1 Passage direct

1.1 Exercice 1 - du calcul dans les anneaux

1. Soit x un element nilpotent d'un anneau A, c'est-à-dire un élément tel qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $x^p = 0$. Montrer que $1 - x$ est inversible et donner son inverse en fonction de x.
2. Soit maintenant $a, b \in A$ tels que $1 - ab$ est inversible. Montrer que $1 - ba$ est inversible.

1.2 Exercice 2 - $\mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$

Soit $A = \{a + b\sqrt{2} \quad | \quad a, b \in \mathbb{Z}\}$.

1. Montrer que A est un anneau intègre.
2. Pour tout $x = a + b\sqrt{2} \in A$, on pose $N(x) := a^2 - 2b^2$. Montrer que pour tout $x, y \in A$, $N(xy) = N(x)N(y)$.
3. En deduire que x est inversible dans A si et seulement si $N(x) = \pm 1$.
4. Montrer que les éléments de la forme $\pm(1 \pm \sqrt{2})^n$ sont inversibles.
5. On veut montrer la reciproque. Montrer qu'on peut se ramener au cas $x = a + b\sqrt{2}$ avec $a \in \mathbb{N}^*$ et $b \in \mathbb{N}$ et montrer qu'alors x est de la forme $(1 + \sqrt{2})^n$ avec $n \in \mathbb{N}$ et conclure.

2 20 minutes de préparation

2.1 Question de cours

Interpréter la méthode de résolution des équations différentielles linéaires classique (somme de la solution homogène et d'une solution particulière) en termes de structure de l'ensemble des solutions. Qu'est ce que le principe de superposition des solutions, d'où provient-il ?

2.2 Exercice 1

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y'' - 3y' + 2y = 2x^3 - 7x^2 + 2x - 1$.

2.3 Exercice 2

Résoudre $y' - 2y = xe^{-|x|}$. Existe-t-il des solutions sur $\mathbb{R}$ tout entier ?

2.4 Exercice 3 - à coefficients non constants !

Soit $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ une fonction continue non nulle et soit l'équation $y'' + p(x)y = 0$. On suppose qu'il existe une solution f qui ne s'annule jamais.

1. Discuter du signe de f''.
2. Montrer qu'on a l'alternative suivante : ou bien le graphe de f est toujours au dessus de ses tangentes, ou bien toujours en dessous.
3. En déduire une propriété importante sur f', et conclure sur f. Qu'a-t-on montré au final ?

3 40 minutes de préparation

3.1 Cours (peut-être un peu plus !)

1. Définir proprement la notion d'espace vectoriel *de dimension finie*, puis de *dimension* d'un espace vectoriel.
2. Montrer qu'un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie, est lui aussi de dimension finie.

3.2 Familles positivement génératrices

Soit E un espace vectoriel réel de dimension $n \geqslant 1$ et une famille $\mathcal{F} = (e_1, \cdots, e_p)$ de E positivement génératrice, c'est-à-dire que pour tout $x \in E$ il existe des coefficients strictement positifs λ_i tels que $x = \sum_i \lambda_i e_i$.

1. Montrer que $p \geqslant n + 1$.
2. Donner un exemple de famille génératrice de cardinal $n + 1$.
3. Donner une condition suffisante sur une famille génératrice pour qu'elle soit positivement génératrice.
4. On suppose $p \geqslant 2n+1$: montrer qu'il existe une sous-famille stricte de $\mathcal{F}$ qui est encore positivement génératrice.
5. Donner un exemple où $p = 2n$ et $\mathcal{F}$ n'a pas de sous-famille stricte positivement génératrice.