Isométries du cube

Julie Parreaux

2018-2019

Référence du développement : H2G2 [3, p.365,375]

Leçons où on présente le développement : 101 (actions de groupes) ; 105 (groupe des permutations) ; 182 (complexes en géométrie) ; 190 (dénombrement).
Leçons où on peut l'évoquer : 104 groupes finis) ; 108 (générateurs de groupes).

1 Introduction

Les isométries préservent le cube dans le sens où si j'applique une isométrie à un cube alors l'image de celle-ci reste un cube. Cette propriété importante nous permet d'étudier les isométries sur des sous-espaces (de dimension 3) afin de les caractériser ou d'en donner quelques propriétés. Les solides platoniciens convexe sont souvent utilisés à cet effet, on peut alors parler du tétraèdre. On utilise des actions de groupes et étudier le dénombrement du nombre de coloration du cube.

Étudier les isométries des solides platoniciens convexes comme le tétraèdre et le cube donne de nombreuses applications comme le dénombrement (comme nous allons le présenter) ou encore les représentations linéaires avec la table de caractères de $\mathfrak{S}_4$.

2 Isométries du cube et application du coloriage

Schéma du développement

1. Existence d'un morphisme de C vers $\mathfrak{S}_4$.
2. Injectivité du morphisme φ.
3. Surjectivité du morphisme φ.
4. Application au coloriage.

Théorème. *Soit C un cube. Alors $Is^+(C) \simeq \mathfrak{S}_4$. L'ensemble $Is^+(C)$ est l'ensemble des isométries positives du cube. ce sont les isométries que l'on peut réaliser sur un vrai cube. Elles sont également appelée déplacements.*

Démonstration. Soit C un cube dont on numérote ses grandes diagonale de $\mathcal{D}_1$ à $\mathcal{D}_4$ et on note leur ensemble $\mathcal{D}$ et on centre C en l'origine O (cela nous permet de considérer des isométries vectorielles : directement sur l'espace vectoriel sous-jacent).

Étape 1 : existence d'un morphisme de C vers $\mathfrak{S}_4$ Soit $f \in Is^+(C)$. Comme f conserve les longueurs, elle conserve en particulier les longueurs des grandes diagonales (qui est la plus grandes distances entre deux points du cube). Donc f envoie $\mathcal{D}$ sur $\mathcal{D}$ une isométrie transforme une grande diagonale en une grande diagonale.

On fait donc agir $Is^+(C)$ sur $\mathcal{D}$, l'ensemble des grandes diagonales du cube. Ainsi

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & Is^+(C) & \to & \mathfrak{S}_4 \\ & g & \mapsto & g_{|\mathcal{D}} \end{array}$$

est un morphisme de groupe (les distances sont conservées).

Étape 2 : injectivité de ce morphisme φ Montrons que l'action que nous venons de définir est fidèle. Soit g tel que $\varphi(g) = id_{|\mathcal{D}}$ et montrons que g est le neutre. On note D_i la grande diagonale d'extrémité A_iB_i. Comme g fixe D_i, alors soit g fixe A_i et B_i soit il les permute.

— Si g laisse fixe A_i et B_i pour un i donnée, alors, montrons qu'il laisse fixe l'ensemble du cube. Sans perte de généralité, on suppose que $i = 1$. On montre qu'il laisse fixe quatre sommets : A_1, A_2, A_4 et B_1. Par hypothèse A_1 et B_1 sont laisser fixe par g.
  — Comme $A_1A_2 \neq A_1B_2$ (on parle surtout de la distance entre deux points) et que g est une isométrie (elle conserve les longueurs) alors A_2 ne peut pas être envoyer sur B_2. De plus, g laisse fixe les grandes diagonales donc A_2 est envoyer sur lui-même.
  — On raisonne de même pour montrer que A_4 est envoyer sur lui-même.

  g est alors une isométrie qui laisse fixe le repère affine A_1, A_2, A_4, B_1 donc g est l'identité.
— Si g permute A_i et B_i, alors $s_O g$ envoie A_i sur A_i où s_O est la symétrie centrale du cube. De ce qui précède $s_O g = id$, or $\det s_O = -1$ ce qui est impossible car $\det g = 1$. Autre méthode : Par un raisonnement analogue au cas précédent, si g permute les extrémités d'une grande diagonale, il permute toutes les extrémités des grandes diagonales. Donc $g = s_O = -id$. D'où la contradiction.

Donc g est le neutre et φ est donc injective.

Rappel : une action fidèle si l'intersection des stabilisateurs des points de X est trivial, soit s'il n'existe pas d'éléments de G autre que e qui fixe tous les points de X, soit le noyau du morphisme de l'action est trivial.

Étape 3 : surjectivité de ce morphisme φ Les transpositions sont réalisée par une rotation d'angle π et d'axe le milieu des arêtes joignant les deux diagonales. Donc comme les transpositions engendre $\mathfrak{S}_4$, φ bien surjective. (Dessiner ici le cube avec la rotation pour une des transitions.)

On en déduit que $Is^+(C) \simeq \mathfrak{S}_4$ □

Étape 4 : application au dénombrement du coloriage.

Application. *Il existe* 57 *manière différentes de colorier un cube avec* 3 *couleurs.*

Démonstration. Dans la preuve précédente, nous avons montrer que Is^+ agit sur le cube (en particulier, il agit sur le cube colorié). Par la formule de Burnside, on a que le nombre de coloriage différent c est égal au nombre d'orbite par cette action (deux coloriages sont dits identiques s'il existe une isométrie positive permettant de passer de l'un à l'autre. Le nombre de coloriage différent est donc le nombre d'orbites de l'action et le même nombre d'orbite de l'action (car elle traduit exactement ceci)). On en déduit que

$$c = \frac{1}{|Is^+(C)|} \sum_{\sigma \in Is^+(C)} |Fix(\sigma)|$$

où $|Fix(\sigma)|$ est le nombre de coloriage invariant par la transformation.

Pour chacune des transformation, nous allons calculer cette quantité. Nous devons énumérer chacune des transformations de $\mathfrak{S}_4$ et donnée leur action sur le cube afin de regarder combien de coloriages restent invariant par cette transformation. L'ordre de cette énumération est variable mais il est plus simples de commencer par les opérations qui sont le plus facile à expliquer.

Transposition Comme nous l'avons vu dans la preuve précédente c'est une rotation d'angle π d'axe la droite passant par le milieu des arêtes reliant les diagonales considéré. Il y a six isométries qui peuvent réaliser toutes les transpositions : autant que de paire de diagonales. Dans ce cas les faces vont par paires (la face est envoyé sur son opposé et les faces bleu et rouges sont envoyés sur la face adjacente dont la frontière porte l'axe de rotation). Donc fixer trois couleurs suffit à tout avoir. Il nous faut donc 3^3 points fixes.

3-cycles Un 3-cycle est réalisé par une rotation autours de la grande diagonale $\mathcal{D}_i$ qui n'intervient pas dans le cycle, d'angle $\frac{2\pi}{3}$ ou $-\frac{2\pi}{3}$. Il y a huit isométries qui peuvent réaliser toutes les transpositions : deux par diagonale (une par angle de rotation). La rotation découpe le cube en deux groupes de trois faces : deux couleurs suffisent. On obtient 3^2 points fixes.

4-cycles Un 4-cycle est réalisé par une rotation autours de l'axe pris au centre de deux faces opposées (on choisi les faces dont la numérotation suit l'ordre du 4-cycle (dans le sens ou non des aiguilles d'une montre)), d'angle $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$. Il y a six isométries qui peuvent réaliser toutes les transpositions : deux par paire de faces (une par angle de rotation). On peut alors colorier les deux faces par lesquelles passent l'axe de la rotation comme on veut car elles restent invariantes. Cependant les quatre autres faces doivent avoir la même couleur (car chacune doit avoir la couleur de ces deux adjacentes puisqu'elle va être ou va remplacé celles-ci). On obtient 3^3 points fixes.

Double transpositions Une double transposition est réalisé par une rotation autours de l'axe pris au centre de deux faces opposées (on choisi les faces dont les diagonales sont une extrémité des grandes diagonales agissant par la double transposition), d'angle π. Il y a trois isométries qui peuvent réaliser toutes les transpositions : une par paire de faces. On peut alors colorier les deux faces par lesquelles passent l'axe de la rotation comme on veut car elles restent invariantes. Les quatre autres faces vont deux par deux (car le cube fait un demi-tour). On obtient 3^4 points fixes.

On a alors $c = \frac{1}{26}(6 * 3^3 + 8 * 3^2 + 6 * 3^3 + 3 * 3^4 + 1 * 3^6) = 57$. D'où le résultat. □

3 Compléments autours des applications des actions de groupes

Isométries et leurs applications

Nous allons rappeler quelques résultats sur les isométries ainsi que leurs applications dans le cadre de solide platoniciens. Les isométries sont des applications qui conservent les distances. On distinguera ensuite celle qui conserve l'orientation et celle qui ne les conservent pas.

Cadre : On se place dans E_n un espace affine euclidien orienté de dimension n et $\overrightarrow{E_n}$ l'espace vectoriel euclidien orienté associé à E_n. On pose $\left(O, \overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n}\right)$. Dans le cas d'un espace orienté, on considère la base orthonormée directe $\left(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n}\right)$.

Généralité sur les isométries Donnons la définition des isométries avec leur transformation orthogonale associée. Nous allons également à donner des symétries orthogonales et des réflexions.

Définition. On appelle une isométrie de E_n, toute application f de E_n dans E_n vérifiant $\forall M, N \in E_n$, $\|\overrightarrow{f(M)f(N)}\| = \|\overrightarrow{MN}\|$.

Proposition. *Soit une application orthogonale l de $O\left(\overrightarrow{E_n}\right)$, alors toute application affine f de partie linéaire l est une isométrie de E_n.*

Démonstration. Soit f une application affine de partie linéaire l orthogonale : $\forall M, N \in E_n$, $\|\overrightarrow{f(M)f(N)}\| = \|l\left(\overrightarrow{MN}\right)\| = \|\overrightarrow{MN}\|$. □

Théorème. *Soit f une isométrie de E_n et soit A un point fixé de E_n.*

1. *Soit $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{E_n}$. La relation l de $\overrightarrow{E_n}$ dans $\overrightarrow{E_n}$ qui à $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AM}$ associe $l\left(\overrightarrow{u}\right) = \overrightarrow{f(A)f(M)}$, est une application orthogonale de $O\left(\overrightarrow{E_n}\right)$.*
2. *f est une application affine de partie linéaire une application orthogonale de $O\left(\overrightarrow{E_n}\right)$.*
3. *Soit $O \in E_n$. Pour toute application orthogonale l de $O\left(\overrightarrow{E_n}\right)$, alors, il existe une unique isométrie f de partie linéaire l et telle que $f(O) = O$.*

Démonstration.
1. On utilise les propriétés d'isométrie pour montrer que l est une application orthogonale.
2. Cas particulier du premier item.
3. Par l'orthogonalité de l, on montrer que f conserve les distance. Comme une application affine est complètement déterminée par l'image d'un point et de l'application linéaire associée, f est unique.

□

Corollaire. *Soit f une isométrie de E_n, alors f est une application affine bijective et donc $Is(E_n) \subset GA(E_n)$ où $Is(E_n)$ est l'ensemble des isométries de E_n.*

Démonstration. Affine : théorème précédent.
Bijection : application orthogonale. □

Symétries orthogonales Soit l'espace vectoriel euclidien (E, φ) et F un sous-espace vectoriel de E. Une symétrie vectorielle de base F et de direction $F^{\perp}$ s'appelle la symétrie orthogonale vectorielle de base F.

Proposition. *Soit $\overrightarrow{E_n}$ un espace vectoriel euclidien, alors s est une transformation orthogonale involutive de $\overrightarrow{E_n}$ si et seulement si s est une symétrie orthogonale.*

Démonstration. $\Rightarrow$ s est une isométrie vectorielle : transformation orthogonale involutive. s est orthogonale : $\forall x \in F, \forall y \in G$, $s(x).s(y) = x.y$.

$\Leftarrow$ s est une application linéaire : s est une symétrie orthogonale vectorielle. s est involutive : s conserve la norme.

□

Définition. Soit l'espace affine euclidien E_n, d'espace vectoriel associé $\overrightarrow{E_n}$ et $\mathcal{F}$ une variété linéaire affine de direction F, la symétrie de base $\mathcal{F}$ et de direction $F^{\perp}$ s'appelle symétrie orthogonale de base $\mathcal{F}$.

Proposition. *Soit $\overrightarrow{E_n}$ un espace vectoriel euclidien, alors une isométrie f de E_n est une involutive si et seulement si f est une symétrie orthogonale.*

Démonstration. $\Rightarrow$ l est une symétrie vectorielle orthogonale : l est une transformation orthogonale involutive (f est une isométrie involutive). f est isométrie orthogonale : $f^2 = Id_{E_n}$, l est la symétrie orthogonale de base F et de direction $F^{\perp}$.

$\Leftarrow$ f est involutive : f est une symétrie. f est une isométrie : partie linéaire de f est une transformation orthogonale.

□

Réflexion

Définition. Soit l'espace affine euclidien E_n et $\mathcal{F}$ un hyperplan affine, la symétrie orthogonale de base $\mathcal{F}$ s'appelle réflexion de E_n ou symétrie orthogonale hyperplane de base $\mathcal{F}$.

Proposition. *Soit A et B deux points distincts de l'espace affine euclidien E_n, il existe une unique réflexion s de E_n telle que $s(A) = B$.*

Démonstration. Si s existe, sa base est l'hyperplan de E_n passant par le milieu de $[A, B]$ et de direction $\text{Vect}\{\overrightarrow{AB}\}^{\perp}$. Une telle application convient et $s(A) = I$ où I est le milieu de $[A, B]$. □

Définition. Soit A et B deux points distincts de l'espace affine euclidien E_n, la base de l'unique réflexion échangeant A et B s'appelle hyperplan médiateur de A et B.

Remarque : Dans le cas $n = 2$, l'hyperplan médiateur est appelé médiatrice du segment.

Proposition. *Soit A et B deux points distincts de l'espace affine euclidien E_n, l'hyperplan médiateur $\mathcal{H}$ de A et B est l'ensemble des points de E_n équidistants de A et B : $\mathcal{H} = \{M, M \in E_n, MA = MB\}$.*

Démonstration. Décomposition des normes au carré, puis on montre que le produit scalaire $\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB} = 0$. □

Proposition. *Soit $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ deux hyperplans de E_n de même direction H. Alors,*

1. *Il existe une translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ appartenant à $H^{\perp}$ transformant $\mathcal{H}$ en $\mathcal{H}'$.*
2. *Soit s la réflexion de base $\mathcal{H}$ et soit s' la réflexion de base $\mathcal{H}'$, alors $s' \circ s = t_{2\overrightarrow{u}}$ où $t_{2\overrightarrow{u}}$ est une translation de vecteur $2\overrightarrow{u}$.*
3. *Toute translation de vecteur $2\overrightarrow{u}$ se décompose en produit de deux réflexion, l'une de ces réflexions étant arbitraire.*

Démonstration.
1. On pose $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AA'}$.
2. $M \in E_n$ la droite D_M coupe $\mathcal{H}$ en I et $\mathcal{H}'$ en I'. En notant $M'' = s(s(M))$ et $\overrightarrow{MM''} = 2\overrightarrow{II'} = 2\overrightarrow{u}$.
3. $H = \text{Vect}\{\overrightarrow{u}\}^{\perp}$ et $\mathcal{H}' = t_{\overrightarrow{u}}(\mathcal{H})$, alors $s \circ s' = t_{2\overrightarrow{u}}$.

□

Groupe des isométrie sur un espace affine de dimension n L'application L de $GA(E_n)$ dans $GL\left(\overrightarrow{E_n}\right)$ qui à une application affine f fait correspondre sa partie linéaire est un morphisme, surjectif de noyau $T(E_n)$, du groupe $(GA(E_n),\circ)$ dans le groupe $\left(GL\left(\overrightarrow{E_n}\right),\circ\right)$.

Théorème. *Soit $Is(E_n)$ l'ensemble des isométries de l'espace affine euclidien E_n, alors*

1. *$(Is(E_n),\circ)$ est un groupe non commutatif, sous groupe de $(GA(E_n),\circ)$.*
2. *L'application L de $GA(E_n)$ dans $GL\left(\overrightarrow{E_n}\right)$ est un morphisme surjectif de noyau $T(E_n)$*

Démonstration.
1. On utilise le morphisme L est son application inverse (on peut le montrer sans utiliser le morphisme).
2. La surjectivité est ok, son noyau est calculer à l'aide d'une isométrie.

□

Corollaire. *$T(E_n)$ est un sous-groupe distingué du groupe $(Is(E_n),\circ)$ et le groupe $Is(E_n)\setminus T(E_n)$ et le groupe $O\left(\overrightarrow{E_n}\right)$ sont isomorphes.*

Démonstration. Comme $T(E_n)$ est le noyau d'un morphisme, il est distingué dans $(Is(E_n),\circ)$. On applique le premier théorème d'isomorphisme des groupes. □

Théorème. *Soit A un point fixe de E_n, alors toute isométrie f de E_n se décompose de manière unique, sous la forme $f = t\circ g$ où g est une isométrie de E_n vérifiant $g(A) = A$.*

Démonstration. Existence : $t = \overrightarrow{AA'}$ et $g = t^{-1}\circ f$ et $g(A) = A$.
Unicité : raisonnement par l'absurde. □

Définition. $Is^+(E_n)$ l'ensemble des déplacements, ou isométrie positive : les isométries admettant pour partie linéaire une application orthogonale positive. $Is^-(E_n)$ l'ensemble des antidéplacements, ou isométries négatives : les isométries admettant pour partie linéaire une application orthogonale négative.

Théorème. *$Is^+(E_n)$ est un sous-groupe de $(Is(E_n),\circ)$ appelé groupe des déplacements.*

Démonstration. Par le morphisme L appliqué au groupe $O^+(E_n)$. □

Théorème. *Soit f une isométrie de $Is(E_n)$, alors il existe $p\leq n+1$ tel que*

1. *f est la composé de p réflexions*
2. *si f admet au moins un point invariant, alors $p\leq n$ et la variété linéaire affine des points invariants de f est de dimension $n-p$.*

Corollaire. *L'ensemble des réflexions de $Is(E_n)$ est un système de générateur de $Is(E_n)$.*

Isométrie en dimension 1 Les applications orthogonales $\overrightarrow{E_1}$ sont Id et $-Id$. On a alors $Is^+(E_1)$ qui est l'ensemble des translations et $Is^-(E_1)$ qui est l'ensemble des symétries centrales par rapport à un point de E_1.

Isométrie en dimension 2 Donnons quelques caractéristiques de nos isométries de dimension 2.

Isométrie f	$\{M, f(M) = M\}$	$Is(E_2)$	Réflexions
Identité	dim $=2$	$+$	0
Réflexion	dim $=1$	$-$	1
Rotation	dim $=0$	$+$	2
Translation	$\emptyset$	$+$	2
Réflexion-Translation	$\emptyset$	$-$	3

Utilisation des nombres complexes On utilise le plan vectoriel euclidien orienté E_2 et le plan complexe euclidien $\mathbb{C}$, muni du produit scalaire φ défini par $\varphi(z,z') = \Re(z\overline{z'})$ et orienté par la base $(1,i)$.

Théorème. *Soit les plans euclidiens orientés E_2 et $\mathbb{C}$ et soit ϕ la bijection de E_2 dans $\mathbb{C}$, qui à M associe son affixe z. Soit T un élément du groupe symétrique $S(E_2)$ de E_2, et soit $f = \phi \circ T \circ \phi^{-1}$.*

1. *f est une bijection de $\mathbb{C}$, c'est-à-dire un élément du groupe symétrique $S(\mathbb{C})$.*
2. *L'application ψ de $S(E_2)$ dans $S(\mathbb{C})$ définie par $\psi(T) = f$ est un isomorphisme du groupe $S(E_2)$ dans le groupe $S(\mathbb{C})$.*

Démonstration. 1. $f = \psi(T)$ (Montre comment les nombres complexes aide à l'étude des transformations.)
2. $T = \phi^{-1} \circ T \circ \phi$: bijection entre les deux groupe. Par calcul on montre le morphisme.

□

Proposition. *Soit f la bijection de $\mathbb{C}$ définie par $z' = f(z) = e^{i\alpha}z + a$.*

1. *si $e^{i\alpha} = 1$, la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ d'affixe a.*
2. *sinon, la rotation de centre A d'affixe $\frac{a}{1-e^{i\alpha}}$ et d'angle α.*

Démonstration. 1. Si $e^{i\alpha} = 1$ et $a \neq 0$ pas de point fixe pour f.
2. Sinon, A d'affixe w est le point fixe de f.

□

Proposition. *Soit T la réflexion de base une droite D passant par un point A et de direction $\overrightarrow{D}$ vérifiant $\left(\mathrm{Vect}\{\overrightarrow{i}\}, \overrightarrow{D}\right) = \frac{1}{2}\alpha \mod \pi$. On suppose que l'affixe w de A vérifie $w = e^{i\alpha}\overline{w} + a + ib$. Alors, $f = \psi(T)$ si et seulement si $f(z) = e^{i\alpha}\overline{z} + a + ib$*

Démonstration. Résolution d'un système donnant les propriétés que l'on souhaite. □

Proposition. *Soit T une isométrie négative de E_2 sans point invariant, alors T est la composée commutative d'une réflexion de base une droite D de direction $\overrightarrow{D}$ vérifiant $\left(\mathrm{Vect}\{\overrightarrow{i}\}, \overrightarrow{D}\right) = \frac{1}{2}\alpha \mod \pi$ et d'une translation de vecteur $\overrightarrow{w}$ non nul de $\overrightarrow{D}$. De plus, $f = \psi(T)$ si et seulement si $f(z) = e^{i\alpha}\overline{z} + a + ib$ avec f admettant aucun point fixe.*

Démonstration. Par calcul direct. □

Isométrie en dimension 3 Donnons quelques caractéristiques de nos isométries de dimension 2.

Isométrie f	$\{M, f(M) = M\}$	$Is(E_2)$	Réflexions
Identité	$\dim = 3$	$+$	0
Réflexion	$\dim = 2$	$-$	1
Rotation	$\dim = 1$	$+$	2
Symétrie centrale	$\dim = 0$	$-$	3
Translation	$\emptyset$	$+$	2
Réflexion-Translation	$\emptyset$	$-$	3

Applications des isométries aux solides platoniciens [4, p.228] Nous allons donner quelques outils afin de traduire les isométries dans le monde des permutations. Ces isométries permettent de calculer la table de caractère des groupes concernés.

Cas du tétraèdre

Théorème. *Les groupes d'isométries d'un tétraèdre régulier Δ_4 sont : $Is(\Delta_4) \simeq \mathfrak{S}_4$ et $Is^+(\Delta_4) \simeq \mathfrak{A}_4$.*

Démonstration. On fait agir $Is(\Delta_4)$ sur l'ensemble des sommets du tétraèdre : $Is(\Delta_4) \simeq \mathfrak{S}_4$. Comme $Is^2(\Delta_4)$ est d'indice 2 dans $Is(\Delta_4)$: $Is^+(\Delta_4) \simeq \mathfrak{A}_4$. □

Nombre	Ordre	Isométrie de Δ_4	Permutation de $\mathfrak{S}_4$
1	1	*Id*	*Id*
8	3	rotation d'axe sommet-centre de face opposée	3-cycle
3	2	rotation d'angle par milieu de 2 arrêtes opposées	double transposition
6	2	symétrie par rapport au plan médiateur	transposition
6	4	symétrie $\circ$ rotation	4-cycle

Cas du cube On traite le cas du cube. Le cas de l'octaèdre est analogue lorsqu'on remplace *sommet* par *centre des faces* dans les isométries (dualité des deux solide : l'un définit l'autre).

Théorème. *Le groupe d'isométries d'un cube régulier C_6 est : $Is^+(C_6) \simeq \mathfrak{S}_4$.*

Démonstration. On fait agir $Is(\Delta_4)$ sur l'ensemble de ces grandes diagonales : $Is^+(C_6) \simeq \mathfrak{S}_4$. □

Nombre	Ordre	$Is^+(C_6)$	Permutation de $\mathfrak{S}_4$
1	1	*Id*	*Id*
8	3	rotation d'axe sommet-sommet opposée	3-cycle
3	2	rotation d'angle π d'axe le centre de deux faces opposées	double transposition
6	2	rotation d'angle π d'axe le centre de deux arrêtes opposée	transposition
6	4	rotation d'angle $\frac{+}{-}\frac{\pi}{2}$ d'axe le centre de deux faces opposées	4-cycle

Théorème. *Le groupe d'isométries d'un octaèdre régulier est : $Is^+(O_8) \simeq \mathfrak{S}_4$.*

Démonstration. On admet que l'on peut inscrire un cube dans l'octaèdre ce qui nous donne le résultat. □

Cas du dodécaèdre Comme dans le cadre du cube et de l'octaèdre, le dodécaèdre et de l'icosaèdre sont duaux. On va alors étudier l'isomorphisme entre l'icosaèdre et $\mathfrak{A}_5$.

Théorème. *Le groupe d'isométries d'un dodécaèdre régulier P_{12} est : $Is^+(P_{12}) \simeq \mathfrak{U}_5$.*

Démonstration. On admet que l'on peut inscrire cinq cubes distincts dans le dodécaèdre. On fait donc agir le groupe des isométries sur les cinq cubes. Cette action fixe le grandes diagonales du dodécaèdre : on conclut comme pour les autres. □

Théorème. *Le groupe d'isométries d'un icosaèdre régulier Δ_{20} est : $Is^+(\Delta_{20}) \simeq \mathfrak{U}_5$.*

Démonstration. On peut inscrire un dodécaèdre dans un icosaèdre. □

Nombre	Ordre	$Is^+(\Delta_2 0)$	Permutation de $\mathfrak{A}_5$
1	1	*Id*	*Id*
24	3	rotation d'ordre 5 d'axe sommet-sommet opposée	5-cycle
20	2	rotation d'ordre 3 d'axe le centre de deux faces opposées	3-cycle
15	2	rotation d'angle π d'axe le centre de deux arrêtes opposée	double transposition

Compléments autours de la formule de Burnside

Dans l'application, nous dénombrons le nombre de coloriage du cube grâce à la formule de Burnside. Nous allons la redémontrer ici. Pour cela, nous commençons par rappeler quelques notions sur les actions de groupes. Les actions de groupes [2, p.195] sont des notions importantes car elles permettent d'agir sur un ensemble. Elles ont plusieurs applications notamment en géométrie (c'est la base de la géométrie) ou en dénombrement si le groupe est fini (via les formules sur les cardinaux).

Remarque : Il y a deux monde : celui des groupes et des objets sur lesquels ils agissent. La translation dans le monde des objets (par application de l'action) se traduit par la conjugaison dans les groupes.

Définition (Action de groupes)**.** Une action de groupe d'un groupe G sur un ensemble X est une application $f : G \times X \to X$ telle que $\forall x \in X, f(e,x) = x$ et $\forall g_1, g_2 \in G, \forall x \in X, f(g_1.g_2, x) = f(g_1, f(g_2, x))$.

Une action de groupe de G sur X peut être également la donné d'un morphisme de G dans $\mathfrak{S}_{|X|}$.

Définition (Action fidèle [1, p.174])**.** Soit G un groupe agissant sur E. On dit que G agit fidèlement sur E si pour tout $g \in G$, $gx = x$ pour tout $x \in E$ implique $g = 1_G$ (le neutre). Autrement dit si le morphisme de l'action est injectif.

Exemple (Actions de groupes) : Donnons quelques exemples classiques d'actions de groupes.

- G opère sur G par translation à gauche.
- G opère sur $\mathcal{P}(G)$ par translation à gauche.
- G opère sur G par conjugaison.
- G opère sur $\mathcal{P}(G)$ par conjugaison.

Définition (Stabilisateur)**.** On définit le stabilisateur de l'action, pour tout élément $x \in X$, comme $\mathrm{Stab}(x) = \{g \in G, f(g,x) = x\}$.

Remarque : Le stabilisateur d'un élément x de X est vu comme l'ensemble des éléments (de G) qui stabilise, "laisse fixe" x lors de l'application de f. On vérifie facilement que $\mathrm{Stab}(x)$ est un sous-groupe de G.

Définition (Action libre [3, p.16])**.** Une action de G sur X est libre si tous les stabilisateurs des points de X sont triviaux.

Proposition ([3, p.15])**.** *Soit G un groupe opérant sur un ensemble X et $x \in X$. Alors,* $\mathrm{Stab}(g.x) = g\mathrm{Stab}(x)g^{-1}$.

Démonstration. $\left(g\mathrm{Stab}(x)g^{-1}\right).(g.x)$(Action du groupe $\left(g\mathrm{Stab}(x)g^{-1}\right)$ sur l'image) $=$ $\left(g\mathrm{Stab}(x)\right).x$ (calcul des actions) $= g.x$ (stabilisateur). On en déduit l'inclusion $\subseteq$. En remplaçant x par $g.x$ et g par g^{-1}, on obtient par le même procédé, l'inclusion inverse. □

Proposition ([7, p.31])**.** *Soit $\varphi : G \to \mathfrak{S}(X)$ une action de G sur l'ensemble X. Alors,* $\ker(\varphi) = \bigcap_{x \in X} \mathrm{Stab}(x)$.

Démonstration. Si $g \in \ker(\varphi)$, $g.x = \varphi(g)(x) = e.x = x$ et $g \in \bigcap_{x \in X} \mathrm{Stab}(x)$. Inversement, $g.x = \varphi(g)(x) = x$ et $g \in \ker(\varphi)$. □

Remarque : On justifie ainsi la définition d'action fidèle et notamment l'injectivité du morphisme.

Proposition ([7, p.42])**.** *Si $m \leq n$, alors si $\mathfrak{S}_n$ agit sur $\mathfrak{S}_m$ alors* $\mathfrak{S}_m \simeq \bigcap_{p \in \{m+1,\dots,n\}} \mathrm{Stab}(p)$.

Lemme ([1, p.172])**.** *Soit G opérant sur un ensemble E. La relation sur E définie par $x \sim y$ s'il existe $g \in G$ tel que $y = g.x$ est une relation d'équivalence.*

Démonstration. **Reflexive** On prend $g = 1_G$

Symétrique On multiplie par g^{-1}

Transitive On utilise les propriétés de calcul

□

Définition (Orbite)**.** L'orbite de l'action, pour tout élément $x \in X$, comme : $\mathrm{Orb}(x) = \{y \in X | \exists g \in G, f(g,x) = y\}$.

Remarque : Une orbite est une classe d'équivalence sur la relation d'équivalence définie précédemment. Une orbite d'un élément x de X comme l'ensemble des éléments (de X) atteignable à partir de x en appliquant f à un g.

Exemple (Exemples sur ces notions) : Quelques exemples sur les notions d'orbites et de stabilisateurs.

- G opère sur G par translation à gauche.
  - $\mathrm{Stab}(x) = \{e\}$
  - $\mathrm{Orb}(x) = G$ (ici $X = G$)

Définition (Action transitive [1, p.172])**.** On dit que G agit transitivement sur E si pour tous $x, x' \in E$, il existe $g \in G$ tel que $x' = gx$.

Lemme ([1, p.172])**.** *Soit G agissant sur E. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *G agit transitivement sur E*
2. $\forall x \in E, \mathrm{Orb}(x) = E$
3. *$\exists x_0 \in E$ tel que* $\mathrm{Orb}(x_0) = E$
4. *E n'admet qu'une seule orbite : E*

Démonstration. **Montrons** 1 $\Rightarrow$ 2 $\mathrm{Orb}(x) \subseteq E$: définition. $\mathrm{Orb}(x) \supseteq E$: si $x' \in E$, $\exists g$ tel que $x' = g.x$, alors $x' \in \mathrm{Orb}(x)$.

Montrons 2 $\Rightarrow$ 3 Évident

Montrons 3 $\Rightarrow$ 4 Par la relation d'équivalence : les classes forment une partition.

Montrons 4 $\Rightarrow$ 1 Soient $x, x' \in E$, alors x, x' sont dans la même orbite. Donc, il existe g tel que $x' = gx$. □

Définition (Points fixes)**.** Nous définition les points fixes d'un élément g de G comme l'ensemble des éléments (de X) qui sont stabilisés par g. De manière plus formelle on définit l'orbite comme $\mathrm{Fix}(g) = \{x \in X, f(g,x) = x\}$.

Lemme ([1, p.172])**.** *Soit G agissant sur E. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *x est un point fixe sous l'action de G*
2. $\mathrm{Orb}(x) = \{x\}$
3. $|\mathrm{Orb}(x)| = 1$
4. $\mathrm{Stab}(x) = G$

Démonstration. **Montrons** 1 $\Rightarrow$ 2 Définition orbite et point fixe.

Montrons 2 $\Rightarrow$ 3 Évident

Montrons 3 $\Rightarrow$ 4 $\mathrm{Stab}(x) \subseteq G$: ok ; $\mathrm{Stab}(x) \supseteq G$: comme $|\mathrm{Orb}(x)| = 1, \forall g, g.x = x$. Donc $\forall g, g \in \mathrm{Stab}(x)$.

Montrons 4 $\Rightarrow$ 1 Définition orbite et point fixe. □

Lemme. *Soit G un groupe et X un ensemble sur lequel G agit. Pour tout élément $x \in X$, on a la relation suivante :* $|\mathrm{Stab}(x)|\,|\mathrm{Orb}(x)| = |G|$

Démonstration. On prouve cette relation à l'aide d'une bijection entre Orb et G/Stab.
Soit $x \in X$. On pose

$$\begin{array}{rccc} \varphi_x : & G/\text{Stab} & \to & \text{Orb} \\ & g & \mapsto & f(g,x) \end{array}$$

Cette application est bien définie car Stab est un sous-groupe de G donc le quotient est bien un groupe. (Attention : ce n'est pas un morphisme car Orb est un sous-ensemble de X.) De plus, elle est surjective par définition de l'orbite.

Elle est injective. En effet, si $g_1, g_2 \in G$ tels que $f(g_1,x) = f(g_2,x)$. On a alors, en composant par g_1^{-1}, $f(g_1^{-1}, f(g_1,x)) = f(g_1^{-1}, f(g_2,x))$. Par les propriétés sur f, on a $f(g_1^{-1}g_1, x) = f(g_1^{-1}g_2, x)$. Or, comme $f(e,x) = x$, on a $f(g_1^{-1}g_2, x) = f(g_1^{-1}g_1, x) = f(e,x) = x$.

On a donc bien une bijection entre ces deux ensembles finis et on conclut en passant aux cardinaux. □

Lemme. *Soit G un groupe et X un ensemble sur lequel G agit. On a la relation suivante $\sum_{g\in G} |\text{Fix}(g)| = \sum_{x\in X} |\text{Stab}(x)|$*

Démonstration. On pose un ensemble $S = \{(g,x) \in G \times X | f(g,x) = x\}$. On pose ensuite l'application S définie telle que :

$$\begin{array}{rccc} S : & G \times X & \to & \{0,1\} \\ & g,x & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } (g,x) \in S \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

Comme $\text{Stab}(x)$ et $\text{Fix}(g)$ forment des partitions respectivement de X et de G, on a $S(.,x) = \mathbb{1}_{\text{Stab}(x)}$ et $S(g,.) = \mathbb{1}_{\text{Fix}(g)}$. On a alors $|S| = \sum_{g\in G} |\text{Fix}(g)| = \sum_{x\in X} |\text{Stab}(x)|$. D'où le résultat. □

Théorème (Formule du Burnside). *Soit G un groupe et X un ensemble sur lequel G agit. Le nombre d'orbite de l'action est $t = \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} |Fix(g)|$*

Démonstration. On va alors montrer que $t|G| = \sum_{g\in G} |Fix(g)|$. On remarque que $X = \sqcup_{i=1}^{t} \text{Orb}(x_i)$ où x_i est un représentant d'un des orbites. Comme on a $\sum_{g\in G} |\text{Fix}(g)| = \sum_{x\in X} |\text{Stab}(x)|$ (lemme 3) $= \sum_{i=1}^{t} |\text{Orb}(x_i)| \frac{|G|}{|\text{Orb}(x_i)|}$ (lemme 3) $= t|G|$ (G indépendant somme). D'où le résultat. □

Remarque : On voit apparaître une version de la formule des classes.

Actions associées à l'action d'un groupe et invariants [6, p.47]

Proposition. *Soit G un groupe opérant sur un ensemble E, $p \in \mathbb{N}*$, alors G opère de façon naturelle sur $E^p = E_\times \cdots \times$ par $g(x_1, \ldots, g_p) = (gx_1, \ldots gx_p)$.*
G opère aussi sur $\mathcal{P}(E)$, l'ensemble des sous-ensembles de E par l'action : si $A \in \mathcal{P}(E)$, $gA = \{ga, a \in A\}$.

De plus, si G opère sur E et F, il opère sur l'ensemble des fonctions de E dans F.

Définition. Soit G un groupe opérant sur E. Un élément $x \in E$ est dit invariant quand : $\forall g \in G, gx = x$.

Si on se donne un espace homogène (G,E), un ensemble K et qu'on fait opérer G sur K de manière triviale, on cherche le plus petit entier p et une (ou plusieurs) fonction invariante $f : E^p \to K$. Cette recherche est la recherche d'invariant pour notre action de groupe et dans ce cas précis pour la géométrie que l'on considère.

Cette recherche d'invariant permet la classification des figures. Si on se donne une géométrie par un espace homogène (G,E). On considère l'espace des orbites $\mathcal{P}(E)/G$ (définit par l'action de G sur $\mathcal{P}(E)$) et on cherche suffisamment d'invariant sur chaque orbite pour les caractériser (puisqu'une figure en géométrie correspond à une orbite de cette action).

Collier de perles

Un exemple important des actions de groupes au dénombrement est le problème du collier de perles [5, p.44].On dispose d'un fil circulaire, de quatre perles bleues, de trois perles blanches et de deux perles oranges. Combien de colliers différents peut-on faire avec ce matériel ?

Sur le cercle nous réservons neuf emplacements $A_0, \ldots, A_8$ régulièrement espacés. Notons P cet ensemble de points et O le centre du cercle. Pour faire un collier, on réservera l'une des 1260 partitions $(4,3,2)$ de P ($\frac{9!}{4!3!2!} = 1260$). Soit X l'ensemble de ces partitions. Deux partitions de X donnerons le même collier si on passe de l'une à l'autre à l'aide des neuf rotations r^k d'angle $k\frac{2\pi}{9}$, ou encore si on passe d'un emplacement à un autre à l'aide des neuf symétries orthogonales conservant le polygone P. Le nombre de collier est alors le nombre d'orbite dans X sous l'action du groupe diédral D_9. Calculons ce nombre à l'aide de la formule de Burnside. Soit $g \in D_9$, une partition appartient à $\text{Fix}(g)$ si g laisse globalement invariant l'ensemble des perles bleues, l'ensemble des perles blanches et l'ensemble des perles oranges.

— Si $g = Id$, on a $\text{card}(\text{fix}(g)) = \text{card}(X) = 1260$.

— Si $g = r^k$ pour $k \in \{0, \dots, 8\}$, l'ordre de g divise celui de r qui vaut 9 donc il vaut 3 où 9. Les orbites dans P sous l'actions de g et ses puissances ont toutes 3 ou 9 éléments. Une partie de P invariante par g est la réunion de telle orbites. Elle a donc un cardinal multiple de 3. L'ensemble des perles bleues qui a quatre éléments ne peut pas être globalement invariant par g, et $\text{fix}(g)$ est vide.

— Si g est une symétrie, par exemple autour de la droite (OA_0), alors en A_0 il y a nécessairement une perle blanche car les parties invariantes par g sont réunions de couples de points symétriques. Donc, dans la partition invariante par g, la partie contenant A_0 est de cardinal impair. Pour constituer un collier invariant par g, il suffit de placer deux perles bleues, une perle blanche et une perle rouge en A_1, A_2, A_3, A_4 (dans l'ordre que l'on veut), puis de compléter le collier par symétrie par rapport à (OA_0). Cela laisse $\frac{4!}{2!1!1!} = 12$ possibilités.

La formule de Burnside donne donc : $\frac{1}{[D_9:1]} \sum_{g \in D_9} \text{card}(\text{fix}(g)) = \frac{1}{18}[1260 + 12 * 9] = 76$.

Références

[1] G. Berhuy. *Algèbre : le grand combat*. Calvage & Mounet, 2018.

[2] J. Calais. *Éléments de la théorie des groupes*. puf, 1984.

[3] P. Caldero and J. Germoni. *Histoires hédonistes de groupes et de géométries, tome 1*. Calvage et Mounet, 2013.

[4] P. Caldero and J. Germoni. *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries, tome 2*. Calvage et Mounet, 2018.

[5] F. Combes. *Algèbre et géométrie*. Breal, 1998.

[6] G. Laville. *Géométrie pour le capes et l'agrégation*. ellipse, 1998.

[7] F. Ulmer. *Théorie des groupes*. ellipses, 2012.