1 Passage direct – Normes sur $E = \mathbb{R}[X]$

1. Donner deux normes non équivalentes sur E.
2. Soit D l'endomorphisme de dérivation sur E. Donner un exemple de norme pour laquelle D n'est pas continu, et un pour laquelle D est continu (on pourra chercher cet exemple sous la forme $N(P) = \sum \alpha_k |a_k|$ où a_k désignent les coefficients de P et les α_k des réels > 0 bien choisis).
3. Soit M l'endomorphisme de E défini par $P \mapsto XP$. Existe-t-il sur E une norme qui rende à la fois D et M continus ?

2 Préparation 20min

Soit E un espace vectoriel normé (sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et u, v deux endomorphismes continus de E. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{K}$ tel que $u \circ v - v \circ u = aId_E$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u^n \circ v - v \circ u^n = anu^{n-1}$.
2. Montrer que u et v commutent.
3. En déduire que sur $\mathbb{R}[X]$ il n'existe pas de norme qui rende à la fois les endomorphismes de dérivation et de multiplication par X continus.
4. Donner une autre preuve (simple) de la question 2 sous l'hypothèse que E est de dimension finie.

3 Préparation 40min - à faire dans l'ordre que vous voulez

3.1 Exercice 1

On note $\ell^\infty(\mathbb{R})$ l'espace des suites réelles bornées muni de la norme du sup. Pour $u \in \ell^\infty(\mathbb{R})$ on note $T(u) = (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $\Delta(u) = (u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que T et Δ définissent des applications linéaires continues de $\ell^\infty(\mathbb{R})$ dans lui-même, et calculer leur norme.

3.2 Exercice 2 - Topologie et hyperplans

Montrer qu'une forme linéaire sur un espace vectoriel normé est continue si et seulement si son noyau est fermé.

Complément – montrer que dans le cas non continu, le noyau est en fait un sous-espace dense. On pourra montrer que si H est un s.e.v. de E, l'adhérence de H l'est aussi.