1 Passage direct

Soit $n \in \mathbb{N}$. Trouver les racines de

$$P_n = (X+i)^{2n+1} - (X-i)^{2n+1}$$

En déduire la valeur de

$$\prod_{k=1}^{n} \left(4 + \operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)^2\right)$$

2 Préparation 20min

2.1 Exercice 1

1. Énoncer le théorème du cours sur l'équivalence des matrices de rang r.
2. On dit qu'une matrice A est nilpotente s'il existe un entier p tel que $A^p = 0$. Montrer que

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & (0) & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & (0) & & & 0 & 1 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

est nilpotente.

3. Donner et démontrer une CNS sur le rang d'une matrice pour qu'elle soit équivalente à une matrice nilpotente.

2.2 Exercice 2

Déterminer les triplets de réels (x, y, z) tels que

$$\frac{2x+y-2z}{3x+y-z} = \frac{x+y-3z}{2x+y-2z} = \frac{-2y+10z}{6x+y+z}$$

3 Préparation 40min - pas d'ordre précis

3.1 Exercice 1

Soit $\mathbb{K}$ un corps $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $P - X$ divise $P^i - X^i$. En déduire que $P - X$ divise $P \circ P - P$.

3.2 Exercice 2

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que $P \geqslant 0$ si et seulement si P est somme de deux carrés dans $\mathbb{R}[X]$.

3.3 Exercice 3

Soit P un polynôme à coefficients réels de degré $n \geqslant 2$ possédant n racines simples notées $a_1, \cdots, a_n$.

1. Démontrer que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{P'(a_k)} = 0$.
2. Calculer $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(X-a_k)^2}$ et $\sum_{1 \leqslant h < k \leqslant n} \frac{1}{(X-a_h)(X-a_k)}$ en fonction de P et ses dérivés.

3.4 Exercice 4

Trouver tous les polynômes réels vérifiant $P(1-X) = P$.