Décomposition de Dunford via la méthode de Newton

Julie Parreaux

2018-2019

Référence du développement : Algèbre pour la licence [1, p.63 et p.176]

Leçons où on présente le développement : 141 (Polynôme irréductibles) ; 153 (Réduction) ; 157 (Triangulaire et nilpotent).

1 Introduction

La décomposition de Dunford permet d'écrire une matrice comme la somme de deux matrices : une matrice diagonale et une matrice nilpotente. Cette décomposition permet de simplifier quelques calculs : la puissance des matrices et l'exponentielle de matrice. De plus, la décomposition permet de mettre en place un méthode de descente de Newton.

Grâce à la théorie de l'extension de corps, D est toujours diagonalisable sur un certain corps. La décomposition de Dunford peut alors être appliquée dans ce corps : elle est toujours applicable.

2 Décomposition de Dunford

Cadre : On prend $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$. La décomposition de Dunford de A (sous l'hypothèse que le polynôme minimal de A soit scindé) nous donne l'existence et l'unicité de deux matrices $D, N \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ telle que

— $A = D + N$

— D est diagonalisable (sur $\mathbb{C}$)

— N est nilpotente

— D et N commutent

Ces matrices sont alors des polynômes en A.

Cadre pour la leçon 1410 : On prend K un sous-corps de $\mathbb{C}$. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. La décomposition de Dunford de u nous donne l'existence et l'unicité de deux matrices $D, N \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ telle que

— $A = D + N$

— D est diagonalisable (sur $\mathbb{C}$)

— N est nilpotente

— D et N commutent

Ces matrices sont alors des polynômes en u.

Schéma du développement

1. Définition de P via la preuve du lemme.
2. Remarque sur $P(X+Y)$
3. Définition de la suite de Newton par récurrence.
   (a) Montrer que pour tout M telle que $P^d(M) = 0$, alors $P'(M)$ est inversible.
   (b) Remarque sur $M = A$ (existence d'un tel M).
   (c) Existence de $(A_n)_n$ au rang $n+1$.
   (d) Calcul de B_{n+1}
4. Convergence de la suite.

Étape 1 : définition de P

Lemme. *Soit $R = \prod_{i=1}^{n}(X-\lambda_i)^{m_i}$ où $R \in \mathbb{R}[X]$ et les $\lambda_i \in \mathbb{C}$ deux à deux distincts. Soit $P = \prod_{i=1}^{n}(X-\lambda_i)$. Alors, on a $P = \frac{R}{R \wedge R'}$ et donc $P \in \mathbb{R}[X]$.*

Démonstration. Si $(X-\lambda_i)^{m_i}$ divise R, alors $(X-\lambda_i)^{m_i-1}$ divise R' : la multiplicité de λ_i dans R' est égale à $m_i - 1$. Ainsi pgcd(R, R') contient le terme $(X-\lambda_i)$ exactement $m_i - 1$ fois. Donc, $\frac{R}{R \wedge R'}$ sera divisé une unique fois par $(X-\lambda_i)$, P est alors unitaire et donc on obtient l'égalité. Donc, $P \in \mathbb{R}[X]$ ($R \in \mathbb{R}[X]$ et $R' \in \mathbb{R}[X]$, par dérivation, et $\frac{R}{R \wedge R'} \in \mathbb{R}[X]$, par division euclidienne). $\square$

On applique alors le lemme à $R = \chi_A$ ($R = \chi_u$) le polynôme caractéristique de A (u).

- P est le produit de $(X-\lambda_i)$ où λ_i décrit les valeurs propres de A (u).
- P est à racine simple et vérifie donc $P \wedge P' = 1$ (multiplicité tombe à zéro).

Donc $P \in \mathbb{R}[X]$.

Étape 2 : étude de $P(X+Y)$

Remarque : Par le théorème de Taylor avec le reste intégral : $P(X+Y) = P(X) + YP'(X) + \underbrace{Y^2 \int_0^1 (1-t)P''(X+tY)dt}_{Q(X,Y) \in \mathbb{R}[X,Y]}$.

Étape 3 : étude de la suite de Newton On pose $A_0 = A$ et $A_{n+1} = A_n - P(A_n)(P'(A_n))^{-1}$. Il nous faut donc vérifier que $P'(A_n)^{-1}$ existe, c'est-à-dire que $P'(A_n)$ est toujours inversible. On le montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. On pose $\mathcal{P}_n$: "$(A_n)_n$ existe jusqu'au rang n et il existe $B_n \in \mathbb{R}[X]$, $P(A_n) = P(A)^{2^n} B_n(A)$".

Initialisation $n = 0$, on pose alors $B_0 = P$. Ce qui conclut.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}_n$ soit vérifié.

1. Montrons que pour toute matrice M tel que $P^d(M) = 0$, on a $U(M)P'(M) = I$.
   - $P^d \wedge P' = 1$ (les racines de P ne sont pas celles de P').
   - On applique alors Bézout $\exists U, V \in \mathbb{R}[X]$ tels que $VP^d + UP' = 1$.
     - On évalue cette égalité en M : $U(M)P'(M) = I - V(M)P^d(M)$.
     - On en déduit que $U(M)P'(M) = I$: $P'(M)$ est donc inversible par un inverse facilement calculable (Bézout et évaluation).
2. Remarque si $M = A$. Comme χ_A divise P^d ($P^d = \frac{\chi_A^d}{(\chi_A \wedge \chi_A')^d}$) : $P^d(A) = 0$ par Cayley-Hamilton. donc il existe une matrice M vérifiant la propriété précédente.
3. Montrons l'existence de A_{n+1}. Pour cela, montrons que $U(A_n)P'(A_n) = I$. Par la première étape dans l'hérédité, il nous suffit de montrer que $P^d(A_n) = 0$.

$$\begin{array}{rcll} P^d(A_n) & = & P(A_n)^d & \text{(même chose mais on inverse la loi)} \\ & = & \left(P(A)^{2^n} B_n(A)\right)^d & P(A_n) = P(A)^{2^n} B_n(A) \text{ par hypothèse} \\ & = & 0 & P(A) = 0 \end{array}$$

   Donc, A_{n+1} existe car $P'(A_n)^{-1}$ existe.
4. Calculons B_{n+1}.
   - On pose $Y_n = P(A_n)U(A_n) \in \mathbb{R}[X]$. Exprimons $P(A_{n+1})$ en fonction de Y_n.

$$\begin{array}{rcll} P(A_{n+1}) & = & P(A_n - Y_n) & (A_{n+1} = A_n - Y_n) \\ & = & P(A_n) - Y_n P'(A_n) + Y_n^2 \tilde{Q}(A_n, -Y_n) & \text{(Taylor avec reste intégral)} \end{array}$$

   - Montrons que $P(A_n) - Y_n P'(A_n) = 0$.

$$\begin{array}{rcll} P(A_n) - Y_n P'(A_n) & = & P(A_n) - P(A_n)U(A_n)P(A_n) & \text{(en remplaçant } Y_n) \\ & = & P(A_n) - P(A_n) & (U(A_n) \text{ inverse de } P(A_n)) \\ & = & 0 & \end{array}$$

— En déduire une expression de $P(A_{n+1})$.

$$\begin{aligned} P(A_{n+1}) &= P(A_n)^2 U(A_n)^2 \tilde{Q}(A_n, -Y_n) && \color{blue}{(Y_n^2 = P(A_n)^2 U(A_n)^2)} \\ &= P(A)^{2^{n+1}} B_n^2(A) U(A_n) \tilde{Q}(A_n, -Y_n) && \color{blue}{(\text{par } \mathcal{P}_n)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

— On pose $B_{n+1}(A) = B_n^2(A) U(A_n) \tilde{Q}(A_n, -P(A_n)U(A_n)) \in \mathbb{R}[A]$.

Donc on a $\mathcal{P}_{n+1}$. Ce qui achève la récurrence.

Étape 5 : Convergence

— Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $2^n < d$, ainsi $P(A)^{2^n} B_n(A) = 0$ car $P^d(A) = 0$. Donc, il existe un rang tel que $A_{n+1} = A_n$ et la suite stagne.

— Notons $D = A_n$ cette limite : $P(D) \underbrace{=}_{\text{limite}} P(A_n) \underbrace{=}_{\text{précédent}} 0$. Donc D est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

— Posons $N = A - D$.

$$\begin{aligned} N &= A_0 - A_n && \color{blue}{(D = A_n, A_0 = A)} \\ &= \textstyle\sum_{k=0}^{n-1} A_k - A_{k+1} && \color{blue}{(\text{Introduction de la série téléscopique})} \\ &= \textstyle\sum_{k=0}^{n-1} P(A_k) U(A_k) && \color{blue}{(\text{Définition de } A_{k+1})} \end{aligned}$$

De plus, pour tout k, $P(A)$ divise $P(A_k)$: $P(A_k) = P(A)^{2^k} B_k(A)$. Donc $P(A)$ divise N : £$N = \sum P(A_k) U(A_k)$. Donc $N^d =$ car $P(A)^d k = N^d$ et $P(A)^d = 0$.

— N et $D \in \mathbb{R}[A]$, ils commutent et on vérifie Dunford.

3 Algorithme de la décomposition de Dunford

Algorithme : Soit A une matrice de taille d, l'algorithme suivant utilise Euclide pour calculer Dunford. La complexité total de cet algorithme est $O(n^m d^3 \log d)$.

Algorithm 1 Algorithme de la décomposition de Dunford

```
Calculer χ_A                                   ▷ Calcul de déterminant : O(d^3)
Calculer χ_A ∧ χ'_A                            ▷ Euclide : O(k log^2 k)
Calculer P                                     ▷ Combinaison linéaire : O(k + k')
Calculer P'                                    ▷ Dérivation : O(k)
Calculer U, V tel que UP' + VP^d = 1           ▷ Euclide étendu : O(k log^2 k)
Faire A_0 ← A
Faire flag ← false
Faire j ← 0
while j < d et non flag do                     ▷ log d itérations
    Calculer P(A_j)                            ▷ Évaluation : O((dP)d^3)
    if P(A_j) = 0 then
        flag ← true
    else
        Calculer U(A_j)
        Calculer P(A_j)U(A_j)                  ▷ Évaluation : O((dP)d^3)
        Faire A_{j+1} ← A_j − P(A_j)U(A_j)
    end if
end whilereturn D = A_j et N = A − D
```

Références

[1] J.-J. Risler ; P. Boyer. *Algèbre pour la licence 3*. Dunod, 2006.