

Topologie différentielle et applications – cohomologie de De Rham

Laurent Dietrich

ENS Cachan antenne de Bretagne – IRMA de Strasbourg

4 septembre 2009

- 1 Introduction
- 2 Orientation – degré de Brouwer
 - Degré modulo 2
 - Orientation
 - Degré de Brouwer
- 3 Champs de vecteurs – théorème d'Hopf-Poincaré
- 4 Cohomologie de De Rham
 - Algèbre extérieure, formes différentielles
 - Pullback
 - Dérivée extérieure
 - Cohomologie de De Rham
 - Calcul des groupes de cohomologie de S^n

Introduction, contexte

Contexte

- Topologie différentielle : étude des variétés lisses.
- Cohomologie de De Rham : technique algébrique permettant d'obtenir des invariants.

Calcul différentiel sur les variétés lisses

- Une *variété lisse de dimension n de \mathbb{R}^m* est une sous-variété différentielle de classe C^∞ de dimension n de \mathbb{R}^m .

Calcul différentiel sur les variétés lisses

- Une *variété lisse de dimension n de \mathbb{R}^m* est une sous-variété différentielle de classe C^∞ de dimension n de \mathbb{R}^m .
- $f : A \subset \mathbb{R}^k \rightarrow B \subset \mathbb{R}^l$ est dite *lisse* si en tout $x \in A$ il existe F de classe C^∞ définie sur un ouvert U de \mathbb{R}^k et qui coïncide avec f sur $A \cap U$.

Calcul différentiel sur les variétés lisses

- Une *variété lisse de dimension n de \mathbb{R}^m* est une sous-variété différentielle de classe C^∞ de dimension n de \mathbb{R}^m .
- $f : A \subset \mathbb{R}^k \rightarrow B \subset \mathbb{R}^l$ est dite *lisse* si en tout $x \in A$ il existe F de classe C^∞ définie sur un ouvert U de \mathbb{R}^k et qui coïncide avec f sur $A \cap U$.
- Pour $f : M \subset \mathbb{R}^k \rightarrow N \subset \mathbb{R}^l$ entre des variétés avec $f(x) = y$ on définit $df_x : TM_x \rightarrow TN_y$ comme suit. Soit $F : W \rightarrow \mathbb{R}^l$ (W ouvert) qui coïncide avec f sur $W \cap M$, alors $df_x(v) = dF_x(v)$. (On prouve que le choix de F importe peu.)

Théorème de Sard

- Soit $f : M \rightarrow N$ avec $m \geq n$ ici. On dit que $x \in M$ est un *point régulier* de f si df_x est de rang maximal.

Théorème de Sard

- Soit $f : M \rightarrow N$ avec $m \geq n$ ici. On dit que $x \in M$ est un *point régulier* de f si df_x est de rang maximal.
- Un point $y \in N$ est dit *valeur régulière* de f si $f^{-1}(\{y\})$ ne contient que des points réguliers.

Théorème de Sard

- Soit $f : M \rightarrow N$ avec $m \geq n$ ici. On dit que $x \in M$ est un *point régulier* de f si df_x est de rang maximal.
- Un point $y \in N$ est dit *valeur régulière* de f si $f^{-1}(\{y\})$ ne contient que des points réguliers.
- Si $m = n$, M est compacte et y une valeur régulière, alors $f^{-1}(\{y\})$ est fini car compact et discret et $\#f^{-1}(\{y\})$ définit une fonction localement constante de y .

Théorème de Sard

- Soit $f : M \rightarrow N$ avec $m \geq n$ ici. On dit que $x \in M$ est un *point régulier* de f si df_x est de rang maximal.
- Un point $y \in N$ est dit *valeur régulière* de f si $f^{-1}(\{y\})$ ne contient que des points réguliers.
- Si $m = n$, M est compacte et y une valeur régulière, alors $f^{-1}(\{y\})$ est fini car compact et discret et $\#f^{-1}(\{y\})$ définit une fonction localement constante de y .

Théorème de Sard

Soit $f : M \rightarrow N$ lisse et $C = \{x \in U \mid \text{rang}(df_x) < n\}$. Alors $f(C)$ a une mesure de Lebesgue nulle dans \mathbb{R}^n . Il s'en suit que l'ensemble des valeurs régulières de f est un ouvert dense de N .

Théorème de Sard

- Soit $f : M \rightarrow N$ avec $m \geq n$ ici. On dit que $x \in M$ est un *point régulier* de f si df_x est de rang maximal.
- Un point $y \in N$ est dit *valeur régulière* de f si $f^{-1}(\{y\})$ ne contient que des points réguliers.
- Si $m = n$, M est compacte et y une valeur régulière, alors $f^{-1}(\{y\})$ est fini car compact et discret et $\#f^{-1}(\{y\})$ définit une fonction localement constante de y .

Théorème de Sard

Soit $f : M \rightarrow N$ lisse et $C = \{x \in U \mid \text{rang}(df_x) < n\}$. Alors $f(C)$ a une mesure de Lebesgue nulle dans \mathbb{R}^n . Il s'en suit que l'ensemble des valeurs régulières de f est un ouvert dense de N .

Application : théorème fondamental de l'algèbre.

Quelques lemmes utiles :

- Si $f : M \rightarrow N$ avec $m \geq n$ et $y \in N$ régulière, alors $f^{-1}(\{y\}) \subset M$ est une variété lisse de dimension $m - n$.

Quelques lemmes utiles :

- Si $f : M \rightarrow N$ avec $m \geq n$ et $y \in N$ régulière, alors $f^{-1}(\{y\}) \subset M$ est une variété lisse de dimension $m - n$.
- Soit M une variété lisse sans bord et $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ telle que 0 en soit une valeur régulière, alors $\{x \in M \mid g(x) \geq 0\}$ est une variété lisse à bord, de bord $g^{-1}(\{0\})$.

Quelques lemmes utiles :

- Si $f : M \rightarrow N$ avec $m \geq n$ et $y \in N$ régulière, alors $f^{-1}(\{y\}) \subset M$ est une variété lisse de dimension $m - n$.
- Soit M une variété lisse sans bord et $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ telle que 0 en soit une valeur régulière, alors $\{x \in M \mid g(x) \geq 0\}$ est une variété lisse à bord, de bord $g^{-1}(\{0\})$.
- Soit $f : M \rightarrow N$ lisse et $m > n$. Si $y \in N$ est une valeur régulière de f et de $f|_{\partial M}$, alors $f^{-1}(\{y\}) \subset M$ est une variété lisse à bord de dimension $m - n$, de bord $f^{-1}(\{y\}) \cap \partial M$.

Quelques lemmes utiles :

- Si $f : M \rightarrow N$ avec $m \geq n$ et $y \in N$ régulière, alors $f^{-1}(\{y\}) \subset M$ est une variété lisse de dimension $m - n$.
- Soit M une variété lisse sans bord et $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ telle que 0 en soit une valeur régulière, alors $\{x \in M \mid g(x) \geq 0\}$ est une variété lisse à bord, de bord $g^{-1}(\{0\})$.
- Soit $f : M \rightarrow N$ lisse et $m > n$. Si $y \in N$ est une valeur régulière de f et de $f|_{\partial M}$, alors $f^{-1}(\{y\}) \subset M$ est une variété lisse à bord de dimension $m - n$, de bord $f^{-1}(\{y\}) \cap \partial M$.

Application : théorème du point fixe de Brouwer.

Degré modulo 2

Si $f, g : M \rightarrow N$ sont des fonctions lisses homotopes (de façon lisse) et $m = n$, avec M compacte et sans bord, alors pour y une valeur régulière de f et g ,

$$\#f^{-1}(\{y\}) = \#g^{-1}(\{y\}) \pmod{2}$$

De plus si N est connexe et y et z sont deux valeurs régulières de f , alors

$$\#f^{-1}(\{y\}) = \#f^{-1}(\{z\})$$

Ce nombre s'appelle le *degré modulo deux* de f .

Degré modulo 2

Si $f, g : M \rightarrow N$ sont des fonctions lisses homotopes (de façon lisse) et $m = n$, avec M compacte et sans bord, alors pour y une valeur régulière de f et g ,

$$\#f^{-1}(\{y\}) = \#g^{-1}(\{y\}) \pmod{2}$$

De plus si N est connexe et y et z sont deux valeurs régulières de f , alors

$$\#f^{-1}(\{y\}) = \#f^{-1}(\{z\})$$

Ce nombre s'appelle le *degré modulo deux* de f .

Preuve :

1) Regarder $F^{-1}(\{y\})$ si y est aussi régulière pour l'homotopie, calculer son bord et voir qu'il a un nombre pair de points (dimension 1). Si non, Sard et constance locale du degré.

2) N variété lisse connexe, y, z intérieurs, alors il existe $h : N \rightarrow N$ homotope à l'identité avec $h(y) = z$.

- Variété lisse *orientée* = orientation de chaque espace tangent + cohérence (en tout point il existe un voisinage difféomorphe à \mathbb{R}^m ou H^m , le difféo. préservant l'orientation.)

- Variété lisse *orientée* = orientation de chaque espace tangent + cohérence (en tout point il existe un voisinage difféomorphe à \mathbb{R}^m ou H^m , le difféo. préservant l'orientation.)
- Une orientation pour M détermine une orientation pour ∂M : pour $x \in \partial M$ on choisit une base positive dont tous les vecteurs sauf le premier (donc $m \geq 2$) sont tangents au bord, et le premier est sortant. En ôtant le premier on a l'orientation positive de ∂M en x . Dans le cas de la dimension 1, on assigne à chaque point x du bord le symbole (resp.) ∓ 1 selon si un vecteur orienté positivement en x est (resp.) rentrant ou sortant.
Ainsi S^{n-1} s'oriente comme le bord de D^n .

Degré de Brouwer

Soient M compacte, N connexe avec $m = n$, $f : M \rightarrow N$ et $x \in M$ régulier (df_x isomorphisme). Alors

$$\deg(f, y) := \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{signe}(df_x)$$

À nouveau, le degré est une fonction localement constante de y définie sur un ouvert dense de N , ne dépend que de la classe d'homotopie de f et ne dépend pas de la valeur régulière choisie.

Preuve : comme avant, mais on a besoin d'un lemme en plus.

Remarque : $\deg(f) \bmod 2 = \ll d \bmod 2 \gg$

Degré de Brouwer

Soient M compacte, N connexe avec $m = n$, $f : M \rightarrow N$ et $x \in M$ régulier (df_x isomorphisme). Alors

$$\deg(f, y) := \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{signe}(df_x)$$

À nouveau, le degré est une fonction localement constante de y définie sur un ouvert dense de N , ne dépend que de la classe d'homotopie de f et ne dépend pas de la valeur régulière choisie.

Preuve : comme avant, mais on a besoin d'un lemme en plus.

Remarque : $\deg(f) \bmod 2 = \ll d \bmod 2 \gg$

Proposition

Le degré d'une composée et le produit des degrés.

Exemples : $z \mapsto z^k$ (k), constante (0), difféomorphisme (± 1),
 $-Id_{S^n} ((-1)^{n+1}) \dots$

Application : théorème de la boule chevelue.

Champs de vecteurs

- Un *champ de vecteur* sur X est une fonction lisse $v : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ avec $v(x) \in TM_x$

Champs de vecteurs

- Un *champ de vecteur* sur X est une fonction lisse $v : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ avec $v(x) \in TM_x$
- Soit $v : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ (U ouvert) avec un zéro isolé en z_0 . Alors $\frac{v}{\|v\|}$ envoie une sphère centrée en z_0 sur la sphère unité (les sphères étant orientées comme les bords des disques). Le degré de cette application s'appelle *l'indice* de v en z_0 .

Champs de vecteurs

- Un *champ de vecteur* sur X est une fonction lisse $v : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ avec $v(x) \in TM_x$
- Soit $v : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ (U ouvert) avec un zéro isolé en z_0 . Alors $\frac{v}{\|v\|}$ envoie une sphère centrée en z_0 sur la sphère unité (les sphères étant orientées comme les bords des disques). Le degré de cette application s'appelle *l'indice* de v en z_0 .
- Si le champ v sur U correspond à $v' = df \circ v \circ f^{-1}$ sur U' sous un difféomorphisme $f : U \rightarrow U'$ alors l'indice de v en un zéro isolé z et celui de v' en $f(z)$ sont égaux. De cette façon on peut définir l'indice d'un champ en un zéro sur une variété : il suffit de se ramener au champ correspond sur l'ouvert de paramétrisation via le difféomorphisme associé.

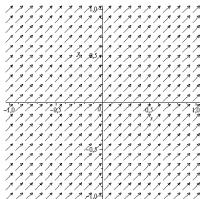


FIG.: Indice 0

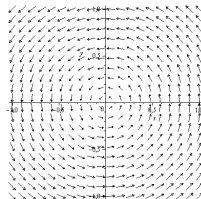


FIG.: Indice 1

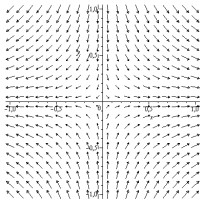


FIG.: Indice -1

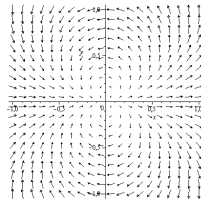


FIG.: Indice 2

Théorème d'Hopf-Poincaré – 1926

Soit M une variété compacte et v un champ de vecteurs dont les zéros sont isolés. (Si M est à bord, il faut que $v(x)$ soit sortant en tout $x \in \partial M$).

Alors la somme des indices des zéros de v est égale à la caractéristique d'Euler-Poincaré de M .

En particulier, cela ne dépend pas du champ de vecteurs choisi.

Application : théorème de la boule chevelue.
Action libre sur S^{2n}

- Soit V un \mathbb{R} -ev de dimension n . On note $\Lambda(V^*) = \Lambda^0(V^*) \oplus \dots \oplus \Lambda^k(V^*)$ la somme directe extérieure des p -tenseurs sur V . Le produit extérieur \wedge lui donne une structure d'algèbre non commutative graduée, de neutre $1 \in \Lambda^0(V^*) = 1$. On rappelle que $\dim \Lambda^p(V^*) = \binom{k}{p}$.

- Soit V un \mathbb{R} -ev de dimension n . On note $\Lambda(V^*) = \Lambda^0(V^*) \oplus \dots \oplus \Lambda^k(V^*)$ la somme directe extérieure des p -tenseurs sur V . Le produit extérieur \wedge lui donne une structure d'algèbre non commutative graduée, de neutre $1 \in \Lambda^0(V^*) = 1$. On rappelle que $\dim \Lambda^p(V^*) = \binom{k}{p}$.
- Soit X une variété lisse. Une p -forme sur X est une fonction w qui en tout $x \in X$ associe un p -tenseur $w(x) \in \Lambda^p(T_x(X))$. On hérite des lois sur les tenseurs :
 $(w_1 + w_2)(x) := w_1(x) + w_2(x)$
 $(w \wedge \theta)(x) := w(x) \wedge \theta(x)$, où l'on récupère l'anticommutativité
 $w \wedge \theta = (-1)^{pq} w \wedge \theta$

- Soit V un \mathbb{R} -ev de dimension n . On note $\Lambda(V^*) = \Lambda^0(V^*) \oplus \dots \oplus \Lambda^k(V^*)$ la somme directe extérieure des p -tenseurs sur V . Le produit extérieur \wedge lui donne une structure d'algèbre non commutative graduée, de neutre $1 \in \Lambda^0(V^*) = 1$. On rappelle que $\dim \Lambda^p(V^*) = \binom{k}{p}$.
- Soit X une variété lisse. Une p -forme sur X est une fonction w qui en tout $x \in X$ associe un p -tenseur $w(x) \in \Lambda^p(T_x(X))$. On hérite des lois sur les tenseurs :
 $(w_1 + w_2)(x) := w_1(x) + w_2(x)$
 $(w \wedge \theta)(x) := w(x) \wedge \theta(x)$, où l'on récupère l'anticommutativité
 $w \wedge \theta = (-1)^{pq} \theta \wedge w$
- Toute p -forme sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^k$ peut-être écrite de façon unique comme une somme

$$\sum_I f_I dx_I$$

où $dx_I = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$ et les x_i désignent les fonctions coordonnées de \mathbb{R}^k .

Pullback

Si $f : X \rightarrow Y$ est lisse entre deux variétés et w une p -forme sur Y , on peut définir une p -forme sur X :

$$f^* w(x) := (df_x)^* w(f(x))$$

où pour un p -tenseur T et une application linéaire A ,

$$A^* T(v_1, \dots, v_p) := T(A(v_1), \dots, A(v_p)).$$

Cela consiste tout simplement à « tirer » la forme en arrière.

Pullback

Si $f : X \rightarrow Y$ est lisse entre deux variétés et w une p -forme sur Y , on peut définir une p -forme sur X :

$$f^* w(x) := (df_x)^* w(f(x))$$

où pour un p -tenseur T et une application linéaire A ,

$$A^* T(v_1, \dots, v_p) := T(A(v_1), \dots, A(v_p)).$$

Cela consiste tout simplement à « tirer » la forme en arrière.

Quelques propriétés simples à montrer mais essentielles :

- Avec les 0-formes, le pullback n'est que la composition : $f^* w = w \circ f$
- $f^*(w_1 + w_2) = f^* w_1 + f^* w_2$
- $f^*(w \wedge \theta) = f^* w \wedge f^* \theta$
- $(f \circ h)^*(w) = h^* f^* w$

Pullback

Si $f : X \rightarrow Y$ est lisse entre deux variétés et w une p -forme sur Y , on peut définir une p -forme sur X :

$$f^* w(x) := (df_x)^* w(f(x))$$

où pour un p -tenseur T et une application linéaire A ,

$$A^* T(v_1, \dots, v_p) := T(A(v_1), \dots, A(v_p)).$$

Cela consiste tout simplement à « tirer » la forme en arrière.

Quelques propriétés simples à montrer mais essentielles :

- Avec les 0-formes, le pullback n'est que la composition : $f^* w = w \circ f$
- $f^*(w_1 + w_2) = f^* w_1 + f^* w_2$
- $f^*(w \wedge \theta) = f^* w \wedge f^* \theta$
- $(f \circ h)^*(w) = h^* f^* w$

Propriété fondamentale : si $\phi : Y \rightarrow Y$, alors $f^*(d\phi) = d(f^*\phi)$.

Dérivée extérieure

- Si $w = \sum a_I dx_I$ est une p -forme sur un ouvert euclidien, on définit la $p+1$ -forme *dérivée extérieure* de w $dw := \sum da_I \wedge dx_I$.

Dérivée extérieure

- Si $w = \sum a_I dx_I$ est une p -forme sur un ouvert euclidien, on définit la $p+1$ -forme *dérivée extérieure* de w $dw := \sum da_I \wedge dx_I$.
- Propriété fondamentale : soit $g : V \rightarrow U$ un difféomorphisme entre des ouverts de \mathbb{R}^k ou H^k alors pour toute forme w sur U ,
 $d(g^* w) = g^*(dw)$

Dérivée extérieure

- Si $w = \sum a_I dx_I$ est une p-forme sur un ouvert euclidien, on définit la p+1-forme *dérivée extérieure* de w $dw := \sum da_I \wedge dx_I$.
- Propriété fondamentale : soit $g : V \rightarrow U$ un difféomorphisme entre des ouverts de \mathbb{R}^k ou H^k alors pour toute forme w sur U ,
 $d(g^* w) = g^*(dw)$
- Cela permet de définir d sur les variétés lisses : on se ramène à l'espace euclidien par les difféomorphismes de paramétrisation :
 $dw := (\phi^{-1})^* d(\phi^* w)$

Dérivée extérieure

- Si $w = \sum a_I dx_I$ est une p -forme sur un ouvert euclidien, on définit la $p+1$ -forme *dérivée extérieure* de w $dw := \sum da_I \wedge dx_I$.
- Propriété fondamentale : soit $g : V \rightarrow U$ un difféomorphisme entre des ouverts de \mathbb{R}^k ou H^k alors pour toute forme w sur U ,
 $d(g^* w) = g^*(dw)$
- Cela permet de définir d sur les variétés lisses : on se ramène à l'espace euclidien par les difféomorphismes de paramétrisation :
 $dw := (\phi^{-1})^* d(\phi^* w)$
- On a les propriétés suivantes
 - $d(w_1 + w_2) = dw_1 + dw_2$
 - $d(w \wedge \theta) = (dw) \wedge \theta + (-1)^p w \wedge d\theta$ si w est une p -forme.
 - $d(dw) = 0$ (condition de cocycle)
 - si $g : Y \rightarrow X$ est lisse entre deux variétés à bord, alors pour toute forme w sur X , $d(g^* w) = g^*(dw)$.

Il est intéressant de calculer explicitement les dérivées extérieures dans \mathbb{R}^3 . En fait, on a les résultats suivants, qui font intervenir les opérateurs vectoriels classiques. Il peut être intéressant de relier la condition de cocycle aux relations entre ces opérateurs.

- si f est une fonction de \mathbb{R}^3 alors

$$df = g_1 dx_1 + g_2 dx_2 + g_3 dx_3$$

où $(g_1, g_2, g_3) = \text{grad}(f)$.

Il est intéressant de calculer explicitement les dérivées extérieures dans \mathbb{R}^3 . En fait, on a les résultats suivants, qui font intervenir les opérateurs vectoriels classiques. Il peut être intéressant de relier la condition de cocycle aux relations entre ces opérateurs.

- si f est une fonction de \mathbb{R}^3 alors

$$df = g_1 dx_1 + g_2 dx_2 + g_3 dx_3$$

$$\text{où } (g_1, g_2, g_3) = \text{grad}(f).$$

- si $w = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3$ est une 1-forme, alors

$$df = g_1 dx_2 \wedge dx_3 + g_2 dx_3 \wedge dx_1 + g_3 dx_1 \wedge dx_2$$

$$\text{où } (g_1, g_2, g_3) = \text{rot}(f).$$

Il est intéressant de calculer explicitement les dérivées extérieures dans \mathbb{R}^3 . En fait, on a les résultats suivants, qui font intervenir les opérateurs vectoriels classiques. Il peut être intéressant de relier la condition de cocycle aux relations entre ces opérateurs.

- si f est une fonction de \mathbb{R}^3 alors

$$df = g_1 dx_1 + g_2 dx_2 + g_3 dx_3$$

$$\text{où } (g_1, g_2, g_3) = \text{grad}(f).$$

- si $w = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3$ est une 1-forme, alors

$$df = g_1 dx_2 \wedge dx_3 + g_2 dx_3 \wedge dx_1 + g_3 dx_1 \wedge dx_2$$

$$\text{où } (g_1, g_2, g_3) = \text{rot}(f).$$

- si $w = f_1 dx_2 \wedge dx_3 + f_2 dx_3 \wedge dx_1 + f_3 dx_1 \wedge dx_2$ alors

$$dw = \text{div}(f) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

Il est intéressant de calculer explicitement les dérivées extérieures dans \mathbb{R}^3 . En fait, on a les résultats suivants, qui font intervenir les opérateurs vectoriels classiques. Il peut être intéressant de relier la condition de cocycle aux relations entre ces opérateurs.

- si f est une fonction de \mathbb{R}^3 alors

$$df = g_1 dx_1 + g_2 dx_2 + g_3 dx_3$$

$$\text{où } (g_1, g_2, g_3) = \text{grad}(f).$$

- si $w = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3$ est une 1-forme, alors

$$df = g_1 dx_2 \wedge dx_3 + g_2 dx_3 \wedge dx_1 + g_3 dx_1 \wedge dx_2$$

$$\text{où } (g_1, g_2, g_3) = \text{rot}(f).$$

- si $w = f_1 dx_2 \wedge dx_3 + f_2 dx_3 \wedge dx_1 + f_3 dx_1 \wedge dx_2$ alors

$$dw = \text{div}(f) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

- si w est une 3-forme, $dw = 0$.

Cohomologie de De Rham

- On dit qu'une p -forme différentielle w est *exacte* si $\exists \theta$ tq $w = d\theta$.
On dit qu'elle est *fermée* si $dw = 0$. Il est clair ($d^2 = 0$) que les formes exactes sont fermées. Cependant, la réciproque est fautive. C'est son inexactitude qu'on va mesurer.

Cohomologie de De Rham

- On dit qu'une p -forme différentielle w est *exacte* si $\exists \theta$ tq $w = d\theta$.
On dit qu'elle est *fermée* si $dw = 0$. Il est clair ($d^2 = 0$) que les formes exactes sont fermées. Cependant, la réciproque est fautive. C'est son inexactitude qu'on va mesurer.
- Le p -ième groupe de cohomologie de X $H^p(X)$ est le groupe quotient des p -formes fermées par les p -formes exactes.

Cohomologie de De Rham

- On dit qu’une p -forme différentielle w est *exacte* si $\exists \theta$ tq $w = d\theta$.
On dit qu’elle est *fermée* si $dw = 0$. Il est clair ($d^2 = 0$) que les formes exactes sont fermées. Cependant, la réciproque est fautive. C’est son inexactitude qu’on va mesurer.
- Le p -ième groupe de cohomologie de X $H^p(X)$ est le groupe quotient des p -formes fermées par les p -formes exactes.
- Propriété : soit $f : X \rightarrow Y$ lisse entre deux variétés alors f^* induit un morphisme $f^\# : H^p(Y) \rightarrow H^p(X)$.

Cohomologie de De Rham

- On dit qu'une p -forme différentielle w est *exacte* si $\exists \theta$ tq $w = d\theta$.
On dit qu'elle est *fermée* si $dw = 0$. Il est clair ($d^2 = 0$) que les formes exactes sont fermées. Cependant, la réciproque est fautive. C'est son inexactitude qu'on va mesurer.
- Le p -ième groupe de cohomologie de X $H^p(X)$ est le groupe quotient des p -formes fermées par les p -formes exactes.
- Propriété : soit $f : X \rightarrow Y$ lisse entre deux variétés alors f^* induit un morphisme $f^\# : H^p(Y) \rightarrow H^p(X)$.
- Vocabulaire : soit X une variété lisse de dimension n , on note $\Omega^p(X)$ l'ensemble des p -formes différentielles sur X . On dit qu'une suite

$$\Omega^0(X) \xrightarrow{d_0} \Omega^1(X) \xrightarrow{d_1} \dots \xrightarrow{d_{n-1}} \Omega^n(X) \xrightarrow{d^n} 0$$

est exacte si pour tout i , $im(d_i) = ker(d_{i+1})$. Cela revient bien à dire que les formes fermées sont exactes. On généralise cette notion d'exactitude à des morphismes quelconques.

Théorème de Mayer-Vietoris, 1930 puis 1952

Soit X une variété lisse, réunion de deux ouverts U et V : $X = U \cup V$.
On note : $A^n = \Omega^n(X)$, $B^n = \Omega^n(U) \oplus \Omega^n(V)$, $C^n = \Omega^n(U \cap V)$. Alors il existe des morphismes δ qui rendent la suite suivante exacte :

$$\dots \xrightarrow{\delta_{n-1}} H^n(X) \xrightarrow{\alpha_n} H^n(U) \oplus H^n(V) \xrightarrow{\beta_n} H^n(U \cap V) \xrightarrow{\delta_n} H^{n+1}(X) \xrightarrow{\alpha_{n+1}} \dots$$

où

- $\alpha(w) = (w|_U, w|_V) = (i^*w, j^*w)$ avec i, j les inclusions de U, V dans M
- $\beta(w, \theta) = w|_{U \cap V} - \theta|_{U \cap V} = k^*w - l^*w$ avec k, l les inclusions de $U \cap V$ dans (resp.) U et V .

Théorème de Mayer-Vietoris, 1930 puis 1952

Soit X une variété lisse, réunion de deux ouverts U et V : $X = U \cup V$.
On note : $A^n = \Omega^n(X)$, $B^n = \Omega^n(U) \oplus \Omega^n(V)$, $C^n = \Omega^n(U \cap V)$. Alors il existe des morphismes δ qui rendent la suite suivante exacte :

$$\dots \xrightarrow{\delta_{n-1}} H^n(X) \xrightarrow{\alpha_n} H^n(U) \oplus H^n(V) \xrightarrow{\beta_n} H^n(U \cap V) \xrightarrow{\delta_n} H^{n+1}(X) \xrightarrow{\alpha_{n+1}} \dots$$

où

- $\alpha(w) = (w|_U, w|_V) = (i^*w, j^*w)$ avec i, j les inclusions de U, V dans M
- $\beta(w, \theta) = w|_{U \cap V} - \theta|_{U \cap V} = k^*w - l^*w$ avec k, l les inclusions de $U \cap V$ dans (resp.) U et V .

Théorème fondamental

Les espaces de cohomologies sont des invariants topologiques, et même par homotopie. C'est-à-dire, si deux variétés sont homotopes (au sens de la topologie algébrique) alors elles ont même espaces de cohomologie.

Calcul des groupes de cohomologie de S^n

Lemmes :

- Si X est simplement connexe, $H^1(X) = \{0\}$. (X est homéotope à \mathbb{R}^n , qui est un ouvert étoilé)
- $H^0(X)$ est de dimension d le nombre de composantes connexes de X . (Il n'y a pas de 0-forme exacte et les 0 formes fermées sont manifestement les fonctions constantes.)
- Si X est de dimension 0 et compacte, $\dim(H^0(X))$ est égale au nombre de points de X . En effet, cela revient simplement à définir une fonction en chacun de ces points.

Calcul des groupes de cohomologie de S^n

Lemmes :

- Si X est simplement connexe, $H^1(X) = \{0\}$. (X est homéotopie à \mathbb{R}^n , qui est un ouvert étoilé)
- $H^0(X)$ est de dimension d le nombre de composantes connexes de X . (Il n'y a pas de 0-forme exacte et les 0 formes fermées sont manifestement les fonctions constantes.)
- Si X est de dimension 0 et compacte, $\dim(H^0(X))$ est égale au nombre de points de X . En effet, cela revient simplement à définir une fonction en chacun de ces points.

On écrit $S^n = (S^n \setminus N) \cup (S^n \setminus S)$. On a $U \cap V \sim \mathbb{R}^n$. M-V donne :

$$\dots \xrightarrow{\delta_{n-1}} H^p(S^n) \xrightarrow{\alpha_n} H^p(\mathbb{R}^n) \oplus H^p(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\beta_n} H^p(S^{n-1}) \xrightarrow{\delta_n} H^{p+1}(S^n) \xrightarrow{\alpha_{n+1}} \dots$$

Ce qui s’écrit pour $p > 0$,

$$\dots \xrightarrow{\delta_{n-1}} H^p(S^n) \xrightarrow{\alpha_n} \{0\} \xrightarrow{\beta_n} H^p(S^{n-1}) \xrightarrow{\delta_n} H^{p+1}(S^n) \xrightarrow{\alpha_{n+1}} \{0\} \rightarrow \dots$$

Ce qui s'écrit pour $p > 0$,

$$\dots \xrightarrow{\delta_{n-1}} H^p(S^n) \xrightarrow{\alpha_n} \{0\} \xrightarrow{\beta_n} H^p(S^{n-1}) \xrightarrow{\delta_n} H^{p+1}(S^n) \xrightarrow{\alpha_{n+1}} \{0\} \rightarrow \dots$$

L'exactitude du morceau $\{0\} \xrightarrow{\beta_n} H^p(S^{n-1}) \xrightarrow{\delta_n} H^{p+1}(S^n) \xrightarrow{\alpha_{n+1}} \{0\}$ donne clairement que $\text{Im} \delta_n = H^{p+1}(S^n)$ et $\text{Ker} \delta_n = \{0\}$, donc δ_n est un isomorphisme et on a

Pour $n > 1$ et $p > 0$, $H^p(S^{n-1}) \cong H^{p+1}(S^n)$.

Ce qui s'écrit pour $p > 0$,

$$\dots \xrightarrow{\delta_{n-1}} H^p(S^n) \xrightarrow{\alpha_n} \{0\} \xrightarrow{\beta_n} H^p(S^{n-1}) \xrightarrow{\delta_n} H^{p+1}(S^n) \xrightarrow{\alpha_{n+1}} \{0\} \rightarrow \dots$$

L'exactitude du morceau $\{0\} \xrightarrow{\beta_n} H^p(S^{n-1}) \xrightarrow{\delta_n} H^{p+1}(S^n) \xrightarrow{\alpha_{n+1}} \{0\}$ donne clairement que $\text{Im}\delta_n = H^{p+1}(S^n)$ et $\text{Ker}\delta_n = \{0\}$, donc δ_n est un isomorphisme et on a

Pour $n > 1$ et $p > 0$, $H^p(S^{n-1}) \cong H^{p+1}(S^n)$.

Entre S^0 et S^1 : $U \cap V$ est homotope à $\{-1\} \oplus \{+1\}$ qui est de dimension 0 et non connexe ! Grâce au lemme (S^1 est connexe, S^0 a deux composantes connexes, et $H^1(\mathbb{R}) = 0$) on a donc l'exactitude de :

$$H^0(S^1) = \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \rightarrow H^0(S^0) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \rightarrow H^1(S^1) \rightarrow \{0\}$$

Exactitudes et théorème du rang donnent $H^1(S^1) \cong \mathbb{R}$.

Groupes de cohomologie de la sphère

- Pour $n \geq 1$, $H^0(S^n) \cong H^n(S^n) \cong \mathbb{R}$
- Pour $0 < m < n$, $H^m(S^n) \cong \dots \cong H^1(S^{n-m+1}) \cong \{0\}$

Exemple de la puissance de cette théorie :

On montre qu'il n'existe pas de fonction lisse $f : D^n \rightarrow S^{n-1}$ qui se comporte comme l'identité sur S^{n-1}

Désormais, on va plus vite : en notant i l'inclusion de S^{n-1} dans D^n on a en regardant les pullback (ou les morphismes qu'ils induisent) $f \circ i = Id_{S^{n-1}}$. Donc $i^\# \circ f^\# = Id_{H^{n-1}(S^{n-1})}$ donc $f^\#$ est injectif, or $f^\# : H^{n-1}(S^{n-1}) \cong \mathbb{R} \rightarrow H^{n-1}(D^n) \cong \{0\}$, ce qui rend l'injectivité impossible.





Exemple de la puissance de cette théorie :

On montre qu'il n'existe pas de fonction lisse $f : D^n \rightarrow S^{n-1}$ qui se comporte comme l'identité sur S^{n-1}

Désormais, on va plus vite : en notant i l'inclusion de S^{n-1} dans D^n on a en regardant les pullback (ou les morphismes qu'ils induisent) $f \circ i = Id_{S^{n-1}}$. Donc $i^\# \circ f^\# = Id_{H^{n-1}(S^{n-1})}$ donc $f^\#$ est injectif, or $f^\# : H^{n-1}(S^{n-1}) \cong \mathbb{R} \rightarrow H^{n-1}(D^n) \cong \{0\}$, ce qui rend l'injectivité impossible.

Un tel résultat n'aurait pas pu être vu par la simple notion de groupe fondamental en topologie algébrique de base, en effet dans cette théorie, les deux groupes en question auraient été triviaux (les deux variétés sont simplement connexes). Voilà donc une belle démonstration de la puissance de la cohomologie : en une ligne, on montre un résultat qui a nécessité au début de l'exposé de passer sur toute la classification des 1-variétés à bord.

Références – remerciements

-  John MILNOR, *Topology from the differentiable viewpoint*, The University Press of Virginia, 1965.
-  Victor GUILLEMIN, Allan POLLACK, *Differential topology*, Prentice-Hall, 1974.
-  John M LEE, *An introduction to smooth manifolds*, Springer-Verlag, 2002.
-  Gábor TÓTH, *Glimpses of algebra and geometry*, Springer-Verlag, 2002.

Merci à Pierre Guillot, Gaël Collinet, et l'IRMA de Strasbourg.