x) = o(q^{3/2}(x)) \quad \text{quand } x \to +\infty$$

Soit y une solution réelle non nulle de $y'' + qy = 0$ sur $[a, +\infty[$ et soit $N(x)$ le nombre de zéros de y sur $[a, x]$. Alors

$$N(x) \sim \frac{1}{\pi} \int_a^x \sqrt{q(u)}du \quad \text{quand} \quad x \to +\infty$$

Schéma du développement

1. Changement de temps
2. Changement en coordonnées polaires via le lemme de relèvement.
3. Recherche d'un équivalent pour θ en $+\infty$.
4. Estimation du nombre de zéros de Y.
5. Estimation du nombre de zéros de y.

Démonstration. Pour cette preuve nous allons avoir besoin du lemme de relèvement (lemme 1) que nous allons énoncé et démonter plus loin (dont la démonstration est elle-même à connaître).

Étape 1 : changement de temps On effectue un changement du temps dans l'équation différentielle en posant $\tau(x) = \int_a^x \sqrt{q(u)}du$.

Comme q est de classe $\mathcal{C}^1$ et est strictement positive, $\sqrt{q}$ existe et est strictement positive. Donc τ est une bijection croissante (car $\tau' = \sqrt{(q)} > 0$, comme $q > 0$) de classe $\mathcal{C}^1$ (car $\tau' = \sqrt{(q)}$ est continue puisque q est continue) de $[a, \infty[$ sur $[0, \infty[$. Alors τ^{-1} est également une bijection croissante de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0, \infty[$ sur $[a, \infty[$ (car $f \circ f^{-1}(x) = x$ implique que $\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$).

On pose $Y = y \circ \tau^{-1}$, soit $y(x) = Y(\tau(x))$. Soit $t = \tau(x)$ la nouvelle variable de notre équation. On a alors

$$y' \underbrace{=}_{\text{dérivée d'une composition}} \tau'(x)Y'(\tau(x)) \underbrace{=}_{\text{remplacement de } \tau'} \sqrt{q(x)}Y'(\tau(x))$$

$$y'' \underbrace{=}_{\text{dérivée d'un produit}} \frac{q'(x)}{2\sqrt{q(x)}}Y'(\tau(x)) + q(x)Y''(\tau(x))$$

d'où l'équation $y'' + qy$ devient $q(x)Y''(\tau(x)) + \frac{q'(x)}{2\sqrt{q(x)}}Y'(\tau(x)) + q(x)Y(\tau(x))$. En posant, $\varphi(t) = \frac{q'(x)}{2q(x)^{\frac{3}{2}}}$ pour $y = \tau(x)$, on obtient cette nouvelle équation : $Y''(t) + \phi(t)Y'(t) + Y(t) = 0$ (en divisant par $q(x) > 0$).

Remarque. Nous avons modifier en profondeur l'équation, il est alors légitime de se demandé si ces modifications sont utiles et quelles sont les désavantages liés à celle-ci. Cette transformation nous est gagnante car Y est maintenant précédée par une constante 1. Par contre, cette transformation nous amène un terme $\varphi Y'$ qui n'existait pas avant. On remarque que $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = 0$, donc tout est comme si l'équation est $Y'' + Y = 0$.

Étape 2 : changement en cordonnées polaires via le lemme de relèvement On souhaite appliquer le lemme de relèvement (lemme 1) à Y et Y' de classe $\mathcal{C}^1([0, +\infty], \mathbb{R})$.

Montrons que Y et Y' n'ont pas de zéros en commun. En effet, supposons que $Y(t_0) = Y'(t_0) = 0$, on peut alors réécrire le problème de Cauchy est alors

$$\begin{cases} Y''(t) + \varphi(t)Y'(t) + Y(t) = 0 \\ Y(t_0) = Y'(t_0) = 0 \end{cases}$$

Par le théorème de Cauchy–Lipschitz (unicité des solutions) nous assure que $Y = 0$. Cela implique par définition de Y que $y = 0$, ce qui est absurde.

On va alors appliquer le lemme 1, et on écrit

$$\begin{cases} Y = r\sin(\theta) \\ Y' = r\cos(\theta) \end{cases}$$

avec $r, \theta \in \mathcal{C}^1([a, \infty], \mathbb{R})$.

En dérivant, on obtient :

$$Y' \underbrace{=}_{\text{dérivée}} r'\sin\theta + r\theta'\cos\theta \underbrace{=}_{\text{lemme 1}} r\cos\theta$$

$$Y'' \underbrace{=}_{\text{dérivée de } r\cos\theta} r'\cos\theta - r\theta'\sin\theta \underbrace{=}_{\text{équation}} -\varphi r\cos\theta - r\sin\theta$$

Étape 3 : étude de θ (recherche d'un équivalent) On obtient alors

$$\cos\theta Y' - \sin\theta Y'' = \overbrace{(r'\sin\theta + r\theta'\cos\theta)\cos\theta - (r'\cos\theta - r\theta'\sin\theta)\sin\theta}^{r\theta'}$$
$$r\theta'\underbrace{\left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\right)}_{1}$$

$$\cos\theta Y' - \sin\theta Y'' = \overbrace{(r\cos\theta)\cos\theta - (-\varphi r\cos\theta - r\sin\theta)\sin\theta}^{r + \varphi r\sin\theta\cos\theta}$$
$$r\underbrace{\left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\right)}_{1} + \varphi r\sin\theta\cos\theta$$

D'où en divisant par r (r qui est non nul par définition), $\theta' = 1 + \varphi\sin\theta\cos\theta$. Comme $|\sin\theta\cos\theta| \leq \frac{1}{2}$ (car $\sin\theta\cos\theta < \frac{1}{2}\sin(2\theta)$), on a $|\theta'(t) - 1| \leq \frac{1}{2}|\varphi(t)|$. Or $\lim_{t\to\infty}\varphi(t) = 0$, on en déduit que $\lim_{t\to\infty}\theta'(t) = 1$, soit $\theta(t) \sim_{t\to\infty} t$.

Étape 4 : estimation du nombre de zéros de Y. Montrons que $M(t) \sim_{t\to\infty} \frac{t}{\pi}$ où $M(t)$ est le nombre de zéros de Y sur $[0, t]$.

Soit $t_0 > 0$ tel que $\forall t \geq t_0, \theta'(t) > 0$ (possible car $\lim_{t\to\infty}\theta'(t) = 1$).

On a :

$M(t)$	$=$	$\#\{u \in [0,t], Y(u) = 0\}$	(définition de $M(t)$)
	$=$	$\#\{u \in [0,t], r(u)\sin(\theta(u)) = 0\}$	(définition de Y)
	$=$	$\#\{u \in [0,t], \sin(\theta(u)) = 0\}$	($Y'(u) > 0 \Rightarrow r(u)\sin(\theta(u)) > 0 \Rightarrow r(u) > 0$)
	$\sim$	$\#\{u \in [t_0,t], \sin(\theta(u)) = 0\}$	(manque les zéros entre 0 et t_0 (reste négligeable))
	$=$	$\#\{v \in [\theta(t_0), \theta(t)], \sin(v) = 0\}$	(changement de variables : $v = \theta(u)$)
	$=$	$\#\{k \in \mathbb{Z}, \theta(t_0) \leq k\pi \leq \theta(t)\}$	($\sin(k\pi) = 0 \forall k \in \mathbb{Z}$)
	$\sim$	$\frac{\theta(t)}{\pi}$	(nombre de $k\pi \leq \theta(t)$ est environ égal à $\frac{\theta(t)}{\pi}$)
	$\sim$	$\frac{t}{\pi}$ quand $t \to \infty$	(hypothèse $\theta(t) \sim t$)

Étape 5 : estimation du nombre de zéros de y. Montrons maintenant que $N(x) = M(\tau(x))$ où on rappelle que $N(x)$ est le nombre de zéros de y sur $[0, t]$. On a :

$M(\tau(x))$	$=$	$\#\{t \in [0, \tau(x)] Y(t) = 0\}$	(définition de M)
	$=$	$\#\{s \in [a, x] Y(\tau(s)) = 0\}$	(changement de variables $t = \tau(s)$)
	$=$	$\#\{s \in [a, \tau(x)] y(s) = 0\}$	($y(s) = Y(\tau(s))$)
	$=$	$N(s)$	(définition de N)

D'où, par ce qui précède, $N(x) \sim \frac{\tau(x)}{\pi}$ quand x tend vers $+\infty$. Ce qui conclut la preuve avec la définition de τ. $\square$

Exemples et contre-exemples d'application du théorème Ce résultat peut s'appliquer "facilement" pour Id et t^2.

Contre-exemple : $q(x) = \frac{1}{4x^2}$, $q'(x) = \frac{1}{2x^3}$ et $y'' = \frac{1}{4x^2}y = 0$.

3 Compléments autours des équations différentielles linéaires

Le lemme de relèvement

Lemme 1 (Lemme de relèvement). *Soit $y_1, y_2 \in \mathcal{C}^1([0,\infty], \mathbb{R})$ sans zéro commun et soit $w = y_1y_2' - y_1'y_2$. Si $y_1(a) + iy_2(a) = re^{i\theta_0}$, alors on peut écrire*

$$\begin{cases} y_1 = r\cos(\theta) \\ y_2 = r\sin(t\Theta) \end{cases}$$

où $r, \theta \in \mathcal{C}^1([a,\infty], \mathbb{R})$, et sont données par les formules

$$\begin{cases} r = \sqrt{y_1^2 + y_2^2} \\ \theta(x) = \theta_0 + \int_a^x \frac{w(t)}{r^2(t)}dt \end{cases}$$

Démonstration. Posons $\phi = y_1 + iy_2 \neq 0$ et $\psi(x) = \int_a^x \frac{\phi'(t)}{\varphi(t)}dt + \text{Log}\, r_0 + i\theta_0$. De plus, $\left(\varphi e^{-\psi}\right)' = \left(\varphi' - \psi'\varphi\right)e^{-\psi} = 0$. Donc $\varphi(x)e^{-\psi(x)} = \varphi(a)e^{-\psi(a)} = r_0 e^{i\theta_0} r_0^{-1} e^{-i\theta_0} = 1$. Donc $y_1 + iy_2 = e^{\varphi} = re^{\theta}$, où $r = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$ et $\theta = \Im\psi$. Or,

$$\begin{array}{rcl} \psi(x) & = & \int_a^x \frac{\phi'(t)}{\varphi(t)}dt + \text{Log}\, r_0 + i\theta_0 \\ & = & \int_a^x \frac{y_1'(t)+iy_2'(t)}{y_1(t)+iy_2(t)}dt + \text{Log}\, r_0 + i\theta_0 \\ & = & \int_a^x \frac{\left(y_1'(t)+iy_2'(t)\right)\left(y_1(t)+iy_2(t)\right)}{r^2}dt + \text{Log}\, r_0 + i\theta_0 \end{array}$$

D'où,

$$\theta(x) = \theta_0 + \int_a^x \frac{\left(y_1'(t)+iy_2'(t)\right)\left(y_1(t)+iy_2(t)\right)}{r^2}dt = \theta_0 + \int_a^x \frac{w(t)}{r^2(t)}dt$$

□

Théorème de Cauchy–Lipschitz

Il est utilisé pour vérifier qu'on peut appliqué le lemme de relèvement (lemme 1). On rappelle ici le résultat.

Il est important de savoir que ce théorème a une version générale qui est locale. On présente ici plusieures versions de ce théorème que l'on présente ici. Elle permet d'étudier beaucoup plus d'équations différentielles mais ne garantie plus l'existence et l'unicité sur le domaine de définition complet (on se limite à du local).

Théorème. *Soient U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ et $f : U \to \mathbb{R}^m$ de classe $\mathcal{C}^1$. Alors pour toute données initiale $(t_0, x) \in U$, le système différentielle*

$$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = x \end{cases}$$

admet une solution maximale unique.

Cette solution est dite maximale car elle ne peut être prolongée sur un intervalle de temps strictement plus grand. On notera que l'énoncé ne précise pas l'intervalle, ni sa taille, (il dépend de la fonction f et des données initiales).

On remarque maintenant que par hypothèse, f n'est plus que localement lipschitzienne en y (on majore la norme de la différentielle sur le bon compact et on utilise l'inégalité de moyenne). On a bien supprimer l'hypothèse très forte précédente. De plus, il existe une version de ce théorème encore plus faible où on suppose f uniquement localement dérivable en y mais on ne parlera pas de cette version [1, p.153].

Cette version est une adaptation de la démonstration que nous présentons avec l'utilisation de cylindre de sécurité qui permettent de garantir que les hypothèses (précédentes) sont bien vérifiée. On peut trouver une démonstration ici : [1, p.153].

Théorème (Cauchy–Lipschitz linéaire). *Soient $\mathbb{R}^m$ muni de sa norme $||.||$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ une application continue, supposée globalement lipschitzienne en y au sens suivant : pour tout compact $K \subset I$, il existe $k > 0$ tel que pour tous $t \in K$, $y, z \in \mathbb{R}^m$,*

$$||f(t,y) - f(t,z)|| \leq k||y - z||$$

Alors, pour tous $t_0 \in I$ et $x \in \mathbb{R}^m$, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = x \end{cases}$$

admet une unique solution $t \mapsto y(t)$ qui est globale (définie sur I tout entier).

Références

[1] J.-P. Demailly. *Analyse numérique et équations différentielles*. EDP Science, 4^{me} edition, 2016.

[2] H. Queffélec ; C. Zuily. *Éléments d'analyse pour l'agrégation*. Dunod, 2013.