Formule sommatoire de Poisson

Julie Parreaux

2018-2019

Référence du développement : Gourdon [2, p.272] et 40 développements en analyse [1, p.253].

Leçons où on présente le développement : 224 (Développement asymptotique) ; 236 (Calcul d'intégrale) ; 246 (Série de Fourier) ; 250 (Transformée de Fourier) ; 265 (Fonctions usuelles et spéciales).

1 Introduction

La formule sommatoire de Poisson est une formule nous permettant de développer des séries de Fourier pour certaines fonctions. On a ainsi une application de la formule aux fonctions spéciales comme la fonction thêta de Jacobi. On a aussi une application à la théorie du signal avec le théorème de Shannon. Il permet de garantir qu'il n'y a aucune perte d'information lors de l'échantillonnage à au loin au double de sa fréquence maximum. En pratique, on enlève les trop grandes fréquences puis on échantillonne à $2F$. Si on ne respecte pas ces principe, on s'expose à un recouvrement qui peut ne pas bien se passer.

Schéma du développement (leçons 224, 246, 265)

Formule sommatoire de Poisson et application à la fonctions thêta de Jacobi.

1. Montrer que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n)$ converge simplement.
2. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ et est $1-$périodique.
3. Calcul de la série de Fourier de F.
4. Application à la fonction Θ de Jacobi (Le lemme est admis).

Schéma du développement (leçons 236)

Formule sommatoire de Poisson et théorème de Shannon.

1. Dire que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n)$ converge simplement.
2. Dire que F est de classe $\mathcal{C}^1$ et est $1-$périodique.
3. Calcul de la série de Fourier de F.
4. Preuve du lemme.
5. Application à Shannon.

2 Formule sommatoire de Poisson et fonctions thêta de Jacobi

Théorème. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant $f(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et $f'(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ lorsque $|x| \to +\infty$. Alors,*

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e^{2i\pi n x} \quad \text{où} \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \widehat{f}(n) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2i\pi n t} dt$$

Démonstration. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant $f(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et $f'(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ lorsque $|x| \to +\infty$.

Étape 1 : montrons que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)$ converge simplement. On va montrer qu'elle converge normalement sur tout segment de $\mathbb{R}$. Soit $M > 0$ telle que $|f(x)| \leq \frac{M}{x^2}$ pour $|x| \geq 1$, on écrit alors $\forall K > 0$.

$$\forall x \in [-K, K], \forall n \in \mathbb{Z}, |x| > K+1, |f(x+n)| \underbrace{\leq}_{\text{hypothèse sur } M} \frac{M}{(x+n)^2} \underbrace{\leq}_{-K+n \leq x+n} \frac{M}{(|n|-K)^2}$$

En effet, soit $n \in \mathbb{Z}$, on distingue alors deux cas.

Cas $n \geq 0$ $|f(x+n)| \leq \frac{M}{(x+n)^2} \leq \frac{M}{(n-K)^2}$ avec $n > K+1 \Leftrightarrow 1 < n-K$.

$$\begin{array}{rl} -K \leq x \leq K & \text{(hypothèse)} \\ 0 \leq 1 < n-K \leq n+x \leq n+K & \text{(addition de } n\text{)} \\ (n-K)^2 \leq (n+x)^2 & \text{(croissance de } x^2\text{)} \\ \frac{1}{(n-K)^2} \geq \frac{1}{(n+x)^2} & \text{(décroissance de } \frac{1}{x}\text{)} \end{array}$$

Cas $n \leq 0$ $|f(x+n)| \leq \frac{M}{(x+n)^2} \leq \frac{M}{(-n-K)^2}$ avec $-n > K+1 \Leftrightarrow -K-1 < n \leq 0$.

$$\begin{array}{rl} -K \leq x \leq K & \text{(hypothèse)} \\ 0 \leq 1 < n-K \leq n+x \leq n+K & \text{(addition de } n\text{)} \\ (n+K)^2 \leq (n+x)^2 & \text{(décroissance de } x^2\text{)} \\ \frac{1}{(n+x)^2} \leq \frac{1}{(n+K)^2} & \text{(décroissance de } \frac{1}{x}\text{)} \end{array}$$

Donc la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)$ converge simplement vers F sa limite simple.

Étape 2 : montrons que F est de classe $\mathcal{C}^1$ et est $1-$périodique.

F est de classe $\mathcal{C}^1$ De même que précédemment, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f'(x+n)$ converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$. Par le théorème de dérivation sur les suites de fonctions, F est de classe $\mathcal{C}^1$.

F est $1-$périodique Soit $x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=-N}^{N} f(x+1+n) = \sum_{n=-N-1}^{N+1} f(x+n)$ (par changement d'indice $n = n+1$). On conclut en passant à la limite, on en déduit que $F(x+1) = F(x)$.

Étape 3 : calcul de la série de Fourier de F. Soit $n \in \mathbb{Z}$, calculons les coefficients de Fourier.

$$\begin{array}{rcll} c_n(F) & = & \int_0^1 F(t)e^{-2i\pi nt}dt & \text{(définition des coefficients)} \\ & = & \int_0^1 \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(t+m)e^{-2i\pi nt}dt & \text{(définition de } F \text{ comme limite de la somme)} \\ & = & \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^1 f(t+m)e^{-2i\pi nt}dt & \text{(interversion car on a les convergences absolues)} \\ & = & \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_m^{m+1} f(t)e^{-2i\pi nt}dt & \text{(changement de variable } t = t+m\text{)} \\ & = & \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2i\pi nt}dt & \text{(on "recolle" les intégrales)} \\ & = & \widehat{f}(n) & \text{(définition)} \end{array}$$

Comme F est de classe $\mathcal{C}^1$ et 1-périodique, le théorème de convergence normale de Dirichlet nous assure que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F = \sum_{n\in\mathbb{N}} \widehat{f}(n)e^{2i\pi nx}$ qui est bien la série de Fourier. D'où la formule sommatoire de Poisson. □

Étape 4 : application à la fonction Θ de Jacobi. Pour l'application, on va avoir besoin d'un lemme [2, p.164, ex 4.3] afin d'effectuer les calculs nécessaires.

Lemme 1. *Pour tout $x \geq 0$, on a*

$$I(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}e^{2i\pi tx}dt = \sqrt{\pi}e^{-\pi^2x^2}$$

Démonstration. Par le théorème de dérivation sous le signe intégrable, on montre que I est dérivable et que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad I'(x) = 2i\pi \int_{-\infty}^{\infty} te^{-t^2} e^{2i\pi tx} dt$$

Avec une intégration par partie, on obtient que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad I(x) = \underbrace{\left[\frac{1}{2i\pi x} e^{-t^2} e^{2i\pi tx}\right]_{-\infty}^{\infty}}_{=0} + \frac{1}{2i\pi x} \int_{-\infty}^{\infty} 2te^{-t^2} e^{2i\pi tx} dt = \frac{1}{i\pi x} \frac{1}{2i\pi} I'(x)$$

En résolvant cette équation différentielle vérifié par I, on trouve

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad I(x) = \sqrt{\pi} e^{-\pi^2 x^2}$$

□

Application (Application de la fonction Θ de Jacobi)**.** *On pose* $\theta(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x^{n^2}$ *et*

$$\begin{array}{rccl} \Theta : &]0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 x} = \theta\left(e^{-\pi x}\right) \end{array}$$

Alors, $\forall x > 0$, $\Theta(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \Theta\left(\frac{1}{x}\right)$.

Démonstration. Soit $\alpha > 0$. On souhaite appliquer la formule sommatoire de Poisson à la fonction $f : x \mapsto e^{\alpha x^2}$. Les coefficients de Fourier de $\widehat{f}(n)$ sont donnés par, $\forall n \in \mathbb{Z}$,

$$\widehat{f}(n) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t^2} e^{-2i\pi nt} dt \underbrace{=}_{t=\frac{u}{\sqrt{\alpha}}} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} e^{-2i\pi nu/\sqrt{\alpha}} dt \underbrace{=}_{\text{lemme 1}} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\pi^2 n^2/\alpha}$$

En appliquant la formule de Poisson avec $x = 0$, on en déduit

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} e^{-\alpha n^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \sum_{n\in\mathbb{N}} e^{-\pi^2 n^2/\alpha}$$

Ceci est vrai $\forall \alpha > 0$ et en effectuant le changement de variable $\alpha = \pi x$, on obtient le résultat désiré. □

3 Formule sommatoire de Poisson et théorème de Shannon [1, p.253]

Théorème. *Soit f un élément de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Alors,*

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t + 2\pi n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e^{2i\pi t} \quad \text{où} \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \widehat{f}(n) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-int} dt$$

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Étape 1 : montrons que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(. + 2n\pi)$ et sa dérivée converge normalement sur tout compact. Soit K un compact de $\mathbb{R}$ et $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $K \subset [-N, N]$. Soit $i \in \{0, 1\}$. Comme $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, il existe $M_i \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\left|f^{(i)}(t)\right| \leq \frac{M_i}{1 + t^2}$$

f et f' sont à décroissance rapide donc $\exists M_i$ tel que $\left|f^{(i)}(t) x^\alpha\right| \leq M_i$. De plus, sur K il existe une borne et on se protège du cas 0. En dehors du compact, c'est donné par la décroissance rapide de f et f'.

Pour tout $t \in K$ et $n \in \mathbb{Z}$ tel que $|n| \geq N + 1$, on a alors :

$$\left|f^{(i)}(t + 2\pi n)\right| \leq \frac{M_i}{1 + (t + 2n\pi)^2} \leq \frac{M_i}{(|n| - N)^2}$$

Arguments de la preuve :

$\left|f^{(i)}(t+2\pi n)\right| \leq \frac{M_i}{1+(t+2n\pi)^2}$ remplace t dans la précédente intégrale

$\frac{M_i}{1+(t+2n\pi)^2} \leq \frac{M_i}{(|n|-N)^2}$ on a pour $t \in K$

$$\begin{array}{ccccccl}
-N & \leq & t & \leq & N & & (t \in K) \\
-N+|n| & \leq & t+|n| & \leq & N+|n| & & (\text{Ajout de } |n|) \\
(-N+|n|)^2 & \leq & (t+|n|)^2 & \leq & (N+|n|)^2 & & (\text{Croissance de } x \mapsto x^2) \\
(-N+|n|)^2 & \leq & (t+|n|)^2+1 & & (\text{Ajout de 1 à droite}) & & \\
\frac{1}{(-N+|n|)^2} & \geq & \frac{1}{(t+|n|)^2+1} & & (\text{Décroissance de } x \mapsto \frac{1}{x}) & & \\
\frac{M_i}{(-N+|n|)^2} & \geq & \frac{M_i}{(t+|n|)^2+1} & & (\text{Multiplication par } M_i \text{ constante positive}) & &
\end{array}$$

Or la série $\sum_{|n|\geq N+1} \frac{1}{(|n|-N)^2}$ converge (série de Riemann $\alpha = 2$), donc la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f^{(i)}(2n\pi + .)$ converge normalement sur K. Notons g cette série (existence donnée par la convergence normale).

Étape 2 : étude de g.

F est de classe $\mathcal{C}^1$
- $f(2n\pi + .) \in \mathcal{C}^1$ ($f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$)
- $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(2n\pi + .)$ converge simplement
- $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f'(2n\pi + .)$ converge simplement

Par le théorème de dérivation sous le signe somme, $g \in \mathcal{C}^1$.

F est $2\pi-$périodique Soit $x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $g(x+2\pi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n2\pi+2\pi)$ (par définition de g). Par un changement d'indice $m = n+1$, $g(x+1+n2\pi+2\pi) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} f(x+m2\pi) = g(x)$ (par définition de g).

Étape 3 : calcul de la série de Fourier de g.

- Soit $n \in \mathbb{Z}$, calculons les coefficients de Fourier.
$$\begin{array}{rcll}
c_n(F) & = & \int_{-\pi}^{\pi} g(t)e^{-int}dt & (\text{Définition des coefficients}) \\
 & = & \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(t+2m\pi)e^{-int}dt & (\text{Définition de } g \text{ comme limite de la somme}) \\
 & = & \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+2m\pi)e^{-int}dt & (\text{Interversion car on a les convergences normales}
\end{array}$$
- Soit $N \in \mathbb{N}^*$
$$\begin{array}{rcll}
\sum_{n=-N}^{N} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+2m\pi)e^{-int}dt & = & \sum_{n=-N}^{N} \int_{n-\pi}^{n+\pi} f(x\pi)e^{-in(x-2\pi)}dt & (\text{Changement de variables } x = t+2\pi) \\
 & = & \int_{-N-\pi}^{N+\pi} f(x\pi)e^{-in(x-2\pi)}dt & (\text{Recollement des intégrales})
\end{array}$$
En prenant la limite, on obtient $c_k(g) = \widehat{f}(k)$ lorsque $N \to +\infty$.
- Comme $g \in \mathcal{C}^1$ et 2π-périodique, le théorème de convergence normale de Dirichlet assure que pour tout $t \in \mathbb{R}$, d'où la formule sommatoire de Poisson.

$\square$

Étape 4 : application au théorème de Shannon

Application. *Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ telle que le support de $\widehat{f}$ est inclus dans $[-F, F]$ où $F \in \mathbb{R}_+^*$. Si $2F \leq 1$, alors pour tout réel t,*

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin((n-t)\pi)}{(n-t)\pi}$$

Démonstration. Supposons que le support de $\widehat{f}$ est inclus dans $[-F, F]$ où $2F \leq 1$.

- Comme la transformée de Fourier est une bijection de classe de Schwartz sur elle-même, $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. On peut donc appliquer la formule sommatoire de Poisson : pour tout $\xi \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(t+2\pi n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\widehat{f}}(n)e^{2i\pi t}$$

— En appliquant la formule d'inversion de Fourier (deux fois), $\widehat{\widehat{f}}(n) = f(-n)$, et

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(\xi + 2\pi n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(-n)e^{-int}$$

Mais la condition $2F \leq 1$, assure que $\forall k \in \mathbb{Z}^*$, $\widehat{f}(2\pi k + .)$ est nulle sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ et donc

$$\widehat{f} = \mathbb{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(. + 2\pi n) = \mathbb{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]} \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(-n)e^{-int}$$

— Soit $t \in \mathbb{R}$, la formule d'inversion de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ donne

$$\begin{array}{rcll} f(t) & = & \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\mathbb{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(\xi) \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(f(-n)e^{-i(t+n)\xi}\right) e^{-in\xi} d\xi\right) & \text{(Inversion de Fourier)} \\ & = & \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(f(-n)e^{-in\xi}\right) e^{-in\xi} d\xi & \text{(Support)} \\ & = & \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \left(f(m)e^{-i(t-m)\xi}\right) e^{-in\xi} d\xi & \text{(Changement de variable } m = -n) \end{array}$$

Or la série $\sum_{m\in\mathbb{Z}} \left(f(m)e^{-i(t-m)\cdot}\right)$ converge normalement donc uniformément sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$: $\forall n \in \mathbb{Z}$,

$$\|f(m)e^{-i(t-m)\cdot}\|_\infty = |f(n)|$$

et la série $\sum_{m\in\mathbb{Z}} |f(m)|$ converge par convergence normale de $\sum_{m\in\mathbb{Z}} f(2\pi m + .)$. Donc

$$f(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(m) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{i(t-m)\xi} d\xi = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin((n-t)\pi)}{(n-t)\pi}$$

□

Références

[1] J. Bernis and L. Bernis. *Analyse pour l'agrégation de mathématiques, 40 développements*. Ellipse, 2018.

[2] X. Gourdon. *Analyse*. Les maths en tête. Ellipses, 2008.

[3] W. Rudin. *Principe d'analyse mathématiques*. Dunod, 2006.