Calcul de l'intégrale de Fresnel

Julie Parreaux

2018-2019

Référence du développement : Gourdon [1, p.342].

Leçons où on présente le développement : 236 (Calcul d'intégrale).
Leçons où il peut être évoqué : 239 (Fonction définie par une intégrale).

1 Introduction

Il existe plusieurs méthodes pour calculer une intégrale. Le calcul de l'intégrale de Fresnel permet d'en appliquer quelques unes. En effet, on utilise, par exemple, la notion de fonction définie par une intégrale, le théorème de Fubbini, le changement de variable en dimension deux.

2 Calcul de l'intégrale de Fresnel

Théorème. *La valeur de l'intégrale de Fresnel définie par $\varphi = \int_0^{+\infty} e^{ix^2}dx$, est $e^{\pi/4}\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.*

Schéma du développement

1. Montrer que φ existe.
2. Montrer que $f(t)^2 = \frac{i\pi}{4} - i\int_0^{\frac{\pi}{4}} \exp\left(i\frac{t^2}{\cos^2\theta}\right) d\theta$ où $f(t) = \int_0^t e^{ix^2}dx$.
   (a) Calculer F via Fubini : $F(t) = f(t)^2$.
   (b) Calculer F via des coordonnées polaire : $F(t) = \frac{i\pi}{4} - i\int_0^{\frac{\pi}{4}} \exp\left(i\frac{t^2}{\cos^2\theta}\right) d\theta$.
3. Montrer que $I(T) = \frac{1}{T}\int_0^T F(t)dt$ converge lorsque T tend vers $+\infty$.
4. Donner la valeur de φ.

Démonstration. Notons $\varphi = \int_0^{+\infty} e^{ix^2}dx$ l'intégrale de Fresnel. On pose $f(t) = \int_0^t e^{ix^2}dx$.

Étape 1 : montrons que φ existe [1, p.146, rq.6] L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{ix^2}dx$ converge : par le changement de variable $u = x^2$, f est de même nature que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{iu}u^{-1/2}$ qui est une intégrale convergente d'après la règle d'Abel.

Étape 2 : montrons que $f(t)^2 = \frac{i\pi}{4} - i\int_0^{\frac{\pi}{4}} \exp\left(i\frac{t^2}{\cos^2\theta}\right) d\theta$ Posons $F(t) = \iint_{[0,t]^2} e^{i(x^2+y^2)}dxdy$, pour tout $t \geq 0$. Calculons F de deux manières différentes.

Étape a : calculons F via Fubini : $F(t) = f(t)^2$

$$\begin{aligned} F(t) &= \iint_{[0,t]^2} e^{i(x^2+y^2)} dxdy && \text{(Définition de } F\text{)} \\ &= \iint_{[0,t]^2} e^{ix^2} e^{iy^2} dxdy && \text{(Propriétés de l'exponentielle)} \\ &= \left(\int_{[0,t]} e^{ix^2} dx\right) \left(\int_{[0,t]} e^{iy^2} dy\right) && \text{(Par Fubini)} \\ &= f(t)^2 && \text{(Définition de } f\text{)} \end{aligned}$$

Étape b : calculons F via un changement de coordonnées polaire : $F(t) = \frac{i\pi}{4} - i\int_0^{\frac{\pi}{4}} \exp\left(i\frac{t^2}{\cos^2\theta}\right) d\theta$

— Symétrie du domaine et de l'intégrande par rapport à la droite $x = y$:

$$F(t) = 2\iint_{\Delta_t} e^{i(x^2+y^2)} dxdy \text{ où } \Delta_t = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq t, 0 \leq y \leq x\}$$

— Expression en coordonnées polaires :

  — Opérande : $x^2 + y^2 = e^{ir^2} r$.

  — Compact Δ_t : $K_T = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^\times \times [0,2\pi] \mid 0 \leq r\cos\theta \leq t \text{ et } \theta \in [0, \frac{\pi}{4}]\}$.

— Calcul de l'intégrale :

$$\begin{aligned} F(t) &= 2\iint_{\Delta_t} e^{i(x^2+y^2)} dxdy && \text{(Précédemment)} \\ &= 2\iint_{K_T} e^{ir^2} r dr d\theta && \text{(Changement en coordonnées polaires)} \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{\frac{t}{\cos\theta}} e^{ir^2} r dr\right) d\theta && \text{(Théorème de Fubini)} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{i}\left(\exp\left(i\frac{t^2}{\cos^2\theta}\right) - 1\right) d\theta && \text{(Calcul de primitive)} \\ &= \frac{i\pi}{4} - i\int_0^{\frac{\pi}{4}} \exp\left(i\frac{t^2}{\cos^2\theta}\right) d\theta && \text{(Calcul)} \end{aligned}$$

Étape 3 : montrons que $I(T) = \frac{1}{T}\int_0^T F(t)dt$ converge lorsque T tend vers $+\infty$ Pour $T > 0$, on pose $I(T) = \frac{1}{T}\int_0^T F(t)dt$ et montrons que $I(T)$ converge lorsque T tend vers $+\infty$. On a

$$\begin{aligned} I(T) &= \frac{1}{T}\int_0^T F(t)dt && \text{(Définition de } I(T)\text{)} \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T \left(\frac{i\pi}{4} - i\int_0^{\frac{\pi}{4}} \exp\left(i\frac{t^2}{\cos^2\theta}\right) d\theta\right) dt && \text{(Définition de } F(t)\text{, étape 2)} \\ &= \frac{1}{T}\left(\int_0^T \frac{i\pi}{4} dt - i\int_0^T \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \exp\left(i\frac{t^2}{\cos^2\theta}\right) d\theta\right) dt\right) && \text{(Linéarité de l'intégrale)} \\ &= \frac{1}{T}\frac{i\pi}{4}T - \frac{i}{T}\int_0^T \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \exp\left(i\frac{t^2}{\cos^2\theta}\right) d\theta\right) dt && \text{(Calcul)} \\ &= \frac{i\pi}{4} - \frac{i}{T}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^T \exp\left(i\frac{t^2}{\cos^2\theta}\right) dt\right) d\theta && \text{(Fubini)} \\ &= \frac{i\pi}{4} - \frac{i}{T}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{\frac{T}{\cos\theta}} \exp\left(iu^2\right) \cos\theta du\right) d\theta && \text{(Changement de variables } u = \tfrac{t}{\cos\theta} \text{ avec } \cos\theta \text{ constante)} \\ &= \frac{i\pi}{4} - \frac{i}{T}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\theta f\left(\frac{T}{\cos\theta}\right) d\theta && \text{(Définition de } f\text{)} \end{aligned}$$

Par convergence de φ (étape 1), f est bornée. Donc $\frac{1}{T}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\theta f\left(\frac{T}{\cos\theta}\right) d\theta \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} 0$. On en déduit que $I(T) \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} \frac{i\pi}{4}$

Étape 4 : donnons la valeur de φ

— $F(t) = f(t)^2$, donc $\forall T > 0$, $I(T) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)^2 dt$.

— $t \mapsto f(t)^2$ converge vers φ^2 dans $t \to \infty$. Par le théorème de la moyenne de Cesàro, $I(T)$ converge vers φ^2 quand $T \to \infty$.

— On en déduit que $\varphi^2 = \frac{i\pi}{4}$. On cherche à déterminer le signe de $\mathrm{Im}\varphi$ pour déterminer φ.

$$
\begin{array}{rcll}
\mathrm{Im}\varphi & = & \mathrm{Im} \int_0^{+\infty} e^{ix^2} dx & \text{(Définition de } \varphi\text{)} \\
& = & \mathrm{Im} \int_0^{+\infty} e^{iu} \frac{du}{2\sqrt{u}} & \text{(Changement de variables } u = x^2\text{)} \\
& = & \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{2\sqrt{u}} du & \text{(Formule de Gauss)} \\
& = & \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} \frac{\sin u}{2\sqrt{u}} du & \text{(Décomposition de l'intégrale)} \\
& = & \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin u}{2\sqrt{u}} du + \int_{(2n+1)\pi}^{(2n+2)\pi} \frac{\sin u}{2\sqrt{u}} du \right) & \text{(Décomposition de l'intégrale)} \\
& = & \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin u}{2\sqrt{u}} du - \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin u}{2\sqrt{u+\pi}} du \right) & (t = u + \pi \text{ et } \sin(u+\pi) = -\sin u) \\
& = & \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin u}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{u}} - \frac{1}{\sqrt{u+\pi}} \right) du & \text{(Linéarité de l'intégrale)}
\end{array}
$$

Donc $\mathrm{Im}\varphi \geq 0$ car $\forall n \in \mathbb{N}, \forall u \in [2n\pi, (2n+1)\pi]$ on a $\sin u \left(\frac{1}{\sqrt{u}} - \frac{1}{\sqrt{u+\pi}} \right) \geq 0$ (on a $u + \pi > u$ et par croissance de $x \mapsto \sqrt{x}$ et décroissance de $x \mapsto \frac{1}{x}$, $\frac{1}{\sqrt{u}} - \frac{1}{\sqrt{u+\pi}} \geq 0$, de plus $\sin u \geq 0$) et on conclut grâce à la positivité de l'intégrale.

On en conclut que $\varphi = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{\frac{i\pi}{4}}$. $\square$

Références

[1] X. Gourdon. *Analyse*. Les maths en tête. Ellipses, 2008.