1 Passage direct

1.1 Exercice 1

Résoudre l'équation différentielle

$$y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2t}}{1+t^2}$$

1.2 Exercice 2

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ 2π-périodique. Existe-t-il $y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ 2π-périodique et solution de $y'' + y = f$?

2 Préparation 20min

2.1 Exercice 1

Résoudre le système différentiel suivant : $\begin{cases} x' = 4x - 2y \\ y' = x + y \end{cases}$

2.2 Exercice 2

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ monotone ayant une limite finie en $+\infty$. Montrer que les solutions de l'équation $y'' + y = f$ sont bornées.

3 Préparation 40min

Soit le problème de Cauchy $\begin{cases} x'' = 1 - 3x^2 \\ x(0) = x'(0) = 0 \end{cases}$

1. Énoncer le théorème de Cauchy-Lipschitz. L'appliquer à la situation courante.
2. On note I l'intervalle maximal de définition de la solution maximale θ. Montrer que $\theta(I) \subset [0, 1]$ et en déduire que $I = \mathbb{R}$. *Indication : multiplier l'équation par une fonction adéquate pour reconnaître une primitive.*
3. Montrer que $A = \theta^{-1}(\{0\})$ et $B = \theta^{-1}(\{1\})$ sont des fermés discrets.
4. Montrer que $1 \in \theta(\mathbb{R})$ et en déduire que $\theta(\mathbb{R}) = [0, 1]$.
5. Montrer que pour tout $c \in A \cup B$ la droite d'équation $t = c$ est un axe de symétrie de la courbe intégrale.
6. Montrer que θ est périodique et exprimer sa période en fonction d'une intégrale.