Suite de polygones

Julie Parreaux

2018-2019

Référence du développement : Gourdon [2] (pour le déterminant circulant)

Leçons où on présente le développement : 152 (Déterminant) ; 182 (Nombre complexe en géométrie) ; 226 (Suites récurrentes).

1 Introduction

Le déterminant est un outil mathématique puissant. Dans cette étude, on l'utilise afin de calculer la limite d'une suire récurrente particulière : une suite définie à partir de polygones. En définissant une suite de polygones définie telle que les sommets soient sur les différents côtés, cette suite converge vers l'isobarycentre du polygone. Notons qu'elle peut être définie comme on le souhaite (les nouveaux sommets doivent juste être sur un des côtés) sans que cela impacte sa limite.

2 Suite de polygones

Schéma du développement

— Calcul du déterminant circulant

— Application aux calcul de la limite d'une suite de polygones

1. Réécrire la suite récurrente avec une matrice.
2. Étude des valeurs propres de M.
3. Existence de la limite.
4. Identification de la limite.

Lemme (Calcul du déterminant d'une matrice circulante)**.** *Soit* $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_2 & a_3 & \dots & a_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *une matrice circulante et* $P_A = \sum_{k=1}^n a_k X^k$*. Alors,* $\det A = \prod_{k=1}^n P_A(w^k)$ *où* $w = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

Démonstration. On note $\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & w & w^2 & \dots & w^{n-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & w^{n-1} & (w^2)^{n-1} & \dots & (w^{n-1})^{n-1} \end{pmatrix}$.

— On remarque que $\det \Omega \neq 0$ car c'est un déterminant de Vandermond (car les w^i sont deux à deux distincts).

— On remarque que $\det(A\Omega) = \det \begin{pmatrix} P(1) & P(w) & \dots & P(w^{n-1}) \\ P(1) & P(w)w & \dots & P(w^{n-1})w^{n-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ P(1) & P(w)w^{n-1} & \dots & P(w^{n-1})(w^{n-1})^{n-1} \end{pmatrix}$

Donc $\det(A\Omega) = \begin{cases} \det(A)\det(\Omega) & \text{(par multiplicativité du déterminant)} \\ P(1)P(w)\dots P(w^{n-1})\det(\Omega) & \text{(par propriété du déterminant)} \end{cases}$

Comme $\det\Omega \neq 0$, on obtient le résultat annoncé. □

Théorème. *On considère une suite de polygones de n sommets dont les sommets sont pris dans $\mathbb{C}$, soit un $n-$uplet de $\mathbb{C}$, définie telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, le polygone P_{k+1} définit à partir des milieux des côtés du polygone P_k. On souhaite montrer que cette suite converge vers l'isobarycentre de P_0.*

On donne, dans la figure 1, un exemple d'une telle suite.

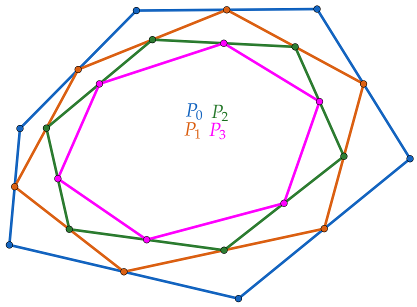

FIGURE 1 – Un exemple de suite polygone.

Démonstration. Soit $(P_k)_k$ une suite de polygone à n sommets. On note alors $P_0 = \left(z_1^{(0)}, \dots, z_n^{(0)}\right) \in \mathbb{C}^n$ et $P_{k+1} = \left(\frac{z_1^{(k)}+z_2^{(k)}}{2}, \dots, \frac{z_{n-1}^{(k)}+z_n^{(k)}}{2}\right)$. Montrons que la suite P_k converge vers $g\,(1,\dots,1)$ où g est l'isobarycentre de P_0.

Étape 1 : réécrire la suite récurrente avec une matrice. On peut réécrire cette suite récurrente $P_{k+1} = MP_k$ avec

$$M = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Et par récurrence immédiate, on a $P_k = M^k P_0$. Il suffit alors de montrer que $\left(M^k\right)$ converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ muni d'une norme d'algèbre $|||.|||$.

Étape 2 : étude les valeurs propres de M. On étudie alors le polynôme caractéristique de M.

$$\chi_M(\lambda) = \det(M - \lambda Id) = \begin{bmatrix} a_0 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_0 & \frac{1}{2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & a_0 \end{bmatrix}$$

avec $a_0 = \frac{1}{2} - \lambda$. On reconnaît un déterminant circulant, et par le lemme

$$\chi_M(\lambda) = \prod_{j=1}^{n} P\left(\frac{1}{2} - \lambda + \frac{1}{2}w^j\right) = \prod_{j=1}^{n} P\left(w^j\right) = \prod_{j=1}^{n} P\left(\lambda - \frac{1+w^j}{2}\right)$$

Étape 3 : existence de la limite. Comme les w^i sont deux à deux distinctes, le polynôme caractéristique de M, χ_M est scindé à racine simple, donc M est diagonalisable de valeurs propres $\{\frac{1+w^j}{2} \mid 1 \leq j \leq n\}$. Donc $\exists Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $M = Q\mathrm{Diag}\left(\frac{1+w}{2}, \dots, \frac{1+w^n}{2}\right) Q^{-1}$. Or, pour $j \neq n$, on a

$$\left|\frac{1+w^j}{2}\right| \underbrace{=}_{\text{calcul}} \left|\cos\left(\frac{\pi j}{n}\right)\right| \underbrace{<}_{\text{on est dans } \mathbb{R}} 1$$

et donc $\left|\frac{1+w^j}{2}\right|^k \to 0$. On a donc $\lim_{k\to\infty} M^k = Q\mathrm{Diag}\,(0,\dots,0,1)\,Q^{-1}$ qui converge bien dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et on note cette limite M^∞. On en déduit, par la récurrence immédiate, $\lim_{k\to\infty} P_k = M^\infty P_0$ que l'on note X.

Étape 4 : identification de la limite. Par continuité de la limite, on a $X = M^\infty X$. Or, l'espace correspondant à la valeur propre 1 contient le vecteur $(1,\dots,1)$, et comme il est de dimension 1, ce vecteur le génère complètement, donc $X = (a,\dots,a)$, c'est à dire que (P_k) converge vers le point d'affixe a.

Enfin, on remarque que si g est l'isobarycentre de P_0, il est aussi celui de P_k, car on a

$$g_{k+1} \underbrace{=}_{\text{def de l'isobarycentre}} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n z_i^{(k+1)} \underbrace{=}_{\text{def de la suite}} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{z_i^{(k)} + z_{i+1}^{(k)}}{2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n z_i^{(k)} \underbrace{=}_{\text{def de l'isobarycentre}} g_k$$

Par continuité, g est encore l'isobarycentre de X, d'où $a = g$. □

3 Compléments autours du déterminant et de la diagonalisation

Déterminant

Nous commençons par définir le déterminant [2, p.134]. Pour ce faire nous devons introduire la notion de forme n-linéaire alternée et anti-symétrique. On note K un corps commutatif (la théorie reste vrai pour quelques anneaux)

Formes n-linéaires alternées et antisymétrique

Définition. Soient $E_1,\dots,E_n$ et F des K-espaces vectoriel. Une application $f : E_1 \times \dots \times E_n \to F$ qui à $(x_1,\dots,x_n)$ associe $f(x_1,\dots,x_n)$ est dite n-linéaire si en tout point les n applications partielles sont linéaire. Si $F = K$, on parle de forme n-linéaire.

Remarque : Si une application est 2-linéaire, on dit qu'elle est bilinéaire.

Remarque : On a $\dim \mathcal{L}_n(E,K) = (\dim E)^n$.

Définition. Soit $f \in \mathcal{L}_n(E,K)$.

— f est dite alternée si $f(x_1,\dots,x_n) = 0$ lorsque deux vecteurs sont égaux.

— f est dite antisymétrique si l'échange de deux vecteurs donne une valeur opposée.

Théorème. *Soient K un corps commutatif de caractéristique différente de 2, E un K-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}_n(E,K)$. Alors f est antisymétrique si et seulement si f est alternée.*

Démonstration. On raisonne en dimension 2.

$\Rightarrow$ f antisymétrique : $f(x_1,x_1) = -f(x_1,x_1)$, donc $2f(x_1,x_1) = 0$ et car$K \neq 2$: $f(x_1,x_1) = 0$.

$\Leftarrow$ f alternée : $f(x_1,x_2) + f(x_1,x_2) = f(x_1+x_2,x_2) + f(x_1+x_2,x_1) = f(x_1+x_2,x_1+x_2) = 0$, donc $f(x_1,x_2) = -f(x_2,x_1)$. □

Remarque : Dans le cas d'un corps de caractéristique 2, on a toujours f alternée implique f antisymétrique.

Déterminant sur une famille de vecteurs

Théorème. *L'ensemble des formes n-linéaires alternées sur un K-espace vectoriel E de dimension n est un K-espace vectoriel E de dimension 1. De plus, il existe une et une seule forme n-linéaire alternée prenant la valeur 1 sur une base donnée de E.*

Démonstration. Soit $B = (e_1,\dots,e_n)$ une base de E.

— On définie $d(x_1,\dots,x_n) = e_1^*(x_1)\dots e_n^*(x_n) = x_{1,1}\dots x_{n,n}$. On note $d^\natural(x_1,\dots,x_n) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \epsilon(\sigma) x_{\sigma(1),1}\dots x_{\sigma(n),n}$. On a $d^\natural(e_1,\dots,e_n) = 1$, d'ou $d^\natural \neq 0$.

— f une forme n-linéaire alternée : $f(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i_1,\dots,i_n} x_{1,i_1}\dots x_{n,i_n} f(e_{i_1},\dots,e_{i_n}) = f(e_1,\dots,e_n) d^\natural(x_1,\dots,x_n)$.

— $f \in \mathrm{Vect}(d^\natural)$ avec $d^\natural \neq 0$: existence de l'espace vectoriel de dimension 1.

— Si $f(e_1,\dots,e_n) = 1$, alors $f = d^\natural$. D'où l'unicité.

□

Définition. Soit B une base de E, alors il existe une unique forme n-linéaire alternée sur E prenant la valeur 1 sur la base B. On l'appelle déterminant et on la note $\det_B$.

Remarque : On a également une formule explicite dans ce cas : $\det_B(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \epsilon(\sigma) x_{1,\sigma(1)} \dots x_{n,\sigma(n)}$.

Proposition. *Soit f une forme n-linéaire alternée, alors $f(x_1, \dots, x_n) = f(e_1, \dots, e_n) \det_B(x_1, \dots, x_n)$.*

Démonstration. On applique le théorème précédent : $f \in \mathrm{Vect}(\det_B)$ et son coefficient est donné par l'application de f à B. □

Proposition (Changement de base)**.** *Soient B, B' deux bases de E, alors $\det_{B'}(x_1, \dots, x_n) = \det_{B'} B \det_B(x_1, \dots, x_n)$. On en déduit que $\det_{B'} B \det_B B' = 1$.*

Démonstration. On applique la proposition précédente avec $f = \det_{B'}$. □

Théorème. *Soient $x_1, \dots, x_n \in E$, les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *Les vecteurs $x_1, \dots, x_n$ sont liés.*
2. *Pour toute bases B de E, $\det_B(x_1, \dots, x_n) = 0$.*
3. *Il existe une base B de E, $\det_B(x_1, \dots, x_n) = 0$.*

Démonstration. **Montrons** $1 \Rightarrow 2$ Soit B une base de E, $\det_B$ est une forme n-linéaire alterné. On a $\det_B(x_1, \dots, x_n) = \det_B(\sum_{i=2}^n \lambda_i x_i, \dots, x_n)$ ($\lambda_i \neq 0$ car famille liée), par n-linéarité $\det_B(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=2}^n \lambda_i \det_B(x_i, \dots, x_n)$. Par alternée, $\det_B(x_1, \dots, x_n) = 0$.

Montrons $2 \Rightarrow 3$ Évident

Montrons $3 \Rightarrow 1$ $\det_B$ alternée donc il existe $x_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \lambda_i xi$ avec λ_i non tous nuls : la famille est liée.

□

Déterminant sur un endomorphisme

Déterminant sur une matrice carrée

Valeurs propres

Les valeurs et les vecteurs propres apparaissent dès que nous cherchons à donner à un endomorphisme des représentations agréable [1, p.958]. Nous cherchons à les définir et à en donner quelques propriétés.

Définition. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que $\lambda \in K$ est valeur propre de u s'il existe $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $u(x) = \lambda x$. Un tel vecteur x est alors appelé un vecteur propre associé à la valeur propre λ.

Remarque : Dans ce cas, nous somme entrain de dire que Kx est une droite stable par u.

Définition. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Si $\lambda \in K$ est une valeur propre de u, le sous-espace propre E_λ associé est le sous-espace vectoriel $E_\lambda = \ker(u - \lambda Id_E)$.

Remarque : Un sous-espace propre est l'ensemble des vecteurs propres auquel on ajoute le vecteur nul.

Définition. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. L'ensemble des valeurs propres de u est appelé le spectre de u, et est noté $Sp_K(u)$. Il est éventuellement vide.

Remarque : Si $M \in \mathcal{M}_n(K)$, on définit les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice comme étant ceux de l'endomorphisme de $K^n \to K^n$ et qui $X \mapsto MX$.

Lemme. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors, $\lambda \in K$ est une valeurs propre de u, si et seulement si, $\chi_u(\lambda) = 0$. En particulier, $Sp_K(u)$ est un ensemble fini.*

Démonstration. λ est une valeur propre si et seulement si $\ker(\lambda Id_E - u) \neq \{0\}$ (définition) soit $(\lambda Id_E - u)$ est non inversible d'où $\det(\lambda Id_E - u) = 0$. $Sp_K(u)$ est un ensemble fini car un polynôme non nul possède un ensemble fini de racine. □

Définition. Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in Sp_K(u)$. La multiplicité de λ est sa multiplicité en tant que racine de χ_u.

Remarque : Autrement dit, c'est la plus grand entier $m \geq 1$ tel que $(X-\lambda)^m$ divise χ_u.

Proposition. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Pour tout $\lambda \in Sp_K(u)$, on a $1 \leq \dim_K(E_\lambda) \leq m_\lambda$ où m_λ est la multiplicité de λ.*

Démonstration. Provient des définitions de vecteur propre et de leurs multiplicité. □

Lemme. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors, les sous-espace propres de u sont en somme directe.*

Lemme. *Soient $u \in \mathcal{L}(E)$, x un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ. Alors, pour tout $P \in K[X]$, on a $P(u)(x) = P(\lambda)(x)$. En particulier, si P annule u alors λ est racine de P.*

Démonstration. On montre par récurrence que $u^m(x) = \lambda^m x$. On évalue alors P en u. □

Diagonalisation

On cherche à écrire une matrice sous une forme plus agréable afin de facilité sa manipulation (comme lorsque nous voulons la mettre à la puissance, lors d'un calcul d'exponentielle) [1, p.956]. Cette opération revient à diagonaliser la matrice, c'est-à-dire trouver une base dans laquelle la matrice est diagonale.

Critères de diagonalisation Commençons par définir les matrices diagonalisables puis donnons les différentes caractérisations à la diagonalisation.

Lemme. *Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie non nulle n, $u \in \mathcal{L}(E)$ et e une base de E. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *la matrice $Mat(u; e)$ est diagonale.*
2. *il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ tels que $\forall i \in [\![1; n]\!], u(e_i) = \lambda_i$ si $u_i \in e$*

Démonstration. Définition d'une matrice représentative. On remarque de plus que les e_i sont non nuls car ils proviennent d'une base. □

Définition. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est diagonalisable s'il existe une base de E dans laquelle la matrice représentative de u soit diagonale.

Remarque : Cela revient à dire qu'il existe une base de E formée de vecteur propre de u, ou encore de que E se décompose en somme directe de droites stables par u.

Théorème. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *l'endomorphisme u est diagonalisable*
2. *on a $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp_K(u)} E_\lambda$*
3. *le polynôme χ_u est scindé, et pour tout $\lambda \in Sp_K(u)$, on a $\dim_K(E_\lambda) = m_\lambda$, où m_λ est la multiplicité de λ.*

Démonstration. **Montrons** 3 ⇒ 2 χ_u est scindé et les valeurs propres de u sont exactement ses racines : $\chi_u = \prod_{\lambda \in Sp_K(u)} (X-\lambda)^m_\lambda$. En comparant les degré, $\sum_{\lambda \in Sp_K(u)} m_\lambda = n$, on en déduit que $\dim_K(\bigoplus_{\lambda \in Sp_K(u)} E_\lambda) = \dim_K(E)$.

Montrons 2 ⇒ 1 Clair en recollant les bases des sous-espaces propres.

Montrons 1 ⇒ 3 On calcul le polynôme caractéristique sur le représentation diagonale de l'endomorphisme.

□

Corollaire. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Si u possède $n = \dim_K(E)$ valeurs propres distinctes, alors u est diagonalisable.*

Démonstration. Application des propositions et théorèmes précédents. □

Théorème. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *l'endomorphisme u est diagonalisable*
2. *le polynôme $\prod_{\lambda \in Sp_K(u)} (X-\lambda)$ annule u*
3. *il existe un polynôme P annulant u scindé sans racines multiples. Dans ce cas $Sp_K(u)$ est contenu dans ces racines*
4. *le polynôme minimal μ_u est scindé sans racines multiples*

5. $\mu_u = \prod_{\lambda \in Sp_K(u)} (X - \lambda)$

Démonstration. **Montrons** $1 \Rightarrow 2$ Le théorème précédent et le lemme des noyaux nous donne l'existence de $P = \prod_{\lambda \in Sp_K(u)} (X - \lambda)$ tel que $e = \ker(P(u))$. Dans ce cas $P(u) = 0$.

Montrons $2 \Rightarrow 3$ Clair par propriétés des valeurs propres et des polynômes.

Montrons $3 \Rightarrow 4$ Le polynôme minimal μ_u divise P.

Montrons $4 \Rightarrow 5$ Les polynômes μ_u et χ_u ont exactement les même racines qui sont les valeurs propres de u.

Montrons $5 \Rightarrow 1$ On applique le lemme de décomposition des noyaux.

□

Lemme. *Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace stable par u. Si u est diagonalisable, alors $u_F \in \mathcal{L}(F)$ est diagonalisable.*

Démonstration. On applique le théorème précédent à la restriction du polynôme minimal de u_F qui est un restriction de celui de u. □

Théorème. *Soient $u, u' \in \mathcal{L}(E)$ tels que u et u' commutent. S'ils sont diagonalisables, alors ils le sont dans la même base.*

Démonstration. Si λ est une valeur propre de u alors E_λ est stable par u'. Par ce qui précède, u'_{E_λ} est diagonalisable : il existe donc une base qui diagonalise u'_{E_λ}. En recollant les différentes base, comme u et u' sont diagonalisables, on obtient cette base. □

Applications de la diagonalisation Il y a trois grandes applications à la diagonalisation [3, p.170].

Calcul d'une puissance Le calcul de A^m où A est une matrice diagonalisable s'effectue en diagonalisant A puis $A^m = P^{-1} D^m P$ où D^m consiste à mettre ses coefficients à la puissance (ce qui est facile).

Résolution d'un système de suites récurrentes On se ramène au calcul d'une puissance de la matrice sous-jacente au système.

Système différentiel linéaire à coefficients constants Si on met le système sous la forme d'une matrice A, on souhaite résoudre $\frac{dX}{dt} = AX$. On raisonne comme suit

1. on diagonalise A et on trouve D comme matrice diagonale et P comme matrice de passage : $D = P^{-1} D P$
2. on intègre le système $\frac{dX'}{dt} = DX'$ (plus facile car D est diagonale)
3. on revient à X par $X = PX'$.

Références

[1] G. Berhuy. *Algèbre : le grand combat*. Calvage & Mounet, 2018.

[2] X. Gourdon. *Algèbre*. Les maths en tête. Ellipses, 2009.

[3] J. Grifone. *Algèbre linéaire*. Cépaduès édition, 2015.