TD "Outils d'analyse pour l'ingénieur"

Mériadec CHUBERRE

14 octobre 2019

1 Exercice 4

1.1 Question 1) (complément)

On rappelle les quantités :

$$F : t \in \mathbb{R} \to \int_0^{+\infty} \phi(t,x)dx$$

$$\phi : (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \frac{e^{-t^2(1+x^2)}}{1+x^2}$$

On regarde l'hypothèse de domination pour le caractère $\mathscr{C}^1$ de F sur $\mathbb{R}_+^*$. On cherche $g \in L^1(\mathbb{R}^+)$ tel que que pour tout couple $(t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^+$ on ait :

$$\left|\frac{\partial \phi}{\partial t}(t,x)\right| = \left|-2te^{-t^2(1+x^2)}\right| \le |g(x)|.$$

Le "$-t^2$" dans l'exponentielle fait que l'on ne va pas pouvoir trouver une majoration indépendante de t sur tout $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^+$. Pour montrer que F est dérivable de dérivée continue en tout point de $\mathbb{R}_+^*$ on va procéder de la manière suivante :

1) On choisit un point $t_0 \in \mathbb{R}_+^*$ arbitraire.
2) On applique le théorème de classe $\mathscr{C}^1$ sous l'intégrale non pas sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^+$ mais sur $I_0 \times \mathbb{R}^+$, où I_0 est un intervalle **borné** centré en t_0.
3) On a donc par 2) que F est dérivable de dérivée continue au point t_0. On conclut en disant que tout point de $\mathbb{R}_+^*$ peut se "mettre" dans un intervalle de la forme I_0 (forme que nous allons expliciter juste après) et qu'ainsi F est dérivable de dérivée continue en tout point de $\mathbb{R}_+^*$, donc $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Soit donc $t_0 \in \mathbb{R}_+^*$. Une étude classique de fonction (calcul de la dérivée, signe puis tableau de variation) donne que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a :

$$|-2te^{-t^2}| \le 1.$$

Ainsi pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^+$ on a :

$$\left|-2te^{-t^2(1+x^2)}\right| \le \left|-2te^{-t^2}e^{-t^2x^2}\right| \le e^{-t^2x^2}.$$

Ainsi pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^+$ on a :

$$\left|\frac{\partial \phi}{\partial t}(t,x)\right| \le e^{-t^2x^2}. \tag{1}$$

Il nous faut donc dominer $e^{-t^2x^2}$ pour avoir le résultat. Comme on a $t_0 > 0$, on a $\eta > 0$ tel que $I_0 :=]t_0 - \eta; t_0 + \eta[\subset \mathbb{R}_+^*$. Ainsi pour tout $(t,x) \in I_0 \times \mathbb{R}_+$ on a :

$$\begin{aligned}
& t \geq t_0 - \eta \\
\iff & -t^2 \leq -(t_0-\eta)^2 \text{ car la fonction carré est croissante sur } \mathbb{R}_+^* \\
\iff & -t^2x^2 \leq -(t_0-\eta)^2x^2 \\
\iff & e^{-t^2x^2} \leq e^{-(t_0-\eta)^2x^2}
\end{aligned}$$

On a donc d'après (1) pour tout $(t,x) \in I_0 \times \mathbb{R}_+$:

$$\left|\frac{\partial \phi}{\partial t}(t,x)\right| \leq e^{-(t_0-\eta)^2x^2}$$

Comme la fonction $x :\to e^{-(t_0-\eta)^2x^2}$ est dans $L^1(\mathbb{R}_+)$ l'hypothèse de domination est vérifiée.

• Récapitulatif :

1) On a pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ (donc en particulier pour tout $t \in I_0$) :

$$x \to \phi(x,t)$$

intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

2) Pour presque tout $x \in \mathbb{R}_+$, $t \to \phi(x,t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (donc en particulier sur I_0) de dérivée continue :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(t,x) = -2te^{-t^2(1+x^2)}$$

3) Pour tout $(t,x) \in I_0 \times \mathbb{R}_+$ on a :

$$\left|\frac{\partial \phi}{\partial t}(t,x)\right| \leq |g(x)|,$$

avec $g : x \to e^{-(t_0-\eta)^2x^2}$ qui est dans $L^1(\mathbb{R}_+)$.

Donc F est dérivable sur I_0 et donc en particulier en t_0. Or, t_0 a été choisi quelconque dans $\mathbb{R}_+^*$ et tout élément t de $\mathbb{R}_+^*$ admet un intervalle de la forme $]t-\eta; t+\eta[$ inclus dans $\mathbb{R}_+^*$. Donc en appliquant le raisonnement précédent en tout point de $\mathbb{R}_+^*$ on obtient que F est dérivable de dérivée continue en tout point de $\mathbb{R}_+^*$ et y est donc de classe $\mathscr{C}^1$.
Le théorème de classe $\mathscr{C}^1$ nous donne donc, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned}
F'(t) &= \int_0^{+\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t,x)dx \\
&= -2t\int_0^{+\infty} e^{-t^2(1+x^2)}dx \\
&= -2te^{-t^2}\int_0^{+\infty} e^{-t^2x^2}dx.
\end{aligned}$$

En faisant le changement de variable $u = tx$, i.e $du = tdx$ on a :

$$\begin{aligned}
F'(t) &= -2e^{-t^2}\int_0^{+\infty} e^{-u2}du \\
&= -2Ie^{-t^2}
\end{aligned}$$

1.2 question 2)

Soit $T > 0$ et $0 < t < T$. En intégrant la relation précédente entre et t et T (on a le droit car 1) nous donne que F' est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et donc on a le droit de l'intégrer sur tout segment) on obtient :

$$\int_t^T F'(x)dx = \int_t^T (-2Ie^{-x^2})dx \iff F(T) - F(t) = -2I\int_t^T e^{-x^2}dx. \tag{2}$$

1.3 question 3)

Le fait de déterminer $F(t)$ pour tout t nous engage à d'abord regarder la limite de F en l'infini pour se "débarrasser" du terme $F(T)$. Soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui tend vers $+\infty$. On pose pour tout entier n :

$$f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{e^{-t_n^2(1+x^2)}}{1+x^2} \end{array}.$$

Nous allons appliquer le théorème de convergence dominée afin d'avoir la limite de F en l'infini.

1) Pour presque tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
2) Pour presque tout $x \in \mathbb{R}^+$ et pour tout entier n on a -déjà vu en question 1- :

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{1+x^2},$$

avec $x :\to \frac{1}{1+x^2}$ qui est L^1 sur $\mathbb{R}^+$.

On a donc par théorème de convergence dominée :

$$\begin{aligned} \lim_{T\to+\infty} F(T) &= \lim_{n\to+\infty} F(t_n) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}_+} f_n \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} \lim_{n\to+\infty} f_n \\ &= 0. \end{aligned}$$

En laissant tendre T vers $+\infty$ dans (2) on obtient :

$$F(t) = 2I \int_t^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

F étant continue en zéro, en évaluer l'égalité ci-dessus en $t = 0$ on a :

$$F(0) = 2I \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2I^2.$$

En utilisant l'expression de F :

$$\begin{aligned} F(0) &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} \\ &= [\arctan(x)]_0^{+\infty} \\ &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

2 Complément Exercice 6

2.1 Fonction numéro 10

On remarque que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$f'(x) + 2\omega x f(x) = 0.$$

f et f' sont dans $L^1(\mathbb{R})$, on a donc pour tout $\xi \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
&\widehat{f'}(\xi) + 2\omega \widehat{x \to xf(x)}(\xi) = 0 \\
\Longleftrightarrow\ & 2i\pi\xi \widehat{f}(\xi) + 2\omega \frac{i}{2\pi} \widehat{f}'(\xi) = 0 \\
\Longleftrightarrow\ & \widehat{f}'(\xi) + \frac{2\pi^2\xi}{\omega} \widehat{f}(\xi) = 0.
\end{aligned}$$

La résolution de l'équation différentielle nous donne que l'on a $c \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}\ \ \widehat{f}(\xi) = ce^{-\frac{\pi^2}{\omega}\xi^2}$$

Afin d'avoir c il faut calculer la valeur en zéro de $\widehat{f}$. On a :

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\omega x^2} dx \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{\omega}} \text{ (pour ce résultat, adapter l'exercice 4 en utilisant la parité de la fonction intégrée!!!!!)}
\end{aligned}$$

On a donc $c = \sqrt{\frac{\pi}{\omega}}$. On a donc bien le résultat souhaité.

3 Exercice 16

3.1 Calcul de I_4

On veut calculer :

$$I_4 := \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\theta) + \cos(\theta)}{5 + 4\cos(\theta)} d\theta.$$

Méthode de calcul : Nous sommes dans le chapitre "Variable complexe", dans un exercice d'intégration ; un peu de psychologie de base nous amène donc à penser "exponentielle complexe" en voyant se balader des cos et des sin dans notre intégrale. L'idée va être la suivante :

1) Écrire les sin et cos sous forme exponentielle.
2) Faire apparaître (potentiellement avec des astuces de calcul usuelles en multipliant par 1 ou ajoutant zéro) une intégrale de la forme $\int_0^{2\pi} f(Re^{i\theta})(iRe^{i\theta}) d\theta$.
3) Reconnaître une intégrale de la forme $\int_D f(z) dz$ où D sera un domaine à préciser.
4) Calculer l'intégrale à l'aide du théorème des résidus.

Passons au calcul à proprement parler :

$$I_4 = \frac{1}{2i}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta} + ie^{i\theta} + ie^{-i\theta}}{5 + 2(e^{i\theta} + e^{-i\theta})} d\theta$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{\left[(1+i) + (i-1)e^{-2i\theta}\right] ie^{-i\theta}}{5 + 2(e^{i\theta} + e^{-i\theta})} d\theta$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{C^+(0,1)} \frac{(1+i) + (i-1)/z^2}{5 + 2z + 2/z} dz$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{C^+(0,1)} \frac{(1+i)z^2 + (i-1)}{5z^2 + 2z^3 + 2z} dz$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{C^+(0,1)} \frac{(1+i)z^2 + (i-1)}{z(5z + 2z^2 + 2)} dz$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{C^+(0,1)} \frac{(1+i)z^2 + (i-1)}{4z(z+2)(z+1/2)} dz.$$

f (sous entendu la fonction à l'intérieure de la dernière intégrale) a des singularités en $z = 0,\ -1/2,\ 2$. Le cercle de centre 0 et de rayon 1 ne contenant que les deux premières, il suffit de calculer les résidus de f en 0 et en $-1/2$. Les pôles sont tous les deux d'ordre 1, l'utilisation de la formule des résidus donne :

$$\mathscr{R}(f,0) = \frac{i-1}{4} \text{ et } \mathscr{R}(f,-1/2) = \frac{3-5i}{12}.$$

L'application du théorème des résidus donne donc :

$$I_4 = -\frac{1}{2}\int_{C^+(0,1)} \frac{(1+i)z^2 + (i-1)}{4z(z+2)(z+1/2)} dz = -\frac{1}{2} * 2i\pi * \left(\frac{i-1}{4} + \frac{3-5i}{12}\right) = -\frac{\pi^2}{6}.$$