Nombres de Bell

Julie Parreaux

2018-2019

Référence du développement : X-ENS algèbre 1 [1, p.14].

Leçons où on présente le développement : 190 (Dénombrement) ; 230 (Séries numériques) ; 243 (Série entière).

1 Introduction

Les nombres de Bell dénotent le nombre de partitions distinctes de l'ensemble $[\![1, n]\!]$ où de manière équivalente, le nombre de relations d'équivalence sur cet ensemble. On dénombre alors l'ensemble des partitions de cet ensemble d'entier. Ce nombre s'exprime à l'aide d'une série numérique (le résultat est sa somme). On utilise une série génératrice, définie par une série entière que nous évaluons en une valeur précise.

2 Dénombrer le nombre de partitions : nombre de Bell

Théorème. *Soit $n \geq 0$. On note B_n le nombre de partitions distinctes de l'ensemble $[\![1, n]\!]$ (avec $B_0 = 1$). Alors*

1. *La série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$ a un rayon de convergence $R > 0$ et sa somme f vérifie $\forall z \in]-R, R[$, $f(z) = e^{e^z - 1}$.*
2. *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $B_k = \frac{1}{e} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^k}{n!} \right)$.*

Exemple : — $B_0 = 1$ car la seule partition de $\emptyset$ est $\{\emptyset\}$.

— $B_1 = 1$ car la seule partition de $\{1\}$ est $\{1\}$.

— $B_2 = 2$ car les partitions de $\{1, 2\}$ sont $\{\{\{1\}, \{2\}\}, \{\{1, 2\}\}\}$

— $B_3 = 5$ car les partitions de $[\![1, 3]\!]$ sont $\{\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}, \{\{1, 2\}, \{3\}\}, \{\{1, 3\}, \{2\}\}, \{\{2, 3\}, \{1\}\}, \{\{1, 2, 3\}\}\}$.

Schéma du développement

Si on a le temps, on peut faire un ou deux exemples de calculs de B_n (pour n assez petit) après avoir énoncer le théorème.

1. Établir la relation de récurrence suivante $B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$.
   (a) Calcul de $|E_k|$.
   (b) Exprimer la récurrence.
2. Majorer B_n : raisonnement par récurrence.
3. Étude de la série entière.
   (a) Calcul du rayon de convergence.
   (b) Calcul de la somme
4. Expression de B_n.

Démonstration. Soit $n \geq 0$.

Étape 1 : établissons la relation de récurrence suivante $B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$ Pour $n = 0$ cette relation est vérifiée : $B_1 = 1$ et $\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} B_0 = B_0 = 1$. Établissons cette relation de récurrence pour $n \in \mathbb{N}$. Notons E_k l'ensemble des partitions de $[\![1, n+1]\!]$ pour lesquelles la partie contenant $(n+1)$ est de cardinal $(k+1)$.

Étape a : calcul de $|E_k|$ Montrons que $|E_k| = \binom{n}{k} B_{n-k}$.

- Constituer la partie contenant $(n+1)$ consiste en choisir k éléments dans $[\![1, n]\!]$: $\binom{n}{k}$ choix.
- Réaliser les partitions des $(n-k)$ éléments restants : B_{n-k} choix (définition de B_j).

Étape b : exprimons la récurrence Soit $\{E_0, \ldots, E_n\}$ une partition de $\{$partition de $[\![1, n+1]\!]\}$. En effet :

- $\forall i \neq j$, $E_i \cap E_j = \emptyset$ car les parties contenant $(n+1)$ sont de cardinal $(i+1)$ ou $(j+1)$ (qui sont distincts) : les partitions ne peuvent donc pas être les mêmes.
- $E_0, \ldots, E_n$ décrivent l'ensemble des partitions de $[\![1, n+1]\!]$ car ils décrivent l'ensembles des partitions selon la taille de la partie contenant $(n+1)$.

On a alors

$$\begin{array}{rcll} B_{n+1} & = & \left|\cup_{k=0}^{n} E_k\right| & \text{(on compte le nombre de partition grâce à la partition des partitions)} \\ & = & \sum_{k=0}^{n} |E_k| & \text{(car ils forment une partition)} \\ & = & \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k} & \text{(par le calcul précédent)} \\ & = & \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{n-j} B_j & \text{(changement d'indice } j = n-k\text{)} \\ & = & \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} B_j & (\binom{n}{n-j} = \binom{n}{j}) \end{array}$$

Étape 2 : majorons B_n Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}_n$: "$B_n \leq n!$.

Initialisation Pour $n = 0$, par hypothèse, on a $B_0 = 1 \leq 1 = 0!$.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \leq n$ $\mathcal{P}_k$ soit vérifiée. On a alors

$$\begin{array}{rcll} B_{n+1} & = & \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k & \text{(Étape 1)} \\ & \leq & \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} k! & ((\mathcal{P}_k)) \\ & = & \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!k!} k! & \text{(définition de } \binom{n}{k}\text{)} \\ & = & n! \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!k!} & \text{(simplification)} \\ & \leq & n! \sum_{j=0}^{n} 1 & (\frac{1}{(n-k)!k!} \leq 1) \\ & = & n!(n+1) & \text{(manipulation de la somme)} \\ & = & (n+1)! & \text{(manipulation de la factorielle)} \end{array}$$

D'où $\mathcal{P}_{n+1}$.

Étape 3 : montrons que la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$ **a un rayon de convergence** $R > 0$ **et sa somme** f **vérifie** $\forall z \in]-R, R[$, $f(z) = e^{e^z - 1}$

Étape a : calcul du rayon de convergence On a alors $\forall n \geq 0$ et $\forall z \in \mathbb{C}$, $\frac{B_n}{n!} z^n \leq |z|^n$ (car $\frac{B_n}{n!} \leq 1$). La série a alors un rayon de convergence $R \geq 1$. En particulier, $R \neq 0$.

Étape b : calcul de la somme Comme $R \neq 0$, pour tout $z \in]-R, R[$, on peut écrire

$$\begin{array}{rcll} f(z) & = & \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} z^n & \text{(Définition de } f\text{)} \\ & = & 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_{n+1}}{(n+1)!} z^{n+1} & \text{(On sort le premier terme de la somme)} \end{array}$$

On peut alors dérivé terme à terme cette série entière :

$$\begin{array}{rcll} f'(z) & = & \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k\right) z^n & \text{(Dérivation (} B_{n+1} \text{ est une constante) et expression de } B_{n+1}\text{)} \\ & = & \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{B_k}{k(n-k)!}\right) z^n & \text{(par définition du binome et en simplifiant l'expression obtenue)} \end{array}$$

On reconnaît le produit de Cauchy entre les séries $\sum \frac{B_n}{n!} z^n$ et $\sum \frac{z^n}{n!}$ (de rayon de convergence $+\infty$ et de somme e^z) qui ont toutes les deux un rayon de convergence supérieur ou égal à R. Donc $\forall z \in]-R, R[$, $f'(z) = f(z)e^z$. On en déduit qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $z \in]-R, R[$, $f(z) = Ce^{e^z}$.

Comme $f(0) = B_0 = 1$, on en déduit que $C = \frac{1}{e}$ (car $Ce^{e^z} = Ce = 1$ si $z = 0$). On conclut que pour tout $z \in]-R, R[$, $f(z) = \frac{1}{e} e^{e^z} = e^{e^z - 1}$.

Étape 4 : montrons que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $B_k = \frac{1}{e} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^k}{n!} \right)$

— La série entière définissant la fonction exponentielle ayant un rayon de convergence infini, on a $\forall z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{array}{rcll} e^{e^z} & = & \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{nz}}{n!} & \text{(série entière de } e^z\text{)} \\ & = & \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(nz)^k}{k!} \right) & \text{(série entière de } e^{nz}\text{)} \end{array}$$

— Pour tout $k, n \in \mathbb{N}$, on note $u_{n,k} = \frac{(nz)^k}{n!k!}$. Montrons que $(u_{n,k})_{n,k}$ est sommable. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{array}{rcll} \sum_{k=0}^{+\infty} |u_{n,k}| & = & \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|nz|^k}{n!k!} & \text{(Définition de } u_{n,k} \text{ et propriété du module)} \\ & = & \frac{e^{|nz|}}{n!} & \text{(série entière de } e^{nz}\text{)} \end{array}$$

On obtient le terme général d'une série convergeant vers $e^{e^{|z|}}$. La double somme est donc bien sommable.

— On peut donc sommer cette famille dans l'ordre que l'on souhaite (cas particulier de Fubini). Pour tout $z \in]-R, R[$, on a :

$$\begin{array}{rcll} f(z) & = & \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} u_{n,k} \right) & \text{(Définition de } f\text{)} \\ & = & \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_{n,k} \right) & \text{(Interversion des sommes)} \\ & = & \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^k}{n!} \right) \frac{z^k}{k!} & \text{(Définition de } u_{n,k} \text{ et sortir les termes ne dépendant pas de } n\text{)} \end{array}$$

— Par unicité du développement en série entière de f sur $]-R, R[$, on en déduit que pour tout $k \geq 0$, $B_k = \frac{1}{e} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^k}{n!} \right)$.

Remarque. On vient de montrer qu'en réalité la rayon de convergence de f est ∞.

□

Références

[1] S.Nicolas S. Francinou, H. Gianella. *Oraux X-ENS, Algèbre 1*. Cassini.