1 Passage direct

1.1 Exercice 1

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence

$$E = \mathrm{Im}\ f \oplus \mathrm{Ker}\ f \Leftrightarrow \mathrm{Im}\ f = \mathrm{Im}\ f^2$$

Ce résultat reste-t-il vrai en dimension infinie ?

1.2 Exercice 2

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie et F un $\mathbb{K}$-e.v.

1. Soient $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$, montrer les inégalités

$$|\mathrm{rg}\ f - \mathrm{rg}\ g| \leqslant \mathrm{rg}\ (f + g) \leqslant \mathrm{rg}\ f + \mathrm{rg}\ g$$

2. Soient deux endomorphismes $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $fg = 0$ et $f + g$ est inversible. Montrer que

$$\mathrm{rg}\ f + \mathrm{rg}\ g = \dim\ E$$

2 Préparation 20min

2.1 Exerice 1

1. Montrer que les fonctions $t \mapsto \sin t$ et $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ ne sont pas intégrables sur $[0, +\infty[$.
2. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ existe.

2.2 Exercice 2

Montrer l'existence et effectuer le calcul de

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

3 Préparation 40min

1. On considère une fonction continue $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \int_a^b t^p f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

Montrer que f est nulle.

2. On considère a un complexe de partie réelle < 0. Montrer que l'intégrale

$$I_n = \int_0^{+\infty} e^{at} t^n\,\mathrm{d}t$$

existe et la calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. En déduire une fonction continue $\varphi : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ non nulle telle que

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \int_0^{+\infty} t^p \varphi(t)\,\mathrm{d}t = 0$$