Révisions d'algèbre linéaire
Module IAE, EII S8

Mériadec CHUBERRE

Table des matières

Introduction

Ce cours de révisions d'algèbre linéaire est divisé en deux parties, une consacrée à la **réduction** matricielle (ou réduction des endomorphismes) avec principalement les résultats standards sur la **diagonalisation** et la **trigonalisation**. La deuxième partie de ce cours sera elle consacrée à de l'analyse matricielle. Pour la première partie j'ai essentiellement utilisé [2], [1] et [3], la deuxième partie reprend le cours "Méthodes numériques du linéaire" donné par Mohamed CAMAR-EDDINE en 3ème année GM.

1 Réduction des endomorphismes

• Cadre : On se place ici sur $M_n(\mathbb{K})$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les définitions et théorèmes donnés ici seront énoncés dans un cadre matriciel, mais peuvent s'énoncer de la même manière dans un cadre plus théorique, dans le cas d'un espace vectoriel de dimension finie quelconque. Typiquement on pourra la plupart du temps remplacer "Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$" par "Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ avec E un espace vectoriel de dimension finie", mais comme ce qui va nous intéresser par la suite sera l'analyse matricielle nous allons nous restreindre à ce cadre.

La précision du terme "réduction" me parait ici importante. Lorsque l'on étudie des applications linéaires en dimension finie on utilise une grande partie du temps leur forme matricielle car cela fournit un outil agréable pour faire des calculs dessus. En revanche, lorsque l'on se donne une matrice quelconque, il est difficile de voir ses propriétés algébriques : noyau, image, valeurs propres etc... **Réduire** un endomorphisme signifie donc trouver une base dans laquelle la matrice qui lui sera associée aura une forme agréable pour les études que l'on souhaite mener dessus.

1.1 Vocabulaire et premières propriétés

Définition 1.1.1 (Valeurs propres et vecteurs propres)
Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On dit que λ est **valeur propre** de A s'il existe $X_\lambda \in \mathbb{K}^n$ **non nul** tel que :

$$AX_\lambda = \lambda X_\lambda.$$

On dit alors que X_λ est un **vecteur propre** de A associé à la valeur propre λ. On appelle **spectre** de A, souvent noté $Sp(A)$ l'ensemble des valeurs propres de A.

Exemple 1.1.1
La matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ admet 2 comme valeur propre, associée -par exemple- au vecteur propre $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Remarque 1.1.1. *On a de manière évidente :*

$$(\lambda \in \mathbb{K} \ \ \textit{valeur propre de } A) \iff (A - \lambda I_n \ \ \textit{non inversible})$$

Définition 1.1.2 (Espace propre)
Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de A. On appelle **espace propre** de A associé à la valeur propre λ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$:

$$\ker(A - \lambda I_n),$$

on le note généralement $E_\lambda(A)$ ou juste E_λ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur la matrice considérée.

Définition 1.1.3 (Multiplicité géométrique d'une valeur propre)
On appelle **multiplicité géométrique** d'une valeur propre la dimension de l'espace propre associé.

Remarque 1.1.2. *Le noyau d'une matrice n'est rien d'autre que l'espace propre associé à la valeur propre* 0 *pour cette matrice, dans le cas où celle-ci n'est pas inversible.*

Exemple 1.1.2

- $\ker\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - 2I_n\right) = \ker\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$
- $\ker\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} - 0 * I_n\right) = Vect\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

Proposition 1.1.1
Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ et λ_1, λ_2 deux valeurs propres **distinctes** de A. Alors E_{λ_1} et E_{λ_2} sont en somme directe.

Définition 1.1.4 (Polynôme caractéristique)
Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On appelle **polynôme caractéristique** de A l'élément de $\mathbb{K}[X]$ définit par :

$$\chi_A(X) := \det(A - X \cdot I_n)$$

Exemple 1.1.3
Soit $A := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Alors on a :

$$\begin{aligned} \chi_A(X) &= \det\left(\begin{pmatrix} 1-X & -1 \\ -1 & 1-X \end{pmatrix}\right) \\ &= X(X-2). \end{aligned}$$

Proposition 1.1.2
Le polynôme caractéristique est de degré n.

Théorème 1.1.1 (Racines du polynôme caractéristique)
Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Les racines du polynôme caractéristique de A sont **exactement** ses valeurs propres.

Corollaire 1.1.1
Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ alors une matrice de $M_n(\mathbb{C})$ a toujours au moins une valeur propre complexe. Si $K = \mathbb{R}$, une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ n'a pas nécessairement de valeur propre réelle, cela provient du fait qu'un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ a toujours au moins une racine.

Exemple 1.1.4
Soit $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. On a $\chi_A(X) = X^2 + 1$. Cette matrice n'a donc pas de valeurs propres réelles mais admet i et $-i$ comme valeurs propres complexes.

Remarque 1.1.3. *Si $z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$ est valeur propre d'une matrices à coefficients **réels** alors $\bar{z}$ est aussi valeur propre de cette matrice.*

Théorème 1.1.2 (Cayley-Hamilton)
Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Alors $\chi_A(A) = 0$.

Exemple 1.1.5
Soit $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a $\chi_A(X) = (X-1)^2$. Donc $\chi_A(A) = (A - I_2)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = 0$.

1.2 Diagonalisation

1.2.1 Théorèmes généraux

Définition 1.2.1 (Matrice diagonalisable)
On dit qu'une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ est **diagonalisable** dans $\mathbb{K}$ s'il existe une matrice $D \in M_n(K)$ diagonale et $P \in Gl_n(\mathbb{K})$ tel que :

$$A = PDP^{-1}.$$

On a de plus que les coefficients diagonaux de D sont alors les valeurs propres de A comptées avec multiplicité; si A est diagonalisable et admet par exemple 1 comme valeur propre de multiplicité 3 il y aura "trois 1" sur la diagonale de D.

L'assertion suivantes est écrite sous la forme "Définition/Proposition" car on peut aussi la prendre comme définition de "être diagonalisable."

Définition-proposition 1.2.1 (Équivalente)
Une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable dans $\mathbb{K}$ s'il existe une base de $\mathbb{K}^n$ constituée de vecteurs propres de A.

Proposition 1.2.1 (Caractérisation de la diagonalisation)
Une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable dans $\mathbb{K}$ si $\mathbb{K}^n$ est égal à la somme directe des espaces propres de A, i.e. si :

$$\mathbb{K}^n = \bigoplus_{\lambda \in Sp(A)} E_\lambda(A)$$

Exemple 1.2.1
- Une matrice diagonale est trivialement diagonalisable.
- Soit $A := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. On a par l'exemple 1.1.3 que 0 et 2 sont valeurs propres de A. En résolvant les systèmes linéaires 2×2 $AX = 2X$ et $AX = 0$ on trouve $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ comme vecteurs propres respectivement associés à 0 et 2. Ces deux vecteurs sont non colinéaires dans $\mathbb{R}^2$ et en forment donc une base, donc A est diagonalisable.

Théorème 1.2.1 (Caractérisation de la diagonalisation)
Une matrice est diagonalisable dans $\mathbb{K}$ si et seulement si elle admet un polynôme annulateur scindé à racines simples dans $\mathbb{K}$, i.e. si et seulement s'il existe un polynôme de la forme $P(X) = \prod_{i=0}^{p}(X - \lambda_i)$ tel que $P(A) = 0_n$.

Exemple 1.2.2
Soit $A := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. On a vu que son polynôme caractéristique est $X(X-2)$. Le théorème 1.1.2

nous donne qu'il annule A donc A est diagonalisable.

Proposition 1.2.2
Une matrice de $M_n(\mathbb{K})$ avec n valeurs propres distinctes est diagonalisable dans $\mathbb{K}$.

Remarque 1.2.1. ***ATTENTION***
La réciproque de la proposition 1.2.2 *est fausse, comme on peut le voir sur l'exemple suivant.*

Exemple 1.2.3
Soit $A := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On a vu que A n'avait pas de valeur propre réelle donc ne risque d'être diagonalisable dans $\mathbb{R}$, en revanche elle admet deux valeurs propres complexes distinctes (i et $-i$) donc est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

Proposition 1.2.3
Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ un matrice triangulaire. Ses coefficients diagonaux sont exactement ses valeurs propres.

Exemple 1.2.4
Soit $A := \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Alors A n'est pas diagonalisable (exercice!!).

1.2.2 Cas des matrices symétriques

Théorème 1.2.2
Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ symétrique. Alors M est diagonalisable dans une base orthonormée, i.e; il existe $P \in O_n(\mathbb{R})({}^tPP = I_n)$ et une matrice diagonale D tel que $M = PDP^{-1}$.

Remarque 1.2.2 (IMPORTANT)**.** *Le fait que la matrice doit être à coefficients réels est impératif, cela ne marche pas pour* $\mathbb{C}$.

1.3 Trigonalisation

Définition 1.3.1 (Matrice trigonalisable)
Une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ est dite **trigonalisable** dans $\mathbb{K}$ s'il existe une matrice $T \in M_n(K)$ triangulaire supérieure et $P \in Gl_n(\mathbb{K})$ tel que :

$$A = PTP^{-1}.$$

Théorème 1.3.1
une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable dans $\mathbb{K}$ si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé (i.e. qui s'écrit $\chi_A = (-1)^n \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{a_i}$).

Remarque 1.3.1. *Une matrice est toujours trigonalisable dans* $\mathbb{C}$.

1.4 Diagonalisation en pratique

Nous allons voir ici comment, à l'aide de la méthode du pivot de Gauss diagonaliser en pratique une matrice. On se fixe $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice de taille n. Voici la liste des différentes étapes :

1) Calculer le polynôme caractéristique $\chi_A(X) := \det(A - X \cdot I_n)$ à l'aide d'une réduction de Gauss. Échelonner le système pour avoir un déterminant diagonal et déterminer ainsi ses racines (qui sont on le rappelle les valeurs propres de A).
2) Une fois les valeurs propres de A déterminées, résoudre le système $AX = \lambda X$ pour chaque valeur propre de A.
3) Le point 2) nous permet de déterminer la dimension des espaces propres de A. En effet, l'ensemble des solutions d'un système $AX = \lambda X$ pour une certaine valeur propre λ de A est exactement $E_\lambda(A)$. Si la somme des dimensions des espaces propres est égale à n, alors A est diagonalisable (cf définition 1.2.3). on peut alors passer au point suivant.
4) La concaténation des vecteurs indépendants trouvés lors du point 2) nous donne la matrice P^{-1} qui va diagonaliser A (on note P_i la i-ème colonne de P). On construit alors D en plaçant les valeurs propres sur la diagonale de manière à ce que λ_i ait P_i comme vecteur propre.

Exemple concret : Soit $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1/2 & 3/2 & -1/2 \\ 3/2 & -3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

<u>1) Calcul du polynôme caractéristique :</u>

$$\begin{aligned}
\chi_A(X) &= |A - XI_3| \\
&= \begin{vmatrix} -X & 1 & 1 \\ -1/2 & 3/2-X & -1/2 \\ 3/2 & -3/2 & 1/2-X \end{vmatrix} \\
C_1 \leftarrow C_1 + C_2 &= \begin{vmatrix} 1-X & 1 & 1 \\ 1-X & 3/2-X & -1/2 \\ 0 & -3/2 & 1/2-X \end{vmatrix} \\
&= (1-X)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3/2-X & -1/2 \\ 0 & -3/2 & 1/2-X \end{vmatrix} \\
L_2 \leftarrow L_2 + L_1 &= (1-X)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1/2-X & -3/2 \\ 0 & -3/2 & 1/2-X \end{vmatrix} \\
&= (1-X)\begin{vmatrix} 1/2-X & -3/2 \\ -3/2 & 1/2-X \end{vmatrix} \\
&= (X-1)(X+1)(X-2).
\end{aligned}$$

Nous avons donc ici que $\mathrm{sp}(A) = \{-1; 1; 2\}$. Dans le cas présent on peut donc affirmer que A est diagonalisable car elle admet 3 valeurs propres distinctes. Néanmoins on ne sera pas capable d'effectuer ce raisonnement dans tous les cas. En effet si on trouve que A a moins de trois valeurs propres (en dimension 3), alors il faut attendre de connaître la dimension des espaces propres (étape suivante) pour savoir si elle l'est ou non.

<u>2) Résolution du système $AX = \lambda X$ pour chaque valeur propre de A. :</u>

<u>•Cas $\lambda = 1$:</u>

On a :

$$
\begin{aligned}
AX = X &\iff (A - I_3)X = 0) \\
&\iff \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 3/2 & -3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} -x + y + z & = & 0 \\ -x/2 + y/2 - z/2 & = & 0 \\ 3x/2 - 3y/2 - z/2 & = & 0 \end{array} \right. \\
L_2 \leftarrow L_2 - L_1/2 &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} -x + y + z & = & 0 \\ -z & = & 0 \\ 3x/2 - 3y/2 - z/2 & = & 0 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} -x + y & = & 0 \\ 3x/2 - 3y/2 & = & 0 \\ -z & = & 0 \end{array} \right. \\
L_2 \leftarrow L_2 + (3/2)L_1/2 &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} -x + y & = & 0 \\ 0 & = & 0 \\ -z & = & 0 \end{array} \right. \\
&\iff X \in \mathrm{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

•Cas $\lambda = -1$:
On a en suivant la même méthode que pour le cas $\lambda = 1$:

$$
AX = -X \iff (A + I_3)X = 0 \iff X \in \mathrm{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}
$$

•Cas $\lambda = 2$:
On a en suivant la même méthode que pour les deux autres cas :

$$
AX = 2X \iff (A - 2I_3)X = 0 \iff X \in \mathrm{Vect} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}
$$

On remarque ici que la somme des dimension de chaque espace-solution (qui n'est rien d'autre que l'espace propre associé à la valeur propre correspondante)
3) Construction de la matrice de passage et de la matrice diagonale

Nous avons donc la famille de vecteurs propres de A $(v_1, v_{-1}, v_2) := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ qui forme une base de $\mathbb{R}^3$. On pose alors $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et on a $A = PDP^{-1}$.

2 Analyse matricielle

2.1 Normes sur $\mathbb{K}^n$

On prendra ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 2.1.1 (Norme)
Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel. Une application

$$||\cdot||: \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & [0;+\infty[\\ x & \longmapsto & ||x|| \end{array}$$

définit une **norme** sur E si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

1) $||x|| = 0 \iff x = 0$
2) $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}$ on a : $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$
3) $\forall x, y \in E,\ |||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$.

Définition-proposition 2.1.1 (Exemples fondamentaux de normes sur $\mathbb{K}^n$)
Soit p un réel supérieur ou égal à 1. L'application

$$||\cdot||_p: \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & [0;+\infty[\\ x & \longmapsto & \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \end{array}$$

définit une norme sur $\mathbb{K}^n$.

Dans le cas $p = \infty$ on définit :

$$||\cdot||_\infty: \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & [0;+\infty[\\ x & \longmapsto & \max\limits_{i=1..n} |x_i| \end{array}.$$

Lemme 2.1.1 (Inégalité de Hölder)
Soit $1 < p < +\infty$ et $1 < q < \infty$ avec $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Alors pour tout $(x, y) \in \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n$ on a :

$$|\langle x, y\rangle| \leq ||x||_p ||y||_q,$$

où $\langle\cdot,\cdot\rangle$ désigne le produit scalaire canonique.

Remarque 2.1.1. *Si $p < 1$, alors $||\cdot||_p$ ne définit pas une norme sur $\mathbb{K}^n$. Regarder sur $\mathbb{R}^2$ avec $p = 1/2$ (exercice!!!!).*

Définition 2.1.2 (Équivalence des normes)
Soient N_1 et N_2 deux normes sur E. On dit que N_1 et N_2 sont équivalentes s'il existe $a, b > 0$ tel que :

$$aN_2 \leq N_1 \leq bN_2, \text{ sur } \mathbb{K}^n.$$

Proposition 2.1.1
Sur un espace vectoriel de dimension finie toutes les normes sont équivalentes.

Proposition 2.1.2
Soit $x \in \mathbb{K}^n$, on a alors :

$$1 \leq q < p < +\infty \Rightarrow ||x||_p \leq ||x||_q \leq n^{(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})} ||x||_p,$$

$$1 \leq p < +\infty \Rightarrow ||x||_p \leq n^{\frac{1}{p}} ||x||_\infty.$$

2.2 Normes matricielles

Définition 2.2.1 (Norme Matricielle)
Une norme matricielle est une norme définie sur l'espace vectoriel $M_n(\mathbb{K})$.
On dit qu'une norme matricielle est **sous-multiplicative** si pour tout $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ on a :

$$|||AB||| \leq |||A||| \cdot |||B|||.$$

On dit qu'une norme matricielle $|||\cdot|||$ est **compatible** ou **consistante** avec une certaine norme $||\cdot||$ sur $\mathbb{K}^n$ si pour tout $A \in M_n(\mathbb{K})$ et pour tout $x \in \mathbb{K}^n$ on a :

$$||Ax|| \leq |||A||| \cdot ||x||.$$

Remarque 2.2.1. *Il existe des normes matricielles qui ne sont pas sous-multiplicatives, par exemple la norme infinie sur $M_2(\mathbb{R})$ (i.e l'application qui à une matrice associe le max de la valeur absolue de ses coefficients). Exercice 1 : Montrer que c'est une norme. Exercice 2 : Trouver deux matrices pour lesquelles l'inégalité de sous-multiplicativité n'est pas vérifiée.*

Définition-proposition 2.2.1 (Norme subordonnée)
Soit N une norme sur $\mathbb{K}^n$. On définit sur $M_n(\mathbb{K})$ l'application

$$||A||_N = \sup_{x\in\mathbb{K}^n, x\neq 0} \frac{N(Ax)}{N(x)} = \max_{x\in\mathbb{K}^n, x\neq 0} \frac{N(Ax)}{N(x)} = \max_{x\in\mathbb{K}^n, N(x)=1} N(Ax).$$

$||\cdot||_N$ définit alors une norme matricielle sous-multiplicative sur $M_n(\mathbb{K})$ appelée norme **subordonnée** à la norme N.

Remarque 2.2.2. *L'image de la matrice identité par une norme subordonnée est toujours égale à* 1.

Notation 2.2.1
• Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$, on appelle **rayon spectrale** de A, noté $\rho(A)$, la quantité :

$$\rho(A) := \max_{\lambda\in sp(A)} (|\lambda|).$$

• Pour $1 \leq p \leq \infty$ on notera de la même manière $||\cdot||_p$ la norme matricielle sur $M_n(\mathbb{K})$ subordonnée à la norme $||\cdot||_p$ sur $\mathbb{K}^n$.
• Pour $A \in M_n(\mathbb{C})$, on note A^* la matrice adjointe de A.

Proposition 2.2.1 (Caractérisation de certaines normes matricielles $||\cdot||_p$)
Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. On a :

1) $||A||_\infty = \max\limits_{1\leq i\leq n} \sum\limits_{1\leq j\leq n} |a_{i,j}|$,
2) $||A||_1 = \max\limits_{1\leq j\leq n} \sum\limits_{1\leq i\leq n} |a_{i,j}| = ||A^*||_\infty$,
3) $||A||_2 = \sqrt{\rho(AA^*)} = \sqrt{\rho(A^*A)} = ||A^*||_2$.

Ainsi, si A est inversible, alors $||A^{-1}||_2 = \frac{1}{\sqrt{\alpha_{\min}}}$ où $\alpha_{\min}$ désigne la plus petite valeur propre de AA^*.

Proposition 2.2.2
Soit $U \in M_n(\mathbb{C})$ unitaire ($UU^* = UU^* = I_n$). Alors pour tout $A \in M_n(\mathbb{C})$ on a :

1 $||A||_2 = ||UA||_2 = ||AU||_2 = ||UAU^*||_2$.
2 Si A est normale ($AA^* = A^*A$) alors $||A||_2 = \rho(A)$.

3 $||A||_2^2 = ||AA^*||_2$

Définition-proposition 2.2.2 (Norme de Frobenius)
On définit sur $M_n(\mathbb{C})$ la **norme de Frobenius** par :

$$||A||_F = \sqrt{Tr(AA^*)} = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Proposition 2.2.3
$||\cdot||_F$ est sous-multiplicative mais n'est subordonnée à aucune norme (Exercice!).

2.3 Suites de matrices

On se donne $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \in M_n(\mathbb{C})$.

Définition 2.3.1 (Convergence d'une suite de matrices)
On dit que la suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle si pour une norme $||\cdot||$ donnée sur $M_n(\mathbb{C})$ la suite de réels $(||A_k||_{k\in\mathbb{N}})$ converge vers 0.

Remarque 2.3.1. *La convergence de la suite ne dépend pas du choix de la norme matricielle dans la mesure où toutes les normes sont équivalentes car $M_n(\mathbb{C})$ est de dimension finie. Si une suite converge pour une norme alors elle converge pour n'importe quelle autre (Exercice!).*

Théorème 2.3.1
Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Alors la suite de ses puissances $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle si et seulement si :

$$\rho(A) < 1.$$

2.4 Conditionnement et perturbation de systèmes linéaires

Définition 2.4.1 (Conditionnement par rapport à une norme)
Soit $||\cdot||$ une norme sur $\mathbb{C}^n$, on note de la même manière $||\cdot||$ sa norme subordonnée sur $M_n(\mathbb{C})$. Soit $A \in Gl_n(\mathbb{C})$. On appelle **nombre de conditionnement** de A **par rapport à la norme** $||\cdot||$ le réel

$$\mathrm{Cond}_{||\cdot||}(A) := ||A|| \cdot ||A^{-1}||.$$

Proposition 2.4.1
1) On a toujours $\mathrm{Cond}_{||\cdot||}(A) \geq 1$ et $\mathrm{Cond}_{||\cdot||}(A) = \mathrm{Cond}_{||\cdot||}(A^{-1})$.

2) On a $\mathrm{Cond}_{||\cdot||_2}(A) = \dfrac{\sigma_{\max}(A)}{\sigma_{\min}(A)}$, avec $\sigma_{\min}$ (resp. σ_{max}) représentant la racine carré de la plus petite (resp. plus grande) valeur propre de A^*A.
3) Si A est normale, on a plus précisément : $\mathrm{Cond}_{||\cdot||_2}(A) = \dfrac{\rho(A)}{|\lambda|_{\min}(A)}$, avec $|\lambda|_{\min}(A)$ la plus petite valeur propre de A en module.

Proposition 2.4.2 (Sensibilité d'un système linéaire à la perturbation de son second membre)
Soit $A \in Gl_n(\mathbb{C})$, $b \in \mathbb{C}^n$, $x \in \mathbb{C}^n$ tel que $Ax = b$ et $\delta x, \delta b \in \mathbb{C}^n$ tel que $A(x+\delta x) = b + \delta b$. Alors :

$$\frac{||\delta x||}{||x||} \leq \mathrm{Cond}_{||\cdot||}(A)\frac{||\delta b||}{||b||}.$$

Proposition 2.4.3 (Sensibilité d'un système linéaire à la perturbation de matrice)
Soit $A, \delta A \in Gl_n(\mathbb{C})$, $b \in \mathbb{C}^n$, $x \in \mathbb{C}^n$ tel que $Ax = b$ et $\delta x \in \mathbb{C}^n$ tel que $(A+\delta A)(x+\delta x) = b$. Alors :

$$\frac{||\delta x||}{||x+\delta x||} \leq \mathrm{Cond}_{||\cdot||}(A)\frac{||\delta A||}{||A||}.$$

On remarque alors qu'un système sera sensible à une perturbation de son second membre ou de sa matrice si celle-ci est "mal conditionnée," c'est à dire que son conditionnement est très grand devant 1. À ce moment là on a un contrôle grossier de la perturbation de la solution qui peut tout à fait exploser.

Exemple 2.4.1
On pose $A = \begin{pmatrix} 0.835 & 0.667 \\ 0.333 & 0.266 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 0.168 \\ 0.067 \end{pmatrix}$. L'unique vecteur solution de $AX = b$ est $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Maintenant si l'on regarde $AX = b+\delta b$ avec $\delta b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.001 \end{pmatrix}$, la solution X_δ de ce système est $\begin{pmatrix} -666 \\ 834 \end{pmatrix}$, qui est très éloigné de la solution initiale.

A Annexe

A.1 Complément sur les normes matricielles

Proposition A.1.1
Soit $||\cdot||$ une norme sous-multiplicative sur $M_n(\mathbb{C})$. Alors pour tout $A \in M_n(\mathbb{C})$ on a :

$$\rho(A) \leq ||A||.$$

De plus pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une norme matricielle subordonnée à une norme vectorielle $||\cdot||_\varepsilon$ tel que :

$$||A||_\varepsilon \leq \rho(A) + \varepsilon.$$

Proposition A.1.2
Soit $||\cdot||$ une norme sous-multiplicative sur $M_n(\mathbb{C})$ et $A \in M_n(\mathbb{C})$. Alors :

$$||A|| < 1 \Rightarrow (I_n + A) \in Gl_n(\mathbb{C}).$$

Si de plus $||\cdot||$ est subordonnée à une norme sur $M_n(\mathbb{C})$ alors

$$||A|| < 1 \Rightarrow \left(||(I_n + A)^{-1}|| \leq (1 - ||A||)^{-1}\right).$$

Théorème A.1.1
Soit $||\cdot||$ une norme sous-multiplicative sur $M_n(\mathbb{C})$ et $A \in M_n(\mathbb{C})$. Alors :

$$\rho(A) = \lim_{n\to+\infty} ||A^n||^{\frac{1}{n}}.$$

Références

[1] GRIFONE JOSEPH. Algèbre linéaire 5è édition, 5ème ed. Cépaduès, 2015.

[2] MANSUY ROGER, AND MNEIMÉ RACHED. Algèbre linéaire : réduction des endomorphismes. Vuibert, Paris, 2012.

[3] YCART BERNARD. Pratique de la diagonalisation.