

Rapport de Stage:
Étude asymptotique pour des écoulements compressibles
diphasiques

Mériadec CHUBERRE
Encadrant: Nicolas SEGUIN

Année 2018/2019,
Master 2 Mathématiques fondamentales, Université Rennes 1, IRMAR

Table des matières

Introduction	3
1 Une introduction aux équations de Navier-Stokes	3
2 Cadre d'étude	4
2.1 Mise en équation	4
2.2 Hypothèses asymptotiques et scaling	6
2.3 Ré-écriture des équations	7
3 Système asymptotique sans prise en compte de la gravité	8
3.1 Établissement du système limite	8
3.2 Récapitulatif	15
3.3 Propriétés du système limite	16
4 Système asymptotique avec prise en compte de la gravité	19
4.1 Établissement du système limite	20
5 Discussion	20
5.1 Autour des solutions du système limite	20
5.2 Le cas de la dimension 2	21

Introduction

Le rapport qui va suivre relate le travail que j'ai effectué durant mon stage de M2, qui s'est déroulé du 15 mars au 21 juin 2019 sous la direction de Nicolas Seguin au sein du laboratoire de l'IRMAR sur le campus de Beaulieu à Rennes. Le travail consistait à étudier un système diphasique de fluides compressibles contenu dans un tuyau horizontal de section carrée dont on suppose la section négligeable par rapport à la longueur. Bien que l'étude qui va suivre traite le cas bidimensionnel, elle reste valable pour le cas de la dimension 3, c'est à dire l'étude de l'écoulement entre deux plaques. Plusieurs remarques sur ce cas seront faites en fin de rapport. On considérera de plus que l'écoulement des deux fluides est unidirectionnel sur l'axe horizontal. Le but était à partir d'un système régi par des équations de Navier-Stokes d'aboutir à l'asymptotique à un système hyperbolique plus simple à étudier. En premier lieu il a fallu appréhender les différentes méthodes de dérivation nécessaires pour mener à bien l'étude asymptotique, cela consistait en grande partie à reprendre ce qui a été fait dans [1]. Ce travail a pris une grande partie de mon temps de stage et son aboutissement a été l'obtention d'un système asymptotique hyperbolique bien posé.

Je tiens particulièrement à remercier Nicolas Seguin de m'avoir permis d'effectuer mon stage avec lui ; de s'être montré très disponible pour m'aider à avancer, ainsi que pour élargir ma vision de mon domaine d'étude, au delà du seul sujet de stage.

1 Une introduction aux équations de Navier-Stokes

Nous allons commencer par une brève introduction aux équations de Navier-Stokes compressibles. Ces équations ont pour but de décrire le mouvement de fluides visqueux compressibles. Tout d'abord ces équations s'inscrivent dans l'étude des milieux continus, c'est à dire que lorsque l'on étudie l'écoulement d'une rivière ou d'une avalanche, l'étude particule par particule n'est pas particulièrement intéressant, ce qui va être utile est d'avoir une description du fluide dans son ensemble. On va alors avoir besoin de plusieurs hypothèses initiales, comme par exemple considérer d'avoir le droit de définir en tout point de l'espace la vitesse $u(t, X)$, la masse volumique $\rho(t, X)$ etc... Les équations de Navier-Stokes vont donc régir le mouvement d'un fluide visqueux : cela signifie que les frottements qui vont avoir lieu entre le fluides et les parois du système, ou bien entre le fluide et d'autres fluides en présence vont devoir être prise en compte.

On pose alors Ω_t le domaine de \mathbb{R}^d , avec $d = 2, 3$ occupé par le fluide.

La première équation que l'on va considérer est l'équation de conservation de la masse. C'est à dire qu'au cours de l'étude la masse du fluide est conservée, à savoir qu'il n'y a ni disparition ni apparition de fluide au cours de l'étude. La masse totale de fluide à l'instant t est donnée par l'expression :

$$M_f(t) = \int_{\Omega(t)} \rho(X, t) dX.$$

La conservation de la masse au cours du temps se traduit donc par :

$$0 = \frac{d}{dt} M(t) = \frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho(X, t) dX.$$

On peut alors montrer que cette équation est équivalente à :

$$\forall (X, t) \in \Omega_t \times \mathbb{R}_+, \quad \partial_t(\rho(X, t)) + \operatorname{div}_X(\rho(X, t)u(X, t)) = 0$$

La deuxième équation est celle de la quantité de mouvement, qui découle de la deuxième loi de Newton qui dit :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}$$

où $\vec{p} = m \vec{a}$ désigne la masse multipliée par l'accélération qui est égale à la somme des forces appliquées au système. Ces dernières sont soit les forces extérieures, qui dépendent de la physique du problème (gravité, forces électromagnétiques etc...) ou bien les forces intérieures au système. Ces dernières sont modélisées par $\nabla_X(\sigma(t, X))$, où σ est une matrice symétrique appelée tenseur des contraintes. L'expression de celle-ci est bien sûr variable selon les systèmes étudiés.

Cela nous donne alors l'équation suivante :

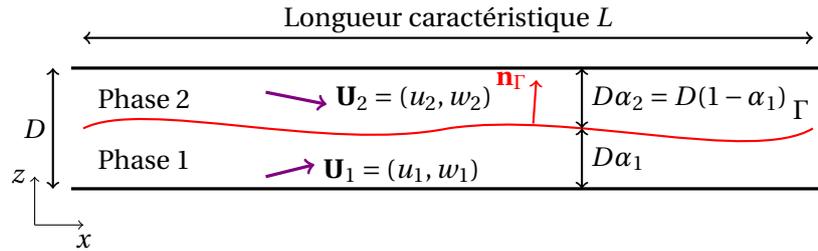
$$\forall (X, t) \in \Omega_t \times \mathbb{R}_+, \partial_t(\rho(t, X)U(t, X)) + \text{div}(\rho(t, X)U(t, X) \otimes U(t, X)) - \text{div}(\sigma(X, t)) = \rho(X, t)f(X, t),$$

où f modélise l'ensemble des forces extérieures appliquées au système.

Il y a une troisième équation qui fait intervenir l'énergie interne au système ; ne l'utilisant pas par la suite nous n'en parlerons pas ici et l'évoquerons brièvement en discussion à la fin de ce rapport lorsque nous parlerons du cas de la dimension 3.

2 Cadre d'étude

Nous allons ici nous placer dans la situation de deux fluides superposés non miscibles compressibles et visqueux. Les deux fluides sont dans une gaine dont nous allons supposer la longueur infinie (dans la réalité "très grande" par rapport à la hauteur) afin de se placer sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times [0; D]$ pour, respectivement, les variables temporelles, horizontales et verticales.



2.1 Mise en équation

On suppose que pour $k = 1, 2$ la phase k est décrite par les équations de Navier-Stokes :

$$\partial_t \rho_k + \partial_x(\rho_k u_k) + \partial_z(\rho_k w_k) = 0 \quad (1)$$

$$\partial_t(\rho_k u_k) + \partial_x(\rho_k u_k^2 + p_k) + \partial_z(\rho_k u_k w_k) = \mu_k(2\partial_{xx} u_k + \partial_{zz} u_k + \partial_{xz} w_k) \quad (2)$$

$$\partial_t(\rho_k w_k) + \partial_x(\rho_k u_k w_k) + \partial_z(\rho_k w_k^2 + p_k) = \mu_k(2\partial_{xx} w_k + \partial_{zz} w_k + \partial_{xz} u_k) - \rho_k g \quad (3)$$

De manière plus condensée :

$$\begin{cases} \partial_t(\rho_k) + \text{div}(\rho_k \mathbf{U}_k) = 0 \\ \partial_t(\rho_k \mathbf{U}_k) + \text{div}(\rho_k \mathbf{U}_k \otimes \mathbf{U}_k - \sigma_k) = -\rho_k g e_z, \end{cases}$$

avec $\mathbf{U}_k := \begin{pmatrix} u_k \\ w_k \end{pmatrix}$ et $\sigma_k := -p_k Id + \mu_k((\nabla \otimes \mathbf{U}_k) + (\nabla \otimes \mathbf{U}_k)^T)$ la matrice du tenseur des forces appliquées au système.

Dans ces équations, pour $k = 1, 2$ ρ_k désigne la masse volumique de la phase k , u_k (resp. w_k) la vitesse horizontale (resp. verticale) de la phase k et p_k la pression s'exerçant sur la phase k . g désigne

ici la constante de gravitation.

On suppose que l'interface est régie par une fonction de la forme $D\alpha_1$ telle que :

$$\begin{aligned}\alpha_1 : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} &\longrightarrow [0;1] \\ (t, x) &\mapsto \alpha_1(t, x)\end{aligned}$$

Cela signifie que l'on a toujours un fluide en dessous de l'autre.

Ce cas est étudié dans [2] (de même que dans [3]) sans tenir compte des termes visqueux, ni des forces extérieures appliquées aux phases, des transferts de masse, d'énergie et de moments entre les phases. J'utilise [1] qui regarde le cas sans la force de gravitation pour la direction à prendre en termes de calculs. Nous la rajoutons ici pour voir les changements que cela pourrait provoquer à l'asymptotique.

Les équations indexées par k , $k = 1, 2$, sont posées sur Ω_k , que l'on définit de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \{(t, x, z) | t > 0, z \in [0, D\alpha_1(t, x)]\} \\ \Omega_2 &= \{(t, x, z) | t > 0, z \in [D\alpha_1(t, x), D]\}\end{aligned}$$

Les conditions aux bords sont :

$$\begin{aligned}(\kappa_1 u_1 - \mu_1 \partial_z u_1)(t, x, 0) = 0 \quad \text{et} \quad (\kappa_1 u_2 - \mu_1 \partial_z u_1)(t, x, D) = 0 \\ w_1(t, x, 0) = 0 \quad \quad \quad w_2(t, x, D) = 0\end{aligned} \quad (4)$$

La nullité de la vitesse verticale aux bords du tuyau traduit l'imperméabilité de ce dernier. Il ne peut y avoir de fluide à s'échapper à travers les bords horizontaux du domaine. La condition faisant intervenir le coefficient de rugosité κ_k , pour $k = 1, 2$, traduit le fait qu'à l'interface il y a frottement entre le fluide et la paroi du tuyau.

A l'interface, c'est à dire en $(t, x, D\alpha_1(t, x))$, la continuité du champ de vitesse et de la composante normale du tenseur des contraintes nous donne la condition raccord suivante :

$$\mathbf{U}_1(t, x, D\alpha(t, x)) = \mathbf{U}_2(t, x, D\alpha(t, x)) \quad (5)$$

$$-(-p_1 + 2\mu_1 \partial_x u_1) \partial_x(D\alpha_1) + \mu_1(\partial_z u_1 + \partial_x w_1) = -(-p_2 + 2\mu_2 \partial_x u_2) \partial_x(D\alpha_1) + \mu_1(\partial_z u_2 + \partial_x w_2) \quad (6)$$

$$-\mu_1(\partial_z u_1 + \partial_x w_1) \partial_x(D\alpha_1) + 2\mu_1 \partial_z w_1 - p_1 = -\mu_2(\partial_z u_2 + \partial_x w_2) \partial_x(D\alpha_1) + 2\mu_2 \partial_z w_2 - p_2 \quad (7)$$

De manière équivalente :

$$\begin{cases} \mathbf{U}_1(t, x, D\alpha_1(t, x)) = \mathbf{U}_2(t, x, D\alpha_1(t, x)) =: \mathbf{V}_I(t, x) \\ \sigma_1(t, x, D\alpha_1(t, x)) \cdot \mathbf{n}_\Gamma(t, x) = \sigma_2(t, x, D\alpha_1(t, x)) \cdot \mathbf{n}_\Gamma(t, x) \end{cases}$$

avec $\mathbf{n}_\Gamma(t, x)$ le vecteur normal à l'interface, $\mathbf{n}_\Gamma(t, x) = (-\partial_x(D\alpha_1(t, x)), 1)$.

L'évolution à l'interface est donnée par :

$$\begin{aligned}\partial_t(D\alpha_1(t, x)) &= \mathbf{V}_I(t, x) \cdot \mathbf{n}_\Gamma(t, x) \\ &\Rightarrow \partial_t(\alpha_1) + u_I \partial_x \alpha_1 - w_I / D = 0 \\ &\Rightarrow \partial_t(\alpha_2) + u_I \partial_x \alpha_2 + w_I / D = 0\end{aligned} \quad (8)$$

Notons ici que la difficulté du problème réside dans le fait que la position de la frontière du domaine séparant les deux fluides n'est tout d'abord pas fixe, mais qui plus est une inconnue du problème. Les notations introduites ci-dessous désignent des opérations de moyennes verticales effectuées sur les différentes fonctions intervenant dans le problème. Ce sont sur ces quantités moyennées que nous allons écrire le système limite voulu.

Soit $\Omega := (D \times [a, b]) \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Pour toute fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $k = 1, 2$, et tout $(t, x, z) \in \Omega$ on pose :

$$\begin{aligned}\bar{f}(t, x) &:= \frac{1}{|b-a|} \int_a^b f_1(t, x, s) ds \\ \hat{f}_k(t, x) &:= \frac{1}{\rho_k} \overline{\rho_k f_k(t, x)} \\ f(z) &:= f(t, x, z).\end{aligned}$$

Ces opérateurs vont nous permettre d'éliminer la variable en z des équations, et ainsi à la fin obtenir un système d'EDP avec une dimension de moins.

2.2 Hypothèses asymptotiques et scaling

Nous allons maintenant procéder à un changement d'échelle et effectuer une étude asymptotique en z en suivant la méthode employée dans [4]. On considère L une longueur horizontale caractéristique du système; on la choisit telle que, comme il a été dit dans l'introduction, la section soit très petite devant L . Pour alléger les notations on prend $L = 1$. On pose alors $\epsilon := D/L$.

Definition 2.1. On dira que f_k^ϵ est un $\mathcal{O}(\epsilon)$ si on a $M > 0$ tel que pour tout $\epsilon > 0$ et tout $(t, x, z) \in \Omega_k$:

$$|f_k^\epsilon(t, x, z)| \leq M\epsilon$$

Hypothèse 2.1. On suppose alors pour $k = 1, 2$:

- $p_k = p_k(\rho_k) = a_k^2 \rho_k$
- $w_k = \mathcal{O}(\epsilon)$
- $\mu_k = \epsilon \mu_k^0$
- $\kappa_k = \epsilon \kappa_k^0$
- $g = \frac{1}{\epsilon} g_0$

où $a_k, \mu_k^0, \kappa_k^0, g_0$ sont des constantes positives avec $a_k > 0$. L'hypothèse sur la pression représente une hypothèse d'isothermie sur les fluides étudiés.

Remarque 2.1. Notons ici que l'hypothèse faite sur la constante de gravitation est classique dans ce genre de problème, regarder par exemple [4].

On peut remarquer que la première hypothèse implique que l'on pourra écrire $w_k =: \epsilon h(t, x, z)$ avec h tel qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $\epsilon < 0$ on a : $\forall z \in \Omega_k, |h(t, x, z)| \leq M$. On effectuera dans la suite de nombreuses hypothèses de régularité et de bornitude sur nos fonctions afin d'avoir la liberté de calcul nécessaire pour l'obtention de systèmes asymptotiques.

Le paramètre ϵ étant amené à varier, il faudrait pour être totalement rigoureux écrire les fonctions considérées sous la forme f_i^ϵ . Pour ne pas alourdir les notations nous ne le ferons pas, néanmoins on pose la définition suivante :

Pour l'étude à l'asymptotique de notre système on veut que le domaine de définition du problème ne dépendent pas de ϵ , ce qui nous amène à définir les changements de variables suivants :

$$\begin{aligned}\phi_1 : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times [0, \alpha_1(t, x)] &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times [0, \epsilon \alpha_1(t, x)] \\ (t, x, \tilde{z}) &\mapsto (t, x, \epsilon \tilde{z}) \\ \phi_2 : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times [\alpha_1(t, x), 1] &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times [\epsilon \alpha_1(t, x), \epsilon] \\ (t, x, \tilde{z}) &\mapsto (t, x, \epsilon \tilde{z})\end{aligned}$$

Definition 2.2. On définit les domaines suivants :

$$\widetilde{\Omega}_1 := \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times [0, \alpha_1(t, x)]$$

$$\widetilde{\Omega}_2 := \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times [\alpha_1(t, x), 1]$$

On définit alors, pour $k = 1, 2$, sur $\widetilde{\Omega}_k$ les fonctions suivantes :

- $\widetilde{w}_k := (\frac{1}{\epsilon} w_k) \circ \phi_k$
- $\widetilde{u}_k := u_k \circ \phi_k$
- $\widetilde{\rho}_k := \rho_k \circ \phi_k$
- $\widetilde{\rho}_k f_k := (\rho_k f_k) \circ \phi_k$, pour $f = w, u$
- $\widetilde{p}_k := p_k(\widetilde{\rho}_k)$

Hypothèse 2.2. On suppose alors que toutes les quantités définies ci-dessus sont des $\mathcal{O}(1)$ en z . La première est justifiée par l'hypothèse que la composante verticale de la vitesse est de l'ordre $\mathcal{O}(\epsilon)$.

2.3 Ré-écriture des équations

Nous allons maintenant regarder les équations vérifiées par le système, en se plaçant cette fois-ci sur les domaines définis en définition 2.2. Les équations (1), (2), (3), (6), (7) se ré-écrivent alors :

(1) devient :

$$\partial_t(\widetilde{\rho}_k) + \partial_x(\widetilde{\rho}_k \widetilde{u}_k) + \partial_z(\widetilde{\rho}_k \widetilde{w}_k) = 0 \quad (9)$$

(2) devient pour :

$$\partial_t(\widetilde{\rho}_k \widetilde{u}_k) + \partial_x(\widetilde{\rho}_k \widetilde{u}_k^2 + \widetilde{p}_k) + \partial_z(\widetilde{\rho}_k \widetilde{u}_k \widetilde{w}_k) = \mu_k^0 (2\epsilon \partial_{xx} \widetilde{u}_k + \frac{1}{\epsilon} \partial_{zz} \widetilde{u}_k + \epsilon \partial_{xz} \widetilde{w}_k) \quad (10)$$

(3) devient :

$$\epsilon \partial_t(\widetilde{\rho}_k \widetilde{w}_k) + \epsilon \partial_x(\widetilde{\rho}_k \widetilde{u}_k \widetilde{w}_k) + \epsilon \partial_z(\widetilde{\rho}_k \widetilde{w}_k^2) + \frac{1}{\epsilon} \partial_z(\widetilde{p}_k) = \mu_k^0 (2\epsilon^2 \partial_{xx} \widetilde{w}_k + \partial_{zz} \widetilde{w}_k + \partial_{xz} \widetilde{u}_k) - \rho_k \frac{1}{\epsilon} g_0 \quad (11)$$

(6) devient :

$$-(-\epsilon \widetilde{p}_1 + 2\epsilon^2 \mu_1 \partial_x \widetilde{u}_1) \partial_x(\alpha_1) + \mu_1^0 (\partial_z \widetilde{u}_1 + \epsilon^2 \partial_x \widetilde{w}_1) = -(-\epsilon \widetilde{p}_2 + 2\epsilon^2 \mu_2 \partial_x \widetilde{u}_2) \partial_x(\alpha_1) + \mu_2^0 (\partial_z \widetilde{u}_2 + \epsilon^2 \partial_x \widetilde{w}_2) \quad (12)$$

(7) devient :

$$-\mu_1^0 (\epsilon \partial_z \widetilde{u}_1 + \epsilon^2 \partial_x \widetilde{w}_1) \partial_x(\alpha_1) + 2\mu_1^0 \epsilon \partial_z \widetilde{w}_1 - \widetilde{p}_1 = -\mu_2^0 (\epsilon \partial_z \widetilde{u}_2 + \epsilon^2 \partial_x \widetilde{w}_2) \partial_x(\alpha_1) + 2\mu_2^0 \epsilon \partial_z \widetilde{w}_2 - \widetilde{p}_2 \quad (13)$$

Remarque 2.2. La justification de la ré-écriture ci-dessus repose sur le fait que, pour $k = 1, 2$:

$$\begin{aligned} \partial_1(\widetilde{u}_k)(t, x, \widetilde{z}) &= \partial_1(u_k \circ \phi_k)(t, x, \widetilde{z}) \\ &= \partial_1(\phi_k) \partial_1(u_k) \circ \phi_k(t, x, \widetilde{z}) \\ &= \partial_1(u_k) \circ \phi_k(t, x, \widetilde{z}), \end{aligned}$$

de même :

$$\partial_2(\widetilde{u}_k)(t, x, \widetilde{z}) = \partial_2(u_k) \circ \phi_k(t, x, \widetilde{z}),$$

enfin :

$$\begin{aligned} \partial_3(\widetilde{u}_k)(t, x, \widetilde{z}) &= \partial_3(\phi_k) \partial_3(u_k) \circ \phi_k(t, x, \widetilde{z}) \\ &= \epsilon \partial_3(u_k) \circ \phi_k(t, x, \widetilde{z}). \end{aligned}$$

On effectue ensuite les mêmes calculs pour $\widetilde{\rho}_k$ et \widetilde{w}_k -pour cette dernière attention au $\frac{1}{\epsilon}$ qui apparaît-, $k = 1, 2$ et il ne reste plus qu'à utiliser les équations de départ pour avoir les équations vérifiées par les nouvelles fonctions.

3 Système asymptotique sans prise en compte de la gravité

Nous allons maintenant écrire les équations sur les quantités moyennes et en déduire un modèle asymptotique fermé.

3.1 Établissement du système limite

Pour des soucis de notations, nous allons maintenant écrire les différentes fonctions sans les "tildes." ce qu'il faut retenir, c'est que les fonctions considérées sont -pour l'instant- au minimum bornées en z . Nous allons maintenant effectuer une analyse des différentes équations qui nous mènera vers un système asymptotique.

Proposition 3.1. *Sous les hypothèses 1.1 et 1.2, on a, pour $k = 1, 2$:*

$$\partial_z u_k = \mathcal{O}(1).$$

Démonstration.

En multipliant (10) par ϵ on obtient :

$$\partial_{zz} u_1 = \mathcal{O}(\epsilon)$$

On peut donc écrire : $\partial_{zz} u_1 = \epsilon g$, avec g borné en z . En intégrant entre 0 et $z \leq \epsilon \alpha_1$ on obtient alors :

$$\partial_z(u_1)(t, x, z) - \partial_z(u_1)(t, x, 0) = \epsilon \int_0^z g(t, x, s) ds.$$

Donc, en majorant g à l'intérieur de l'intégrale

$$|\partial_z(u_1)(t, x, z)| \leq |\partial_z(u_1)(t, x, 0)| + \epsilon^2 M,$$

avec M indépendant de z , et par (4) :

$$|\partial_z(u_1)(t, x, z)| \leq \left| \frac{\kappa_1^0}{\mu_1^0} u_1(0) \right| + \epsilon^2 M.$$

Finalement :

$$\partial_z u_1 = \mathcal{O}(1)$$

□

Proposition 3.2. *Toujours sous les mêmes hypothèses de régularité et de bornitude on a :*

$$\overline{(u_i)^2} = (\overline{u_i})^2 + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

Démonstration. On utilisera d'abord le lemme suivant :

Lemme 3.1. *Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. On a alors $t_0 \in [a, b]$ tel que*

$$f(t_0) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(s) ds$$

Démonstration. On a, pour tout $t \in [a, b]$, $\inf_{s \in [a, b]} f(s) \leq f(t) \leq \sup_{s \in [a, b]} f(s)$. Alors en intégrant et en divisant par $b - a$ on a, avec les notations précédentes :

$$\inf_{s \in [a, b]} f(s) \leq \bar{f} \leq \sup_{s \in [a, b]} f(s).$$

Donc $\bar{f} \in f([a, b])$. f étant continue, on peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires d'où le lemme. \square

On pose $g_i := u_i - \bar{u}_i$, $I_1 := [0, \epsilon\alpha_1]$ et $I_2 := [\epsilon\alpha_1, \epsilon]$. On remarque que $\overline{g_i} = 0$ car $\overline{\bar{u}_i} = \bar{u}_i$ (une fonction constante en z est égale à sa moyenne). On a alors :

$$u_i^2 = \bar{u}_i^2 + g_i^2 + 2\bar{u}_i g_i,$$

donc en passant à la moyenne :

$$\begin{aligned} \overline{u_i^2} &= \overline{\bar{u}_i^2} + \overline{g_i^2} + \overline{2\bar{u}_i g_i} \\ &= \bar{u}_i^2 + \overline{g_i^2} + 2\bar{u}_i \overline{g_i} \\ &= \bar{u}_i^2 + \overline{g_i^2}. \end{aligned}$$

On a : $\partial_z g_i = \partial_z u_i$. Donc par la proposition 3.1 on a $\partial_z g_i = \mathcal{O}(1)$. Donc on a $M_i > 0$ tel que pour tout $(x, y) \in I_i$ on a : $|g_i(x) - g_i(y)| \leq M_i |x - y|$.

Pour $i = 1$ on a, en notant z_0 un élément de $[0, \epsilon\alpha_1]$ où g_i atteint sa moyenne i.e. s'annule :

$$\begin{aligned} \overline{g_i^2} &\leq \frac{1}{\epsilon\alpha_1} \int_0^{\epsilon\alpha_1} |g_1(s)|^2 ds \\ &\leq \frac{1}{\epsilon\alpha_1} \int_0^{\epsilon\alpha_1} |g_1(s) - g_i(z_0)|^2 ds \\ &\leq \frac{1}{\epsilon\alpha_1} \int_0^{\epsilon\alpha_1} |s - z_0|^2 ds \text{ par l'inégalité des accroissements finis} \\ &\leq \frac{1}{\epsilon\alpha_1} \int_0^{\epsilon\alpha_1} (\epsilon\alpha_1)^2 ds \\ &\leq \epsilon^2 \text{ car } \alpha_1 \leq 1. \end{aligned}$$

\square

Proposition 3.3. *Sous les hypothèses 2.1 et 2.2, on a :*

$$\partial_z p_1 = 2\epsilon\mu_1^0 \partial_{zz} w_1 + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (14)$$

$$\partial_z p_2 = 2\epsilon\mu_2^0 \partial_{zz} w_2 + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (15)$$

Démonstration. L'analyse précédente nous permet d'écrire que dans (11) on a $\mu_1 \partial_{xz}(u_1) = \epsilon\mu_1^0 \partial_{xz}(u_1)$. On peut donc écrire en multipliant par ϵ :

$$\partial_z p_1 = 2\epsilon\mu_1^0 \partial_{zz} w_1 + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

En effectuant les mêmes calculs sur $[\alpha_1, 1]$ on obtient le même résultat pour u_2 . \square

Proposition 3.4. *Nous avons aussi les propriétés suivantes :*

$$p_1(\epsilon\alpha_1) = p_2(\epsilon\alpha_1) + \mathcal{O}(\epsilon), \quad (16)$$

$$\mu_1^0 \partial_z u_1(\epsilon\alpha_1) = \mu_2^0 \partial_z u_2(\epsilon\alpha_1) + \mathcal{O}(\epsilon), \quad (17)$$

$$\epsilon\mu_1^0 \partial_z w_1(\epsilon\alpha_1) - p_1(\epsilon\alpha_1) = \epsilon\mu_2^0 \partial_z w_2(\epsilon\alpha_1) - p_2(\epsilon\alpha_1) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (18)$$

Démonstration. La preuve s'effectue avec les mêmes méthodes que précédemment. \square

On rappelle la formule de Leibniz, bien entendu sous des hypothèses de régularité suffisantes :

$$\frac{d}{dx} \left(\int_{\psi(x)}^{\phi(x)} f(x, y) dy \right) = \int_{\psi(x)}^{\phi(x)} \partial_x f(x, y) dy + [\psi'(x) f(x, \psi(x)) - \phi'(x) f(x, \phi(x))].$$

Proposition 3.5. On a, pour $k = 1, 2$, sur $\widetilde{\Omega}_k$:

$$\partial_t(\alpha_k \bar{\rho}_k) + \partial_t(\alpha_k \bar{\rho}_k \widehat{u}_k) = 0.$$

Démonstration. On intègre $(\widetilde{1})$ sur $[0, \alpha_1]$; la formule précédente nous donne :

$$\begin{aligned} \int_0^{\alpha_1(t,x)} \partial_t \rho_1(t, x, s) ds &= \partial_t \int_0^{\alpha_1(t,x)} \rho_1(t, x, s) ds - [\alpha_1(t, x) \rho_1(\alpha_1(t, x)) - \partial_x(0) \rho_1(0)] \\ &= \partial_t \int_0^{\alpha_1(t,x)} \rho_1(t, x, s) ds - \partial_t(\alpha_1(t, x)) \rho_1(\alpha_1(t, x)) \\ \int_0^{\alpha_1(t,x)} \partial_x(\rho_1 u_1)(t, x, s) ds &= \partial_x \int_0^{\alpha_1(t,x)} (\rho_1 u_1)(t, x, s) ds - \partial_x(\alpha_1(t, x)) (\rho_1 u_1)(\alpha_1(t, x)) \\ \int_0^{\alpha_1(t,x)} \partial_z(\rho_1 w_1)(t, x, s) ds &= (\rho_1 w_1)(\alpha_1) - \underbrace{(\rho_1 w_1)(0)}_{=0} \end{aligned}$$

Ainsi, en sommant et en factorisant les termes des égalités à droite par $\rho_1(\alpha_1)$, on obtient grâce à $(\widetilde{8})$:

$$\partial_t \int_0^{\alpha_1(t,x)} \rho_1(t, x, s) ds + \partial_x \int_0^{\alpha_1(t,x)} (\rho_1 u_1)(t, x, s) ds = 0$$

En ré-écrivant avec les conventions définies plus haut :

$$\partial_t(\alpha_1 \bar{\rho}_1) + \partial_x(\alpha_1 \bar{\rho}_1 \widehat{u}_1) = 0 \quad (19)$$

En effectuant les mêmes calculs pour la phase 2 en intégrant sur $[\alpha_1, 1]$:

$$\partial_t(\alpha_2 \bar{\rho}_2) + \partial_x(\alpha_2 \bar{\rho}_2 \widehat{u}_2) = 0 \quad (20)$$

\square

Proposition 3.6. La moyenne sur (2) donne :

$$\partial_t(\alpha_1 \bar{\rho}_1 \widehat{u}_1) + \partial_x(\alpha_1 \bar{\rho}_1 \widehat{u}_1^2 + \alpha_1 \bar{p}_1) - p_1(\rho_1(\epsilon \alpha_1)) \partial_x \alpha_1 = \mu_1^0 \partial_z u_1(\epsilon \alpha_1) - \kappa_1^0 u_1(0) + \mathcal{O}(\epsilon) \quad (21)$$

$$\partial_t(\alpha_2 \bar{\rho}_2 \widehat{u}_2) + \partial_x(\alpha_2 \bar{\rho}_2 \widehat{u}_2^2 + \alpha_2 \bar{p}_2) - p_2(\rho_2(\epsilon \alpha_1)) \partial_x \alpha_2 = \mu_2^0 \partial_z u_2(\epsilon \alpha_1) - \kappa_2^0 u_2(0) + \mathcal{O}(\epsilon) \quad (22)$$

Démonstration. En intégrant sur $[0; \epsilon\alpha_1]$ le membre gauche de (2) pour $k = 1$ on obtient :

$$\partial_t(\alpha_1 \bar{\rho}_1 \hat{u}_1) + \partial_x(\alpha_1 \bar{\rho}_1 \hat{u}_1^2 + \alpha_1 \bar{p}_1) - p_1(\rho_1(\epsilon\alpha_1)) \partial_x \alpha_1 - (\rho_1 u_1)(\epsilon\alpha_1) \partial_t(\alpha_1) - (\rho_1 u_1^2)(\epsilon\alpha_1) \partial_x(\alpha_1) - (\rho_1 u_1 w_1)(\epsilon\alpha_1)$$

En factorisant par $(\rho_1 u_1)(\epsilon\alpha_1)$ et en utilisant (8) on obtient le membre de gauche de (21).

Regardons le membre de droite de (2). La proposition 3.2 nous donne que le terme $\frac{1}{\epsilon} \partial_{zz} \tilde{u}_k$ est le seul en $\mathcal{O}(1)$ ($\partial_z(u_k)$ est en $\mathcal{O}(1)$ donc il n'y a qu'un seul $\frac{1}{\epsilon}$ "à sortir"); c'est donc le seul que l'on va intégrer. On obtient alors :

$$\mu_1^0 \partial_z u_1(\epsilon\alpha_1) - \mu_1^0 \partial_z u_1(0) + \mathcal{O}(\epsilon).$$

Lest conditions aux bords (4) nous donne le résultat. En faisant les mêmes calculs sur $[\epsilon\alpha_1, \epsilon]$ on trouve le résultat pour la phase 2. □

Proposition 3.7. *Sous le hypothèses précédentes on a :*

$$\mu_1^0 \partial_z u_1(\epsilon\alpha_1) = \mu_1^0 \frac{u_1(\epsilon\alpha_1) - \bar{u}_1}{(\epsilon\alpha_1)/2} + \mathcal{O}(\epsilon) \quad (23)$$

$$\mu_2^0 \partial_z u_2(\epsilon\alpha_1) = \mu_2^0 \frac{\bar{u}_2 - u_2(\epsilon\alpha_1)}{(\epsilon\alpha_2)/2} + \mathcal{O}(\epsilon) \quad (24)$$

Démonstration. La formule de Taylor nous donne pour $z \in [0, \epsilon\alpha_1]$:

$$u_1(z) = u_1(\epsilon\alpha_1) + (z - \epsilon\alpha_1) \partial_z(u_1(\epsilon\alpha_1)) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

En ré-écrivant le $\mathcal{O}(\epsilon)$ et en faisant la moyenne :

$$\begin{aligned} \bar{u}_1 &= \frac{1}{\epsilon\alpha_1} \int_0^{\epsilon\alpha_1} u_1(\epsilon\alpha_1) ds + \frac{1}{\epsilon\alpha_1} \int_0^{\epsilon\alpha_1} \partial_z u_1(\epsilon\alpha_1) (s - \epsilon\alpha_1) ds + \frac{1}{\epsilon\alpha_1} \int_0^{\epsilon\alpha_1} \epsilon^2 g(s) ds \\ &= u_1(\epsilon\alpha_1) + \partial_z u_1(\epsilon\alpha_1) \frac{1}{\epsilon\alpha_1} \int_0^{\epsilon\alpha_1} (s - \epsilon\alpha_1) ds + \mathcal{O}(\epsilon^2), \end{aligned}$$

car g est borné en z ,

$$= u_1(\epsilon\alpha_1) + \partial_z u_1(\epsilon\alpha_1) (\epsilon\alpha_1)/2 + \mathcal{O}(\epsilon).$$

Finalement :

$$\mu_1^0 \partial_z u_1(\epsilon\alpha_1) = \mu_1^0 \frac{u_1(\epsilon\alpha_1) - \bar{u}_1}{(\epsilon\alpha_1)/2} + \mathcal{O}(\epsilon).$$

De même en faisant la moyenne cette fois ci sur $[\epsilon\alpha_1, \epsilon]$:

$$\mu_2^0 \partial_z u_2(\epsilon\alpha_1) = \mu_2^0 \frac{\bar{u}_2 - u_2(\epsilon\alpha_1)}{(\epsilon\alpha_2)/2} + \mathcal{O}(\epsilon).$$

□

Proposition 3.8. *Toujours sous les mêmes hypothèses on a :*

$$u_I = \beta \bar{u}_1 + (1 - \beta) \bar{u}_2 + \mathcal{O}(\epsilon^2), \text{ avec } \beta := \frac{\mu_1^0 \alpha_2}{\mu_1^0 \alpha_2 + \mu_2^0 \alpha_1} \quad (25)$$

$$\mu_1^0 \partial_z u_1(\epsilon\alpha_1) = -\mu_2^0 \partial_z u_2(\epsilon\alpha_1) = \frac{1}{\epsilon} \frac{2\mu_1^0 \mu_2^0}{\mu_2^0 \alpha_1 + \mu_1^0 \alpha_2} (\bar{u}_2 - \bar{u}_1) + \mathcal{O}(\epsilon). \quad (26)$$

Démonstration.

• Première égalité :

En sommant les deux égalités précédentes :

$$\mu_1^0 \partial_z u_1(\epsilon \alpha_1) - \mu_2^0 \partial_z u_2(\epsilon \alpha_1) = \mu_1^0 \frac{u_1(\epsilon \alpha_1) - \bar{u}_1}{(\epsilon \alpha_1)/2} - \mu_2^0 \frac{\bar{u}_2 - u_2(\epsilon \alpha_1)}{(\epsilon \alpha_2)/2} + \mathcal{O}(\epsilon),$$

donc par (17)

$$\mu_1^0 \frac{u_1(\epsilon \alpha_1) - \bar{u}_1}{(\epsilon \alpha_1)/2} - \mu_2^0 \frac{\bar{u}_2 - u_2(\epsilon \alpha_1)}{(\epsilon \alpha_2)/2} = \mathcal{O}(\epsilon).$$

Comme $u_1(\epsilon \alpha_1) = u_1(\epsilon \alpha_2) = u_I$ on a après réduction au même dénominateur :

$$u_I = \beta \bar{u}_1 + (1 - \beta) \bar{u}_2, \text{ avec } \beta := \frac{\mu_1^0 \alpha_2}{\mu_1^0 \alpha_2 + \mu_2^0 \alpha_1}$$

• Deuxième égalité :

En reprenant les égalités de la proposition 2.5 On obtient :

$$\epsilon \alpha_1 \mu_2^0 \mu_1^0 \partial_z u_1(\epsilon \alpha_1) = 2 \mu_2^0 \mu_1^0 (u_I - \bar{u}_1) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

et

$$\epsilon \alpha_2 \mu_2^0 \mu_1^0 \partial_z u_2(\epsilon \alpha_1) = 2 \mu_1^0 \mu_2^0 (\bar{u}_2 - u_I) + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

Donc par (17), avec $\mu_2^0 \partial_z u_2(\epsilon \alpha_1) = \mu_1^0 \partial_z u_1(\epsilon \alpha_1) + \mathcal{O}(\epsilon)$:

$$\epsilon \alpha_2 \mu_1^0 \mu_1^0 \partial_z u_1(\epsilon \alpha_1) = 2 \mu_1^0 \mu_2^0 (\bar{u}_2 - u_I) + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

En additionnant :

$$\epsilon (\mu_2^0 \alpha_1 + \mu_1^0 \alpha_2) \partial_z u_1(\epsilon \alpha_1) = 2 \mu_1^0 \mu_2^0 (\bar{u}_2 - \bar{u}_1) + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

Finalement :

$$\mu_1^0 \partial_z u_1(\epsilon \alpha_1) = \frac{1}{\epsilon} \frac{2 \mu_1^0 \mu_2^0}{\mu_2^0 \alpha_1 + \mu_1^0 \alpha_2} (\bar{u}_2 - \bar{u}_1) + \mathcal{O}(\epsilon).$$

En remplaçant avec (17) $\mu_1^0 \partial_z u_1(\epsilon \alpha_1)$ par $\mu_2^0 \partial_z u_2(\epsilon \alpha_2) + \mathcal{O}(\epsilon)$ on obtient le résultat pour $-\mu_2^0 \partial_z u_2(\epsilon \alpha_2)$. \square

Corollaire 3.1. On a :

$$\bar{u}_1 - \bar{u}_2 = \mathcal{O}(\epsilon)$$

Démonstration. Il suffit de multiplier (26) par ϵ . \square

Proposition 3.9. On a :

$$w_I = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{2(\alpha_1 \mu_2^0 + \alpha_2 \mu_1^0)} (\bar{p}_1 - \bar{p}_2) + \mathcal{O}(\epsilon) \quad (27)$$

Démonstration. Par la proposition 3.3 on a :

$$\begin{aligned}\partial_z p_1 &= 2\mu_1 \partial_z z w_1 + \mathcal{O}(\epsilon) \\ \partial_z p_2 &= 2\mu_2 \partial_z z w_2 + \mathcal{O}(\epsilon)\end{aligned}$$

En intégrant la première équation entre z et α_1 on a :

$$\begin{aligned}p_1(\epsilon\alpha_1) - p_1(z) &= 2\mu_1 [\partial_z w_1(\epsilon\alpha_1) - \partial_z w_1(z)] + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ \iff p_1(z) &= p_1(\epsilon\alpha_1) + 2\mu_1 [\partial_z w_1(z) - \partial_z w_1(\epsilon\alpha_1)] + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ \iff \bar{p}_1 &= p_1(\epsilon\alpha_1) + 2\frac{\mu_1^0}{\alpha_1} [w_1(\epsilon\alpha_1) - w_1(0)] - 2\mu_1 \partial_z w_1(\epsilon\alpha_1) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ \iff \bar{p}_1 &= p_1(\epsilon\alpha_1) + 2\frac{\mu_1^0}{\alpha_1} w_I - 2\mu_1 \partial_z w_1(\epsilon\alpha_1) + \mathcal{O}(\epsilon^2).\end{aligned}$$

De la même manière, on a, en intégrant la deuxième entre α_1 et $z \leq \epsilon$:

$$\bar{p}_2 = p_2(\epsilon\alpha_1) + 2\frac{\mu_2^0}{\alpha_2} w_I - 2\mu_2 \partial_z w_2(\epsilon\alpha_1) + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

Ainsi en soustrayant les deux égalités obtenues on a :

$$\begin{aligned}(\bar{p}_1 - \bar{p}_2) &= 2\left(\frac{\mu_1^0}{\alpha_1} + \frac{\mu_2^0}{\alpha_2}\right) w_I + (p_1(\epsilon\alpha_1) - p_2(\epsilon\alpha_1)) + 2(\mu_2 \partial_z w_2 - \mu_1 \partial_z w_1) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &= 2\left(\frac{\mu_1^0}{\alpha_1} + \frac{\mu_2^0}{\alpha_2}\right) w_I + \mathcal{O}(\epsilon) \\ &= 2\left(\frac{\mu_1^0 \alpha_2 + \mu_2^0 \alpha_1}{\alpha_1 \alpha_2}\right) w_I + \mathcal{O}(\epsilon)\end{aligned}$$

On obtient bien

$$w_I = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{2(\alpha_1 \mu_2^0 + \alpha_2 \mu_1^0)} (\bar{p}_1 - \bar{p}_2) + \mathcal{O}(\epsilon)$$

□

Corollaire 3.2. *La proposition 3.9 entraîne :*

$$\bar{p}_1 - \bar{p}_2 = \mathcal{O}(\epsilon).$$

Démonstration. Cela résulte de l'hypothèse faite sur la vitesse verticale qui est en $\mathcal{O}(\epsilon)$. □

On peut alors établir un système asymptotique :

Théorème 3.1. *Sous les hypothèses suivantes, pour $k = 1, 2$:*

- $z = \mathcal{O}(\epsilon)$
- $p_k = p_k(\rho_k) = a_k^2 \rho_k$
- $w_k = \mathcal{O}(\epsilon)$
- $\mu_k = \epsilon \mu_k^0$
- $\kappa_k = \epsilon \kappa_k^0$
- $\bar{u}_1 = \widehat{u}_1 + \mathcal{O}(\epsilon)$

on a comme modèle final en négligeant les termes en $\mathcal{O}(\epsilon)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t(\alpha_1 \bar{\rho}_1) + \partial_x(\alpha_1 \bar{\rho}_1 u_m) = 0 \\ \partial_t(\alpha_2 \bar{\rho}_2) + \partial_x(\alpha_2 \bar{\rho}_2 u_m) = 0 \\ \partial_t(\rho_m u_m) + \partial_x(\rho_m u_m^2 + p_m) = -\kappa_m^0 u_m \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ \rho_m = \alpha_1 \bar{\rho}_1 + \alpha_2 \bar{\rho}_2 \\ u_m = \hat{u}_i = \bar{u}_i, \text{ pour } i = 1, 2 \\ p_m = \mathcal{P}_1(\bar{\rho}_1) = \mathcal{P}_2(\bar{\rho}_2) \end{array} \right. \quad (28)$$

avec $\kappa_m^0 = \kappa_1^0 + \kappa_2^0$.

Démonstration. Les proposition 3.6 et 3.8 nous donnent :

$$\begin{aligned} \partial_t(\alpha_1 \bar{\rho}_1 \hat{u}_1) + \partial_x(\alpha_1 \bar{\rho}_1 \hat{u}_1^2 + \alpha_1 \bar{p}_1) - p_1(\rho_1(\epsilon \alpha_1)) \partial_x \alpha_1 &= \Theta_u(\bar{u}_1 - \bar{u}_2) - \kappa_1^0 u_1(0) + \mathcal{O}(\epsilon) \\ \partial_t(\alpha_2 \bar{\rho}_2 \hat{u}_2) + \partial_x(\alpha_2 \bar{\rho}_2 \hat{u}_2^2 + \alpha_2 \bar{p}_2) - p_2(\rho_2(\epsilon \alpha_1)) \partial_x \alpha_2 &= \Theta_u(\bar{u}_2 - \bar{u}_1) - \kappa_2^0 u_2(0) + \mathcal{O}(\epsilon) \end{aligned}$$

La proposition 3.1 permet d'écrire $u_i(0) = \bar{u}_i + \mathcal{O}(\epsilon)$. Donc en utilisant le corollaire 3.1 on écrit :

$$\begin{aligned} \partial_t(\alpha_1 \bar{\rho}_1 \hat{u}_1) + \partial_x(\alpha_1 \bar{\rho}_1 \hat{u}_1^2 + \alpha_1 \bar{p}_1) - p_1(\rho_1(\epsilon \alpha_1)) \partial_x \alpha_1 &= -\kappa_1^0 \bar{u}_1 + \mathcal{O}(\epsilon) \\ \partial_t(\alpha_2 \bar{\rho}_2 \hat{u}_2) + \partial_x(\alpha_2 \bar{\rho}_2 \hat{u}_2^2 + \alpha_2 \bar{p}_2) - p_2(\rho_2(\epsilon \alpha_1)) \partial_x \alpha_2 &= -\kappa_2^0 \bar{u}_2 + \mathcal{O}(\epsilon) \end{aligned}$$

Ainsi avec (19) et (20) on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t(\alpha_1 \bar{\rho}_1) + \partial_x(\alpha_1 \bar{\rho}_1 \hat{u}_1) = 0 \\ \partial_t(\alpha_2 \bar{\rho}_2) + \partial_x(\alpha_2 \bar{\rho}_2 \hat{u}_2) = 0 \\ \partial_t(\alpha_1 \bar{\rho}_1 \hat{u}_1) + \partial_x(\alpha_1 \bar{\rho}_1 \hat{u}_1^2 + \alpha_1 \bar{p}_1) - p_1(\rho_1(\epsilon \alpha_1)) \partial_x \alpha_1 = -\kappa_1^0 \bar{u}_1 + \mathcal{O}(\epsilon) \\ \partial_t(\alpha_2 \bar{\rho}_2 \hat{u}_2) + \partial_x(\alpha_2 \bar{\rho}_2 \hat{u}_2^2 + \alpha_2 \bar{p}_2) - p_2(\rho_2(\epsilon \alpha_1)) \partial_x \alpha_2 = -\kappa_2^0 \bar{u}_2 + \mathcal{O}(\epsilon) \end{array} \right.$$

(16) nous donne : $\partial_t(\alpha_2 \bar{\rho}_2 \hat{u}_2) + \partial_x(\alpha_2 \bar{\rho}_2 \hat{u}_2^2 + \alpha_2 \bar{p}_2) - (p_1(\rho_1(\epsilon \alpha_1)) + \mathcal{O}(\epsilon)) \partial_x \alpha_2 = -\kappa_2^0 \bar{u}_2 + \mathcal{O}(\epsilon)$.

D'où :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t(\alpha_1 \bar{\rho}_1) + \partial_x(\alpha_1 \bar{\rho}_1 \hat{u}_1) = 0 \\ \partial_t(\alpha_2 \bar{\rho}_2) + \partial_x(\alpha_2 \bar{\rho}_2 \hat{u}_2) = 0 \\ \partial_t(\alpha_1 \bar{\rho}_1 \hat{u}_1) + \partial_x(\alpha_1 \bar{\rho}_1 \hat{u}_1^2 + \alpha_1 \bar{p}_1) - p_1(\rho_1(\epsilon \alpha_1)) \partial_x \alpha_1 = -\kappa_1^0 \bar{u}_1 + \mathcal{O}(\epsilon) \\ \partial_t(\alpha_2 \bar{\rho}_2 \hat{u}_2) + \partial_x(\alpha_2 \bar{\rho}_2 \hat{u}_2^2 + \alpha_2 \bar{p}_2) - p_1(\rho_1(\epsilon \alpha_1)) \partial_x \alpha_2 = -\kappa_2^0 \bar{u}_2 + \mathcal{O}(\epsilon) \end{array} \right.$$

L'hypothèse $\bar{u}_1 = \hat{u}_1 + \mathcal{O}(\epsilon)$ et le corollaire 4.1 permettent d'écrire :

$$\partial_t(\alpha_i \bar{\rho}_i) + \partial_x(\alpha_i \bar{\rho}_i u_m) = 0$$

D'où :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t(\alpha_1 \bar{\rho}_1) + \partial_x(\alpha_1 \bar{\rho}_1 u_m) = 0 \\ \partial_t(\alpha_2 \bar{\rho}_2) + \partial_x(\alpha_2 \bar{\rho}_2 u_m) = 0 \\ \partial_t(\alpha_1 \bar{\rho}_1 \hat{u}_1) + \partial_x(\alpha_1 \bar{\rho}_1 \hat{u}_1^2 + \alpha_1 \bar{p}_1) - p_1(\rho_1(\epsilon \alpha_1)) \partial_x \alpha_1 = -\kappa_1^0 \bar{u}_1 + \mathcal{O}(\epsilon) \\ \partial_t(\alpha_2 \bar{\rho}_2 \hat{u}_2) + \partial_x(\alpha_2 \bar{\rho}_2 \hat{u}_2^2 + \alpha_2 \bar{p}_2) - p_1(\rho_1(\epsilon \alpha_1)) \partial_x \alpha_2 = -\kappa_2^0 \bar{u}_2 + \mathcal{O}(\epsilon) \end{array} \right.$$

L'addition des deux dernières relation donne :

$$\partial_t(\alpha_2 \bar{\rho}_2 \hat{u}_2 + \alpha_1 \bar{\rho}_1 \hat{u}_1) + \partial_x(\alpha_2 \bar{\rho}_2 \hat{u}_2^2 + \alpha_2 \bar{p}_2 + \alpha_1 \bar{\rho}_1 \hat{u}_1^2 + \alpha_1 \bar{p}_1) - p_1(\rho_1(\epsilon \alpha_1)) \partial_x(\alpha_2 + \alpha_1) = -\kappa_2^0 \bar{u}_2 - \kappa_1^0 \bar{u}_1 + \mathcal{O}(\epsilon)$$

On a $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, et par le corollaire 3.2 $\bar{p}_2 = \bar{p}_1 + \mathcal{O}(\epsilon)$; d'où avec les notations du théorème :

$$\partial_t(\rho_m u_m) + \partial_x(\alpha_2 \bar{\rho}_2 \hat{u}_2^2 + \alpha_1 \bar{\rho}_1 \hat{u}_1^2 + (\alpha_2 + \alpha_1) p_m) = -\kappa_2^0 \bar{u}_2 - \kappa_1^0 \bar{u}_1 + \mathcal{O}(\epsilon)$$

donc avec le corollaire 2.1 :

$$\partial_t(\rho_m u_m) + \partial_x(\alpha_2 \bar{\rho}_2 \hat{u}_2^2 + \alpha_1 \bar{\rho}_1 \hat{u}_1^2 + (\alpha_2 + \alpha_1) p_m) = -(\kappa_2^0 + \kappa_1^0) \bar{u}_1 + \mathcal{O}(\epsilon)$$

donc toujours avec l'hypothèse $\bar{u}_1 = \hat{u}_1 + \mathcal{O}(\epsilon)$:

$$\partial_t(\rho_m u_m) + \partial_x(\alpha_2 \bar{\rho}_2 u_m^2 + \alpha_1 \bar{\rho}_1 u_m^2 + p_m) = -\kappa_m \bar{u}_1 + \mathcal{O}(\epsilon).$$

En supprimant les $\mathcal{O}(\epsilon)$ on a bien :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t(\alpha_1 \bar{\rho}_1) + \partial_x(\alpha_1 \bar{\rho}_1 u_m) = 0 \\ \partial_t(\alpha_2 \bar{\rho}_2) + \partial_x(\alpha_2 \bar{\rho}_2 u_m) = 0 \\ \partial_t(\rho_m u_m) + \partial_x(\rho_m u_m^2 + p_m) = -\kappa_m^0 u_m \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ \rho_m = \alpha_1 \bar{\rho}_1 + \alpha_2 \bar{\rho}_2 \\ u_m = \hat{u}_i = \bar{u}_i, \text{ pour } i = 1, 2. \\ p_m = \mathcal{P}_1(\bar{\rho}_1) = \mathcal{P}_2(\bar{\rho}_2) \end{array} \right.$$

avec $\kappa_m^0 = \kappa_1^0 + \kappa_2^0$.

□

3.2 Récapitulatif

Faisons un récapitulatif de ce que nous avons fait dans cette section. En effet, nous avons d'abord manipulé les fonctions moyennées puis nous avons ensuite effectué des calculs avec les fonctions initiales. En premier lieu il s'agissait de déterminer les ordres de grandeurs des quantités que nous allions étudier, il était donc nécessaire d'effectuer un changement d'échelle afin d'avoir des variables et un domaine indépendant de ϵ , et de ne retrouver celui-ci qu'au sein de équations ; ainsi l'étude est beaucoup plus aisée. Ensuite, pour l'établissement du système limite les calculs effectués étaient :

- Des intégrales dans la direction verticales, auquel cas il est équivalent de faire les calculs à un changement de variable près.
- Des ré-écritures de quantités à \mathcal{O} près ; alors, avec les estimations effectuées on peut faire les calculs à l'aide des fonctions initiales.

Afin d'aboutir au système final, nous avons travaillé sur les moyennes des équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement horizontal pour chaque phase ((19), (20), (21), (22)). Nous sommes partis de :

$$\begin{aligned} \partial_t \rho_k + \partial_x(\rho_k u_k) + \partial_z(\rho_k w_k) &= 0 \\ \partial_t(\rho_k u_k) + \partial_x(\rho_k u_k^2 + p_k) + \partial_z(\rho_k u_k w_k) &= \mu_k(2\partial_{xx} u_k + \partial_{zz} u_k + \partial_{xz} w_k) \end{aligned}$$

En faisant la moyenne sur chacune des équations et à l'aide des estimations d'ordre de grandeurs nous avons obtenu :

$$\begin{aligned} \partial_t(\alpha_1 \bar{\rho}_1) + \partial_x(\alpha_1 \bar{\rho}_1 \hat{u}_1) &= 0 \\ \partial_t(\alpha_2 \bar{\rho}_2) + \partial_x(\alpha_2 \bar{\rho}_2 \hat{u}_2) &= 0 \\ \partial_t(\alpha_1 \bar{\rho}_1 \hat{u}_1) + \partial_x(\alpha_1 \bar{\rho}_1 \hat{u}_1^2 + \alpha_1 \bar{p}_1) - p_1(\rho_1(\epsilon \alpha_1)) \partial_x \alpha_1 &= \mu_1^0 \partial_z u_1(\epsilon \alpha_1) - \kappa_1^0 u_1(0) + \mathcal{O}(\epsilon) \\ \partial_t(\alpha_2 \bar{\rho}_2 \hat{u}_2) + \partial_x(\alpha_2 \bar{\rho}_2 \hat{u}_2^2 + \alpha_2 \bar{p}_2) - p_2(\rho_2(\epsilon \alpha_1)) \partial_x \alpha_2 &= \mu_2^0 \partial_z u_2(\epsilon \alpha_1) - \kappa_2^0 u_2(0) + \mathcal{O}(\epsilon) \end{aligned}$$

Il fallait ensuite traiter dans les deux dernières équations les termes de pression et en $\partial_z(u_k)(\epsilon\alpha_1)$. C'est là que les estimations sur les conditions à l'interface vont être utilisées (propositions 3.8, 3.9 et corollaires associées 3.1 et 3.2) afin d'aboutir au théorème 3.1.

Comparons maintenant le système initial ((1), (2), (3)) avec (28). Tout d'abord il y a une dimension en moins dans le modèle limite, la dimension vertical, qui traduit le fait qu'à l'asymptotique, "tout se passe de la même manière" sur une même section du tuyau. De plus le système contient moins d'inconnues et (donc) moins d'équations que le système initial; de plus ces équations sont plus simples à étudier, notamment grâce au fait que tout les termes sont d'ordre 1 en termes de dérivées contrairement au système initial.

Notons que dans [2] et [3] il y a deux vitesses distinctes dans le modèle asymptotique final. Ici cela n'est pas possible à cause de la viscosité et de sa dépendance linéaire en ϵ .

3.3 Propriétés du système limite

Considérons un système quasi-linéaire de la forme

$$\partial_t(U) + A(U)\partial_x(U) = S(U) \quad (S),$$

avec $U : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow D$, ou $D \subset \mathbb{R}^N$ convexe désigne l'ensemble des états physiquement admissibles par notre système

Definition 3.1. On dit qu'un système de la forme (S) est hyperbolique si pour tout $U \in D$ on a $A(U)$ qui est diagonalisable dans \mathbb{R} . De plus, le système est dit strictement hyperbolique si ses valeurs propres sont toutes distinctes.

Definition 3.2. On dit qu'un système de la forme (S) est symétrisable si pour tout $U \in D$ on a $S(U)$ symétrique définie positive tel que $S(U)A(U)$ soit symétrique.

Proposition 3.10. Un système de la forme (S) est hyperbolique si et seulement si il est symétrisable.

Pour ces définitions et théorèmes, voir [5].

Remarque 3.1. La proposition précédente n'est pas vrai en dimension 2. En effet, en dimension deux on a un système de la forme

$$\partial_t(U) + A_1(U)\partial_x(U) + A_2(U)\partial_y(U) = S(U),$$

et les deux matrices n'ont aucune raison d'être diagonalisable dans la même base. On doit alors passer par ce qu'on appelle un couple entropie/flux d'entropie de Lax pour récupérer l'hyperbolicité. Nous en toucherons quelques mots dans la dernière partie de ce rapport, lorsque l'on traitera le cas où le système initial est à trois dimensions, et donc que le système limite est de dimension 2.

Ici le domaine des état admissibles est $D := \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et $U = (\alpha_1 \bar{\rho}_1, \alpha_2 \bar{\rho}_2, \rho_m u_m)$

Théorème 3.2. Le système limite (28) est hyperbolique, et s'écrit sous la forme

$$\partial_t(V) + A(V)\partial_x(V) = S(V),$$

avec, en posant pour $k = 1, 2$ $v_k := \alpha_k \bar{\rho}_k$:

$$V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ u_m \end{pmatrix},$$

$$A(V) = \begin{pmatrix} u_m & 0 & v_1 \\ 0 & u_m & v_2 \\ \frac{a_1^2}{v_1+v_2} & \frac{a_2^2}{v_1+v_2} & u_m \end{pmatrix}$$

et

$$S(V) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\kappa_m^0 \frac{u_m}{v_1 + v_2} \end{pmatrix}.$$

avec comme spectre pour $A(V)$:

$$\left\{ u_m, u_m - \sqrt{\frac{p_m}{4\rho_m}}, u_m + \sqrt{\frac{p_m}{4\rho_m}} \right\}.$$

Démonstration. On a :

$$\begin{cases} \partial_t(\alpha_1 \bar{\rho}_1) + \partial_x(\alpha_1 \bar{\rho}_1 u_m) = 0 & (1) \\ \partial_t(\alpha_2 \bar{\rho}_2) + \partial_x(\alpha_2 \bar{\rho}_2 u_m) = 0 & (2) \\ \partial_t(\rho_m u_m) + \partial_x(\rho_m u_m^2 + p_m) = -\kappa_m^0 u_m & (3) \end{cases}$$

On utilisera la relation obtenue en effectuant (1) + (2) :

$$\partial_t(\rho_m) + \partial_x(\rho_m u_m) = 0$$

On a :

$$\begin{aligned} \partial_t(\rho_m u_m) + \partial_x(\rho_m u_m^2 + p_m) &= \partial_t(\rho_m)(u_m) + \partial_t(u_m)(\rho_m) + \partial_x(\rho_m u_m)(u_m) + (\rho_m u_m)\partial_x(u_m) + \partial_x(p_m) \\ &= u_m(\partial_t(\rho_m) + \partial_x(\rho_m u_m)) + \rho_m \partial_t(u_m) + (\rho_m u_m)\partial_x(u_m) + \partial_x(p_m) \\ &= \rho_m \partial_t(u_m) + (\rho_m u_m)\partial_x(u_m) + \partial_x(p_m). \end{aligned}$$

On a donc :

$$\rho_m \partial_t(u_m) + (\rho_m u_m)\partial_x(u_m) + \partial_x(p_m) = -\kappa_m^0 u_m,$$

donc

$$\partial_t(u_m) + u_m \partial_x(u_m) + \frac{1}{\rho_m} \partial_x(p_m) = -\frac{\kappa_m^0 u_m}{\rho_m}$$

donc

$$\partial_t(u_m) + \partial_x\left(\frac{u_m^2}{2}\right) + \frac{1}{\rho_m} \partial_x(p_m) = -\kappa_m^0 \frac{u_m}{\rho_m}.$$

Soit $v_1 := \alpha_1 \bar{\rho}_1$, $v_2 := \alpha_2 \bar{\rho}_2$. On a donc :

$$\begin{cases} \partial_t(v_1) + \partial_x(v_1 u_m) = 0 & (1) \\ \partial_t(v_2) + \partial_x(v_2 u_m) = 0 & (2) \\ \partial_t(\rho_m u_m) + \partial_x(\rho_m u_m^2 + p_m) = -\kappa_m^0 u_m & (3) \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} \partial_t(v_1) + u_m \partial_x(v_1) + v_1 \partial_x(u_m) = 0 & (1) \\ \partial_t(v_2) + u_m \partial_x(v_2) + v_2 \partial_x(u_m) = 0 & (2) \\ \partial_t(u_m) + u_m \partial_x(u_m) + \frac{1}{\rho_m} \partial_x(p_m) = -\kappa_m^0 \frac{u_m}{\rho_m} & (3). \end{cases}$$

Or, on a :

$$\begin{aligned}\rho_m &= v_1 + v_2 \\ p_m &= a_1^2 v_1 + a_2^2 v_2\end{aligned}$$

Finalement on a :

$$\partial_t V + A(V) \cdot \partial_x(V) = S(V),$$

avec

$$V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ u_m \end{pmatrix},$$

$$A(V) = \begin{pmatrix} u_m & 0 & v_1 \\ 0 & u_m & v_2 \\ \frac{a_1^2}{v_1+v_2} & \frac{a_2^2}{v_1+v_2} & u_m \end{pmatrix}$$

et

$$S(V) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\kappa_m^0 \frac{u_m}{v_1 + v_2} \end{pmatrix}.$$

Après calculs (une étude du polynôme caractéristique) on trouve :

$$Sp(A(V)) = \left\{ u_m, u_m - \sqrt{\frac{p_m}{4\rho_m}}, u_m + \sqrt{\frac{p_m}{4\rho_m}} \right\}.$$

Donc d'après la proposition 3.10 $A(V)$ est symétrisable sauf dans le cas critique ou $p_m = 0$. D'où le théorème. \square

Remarque 3.2. La définition des états admissibles D est compatible avec la condition : pour $k = 1, 2$ $0 < \alpha_k < 1$. On peut montrer en utilisant l'égalité des pressions et que $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ qu'on a la relation :

$$\alpha_k = \frac{a_k^2 \alpha_k \overline{\rho_k}}{a_1^2 \alpha_1 \overline{\rho_1} + a_2^2 \alpha_2 \overline{\rho_2}}.$$

Remarque 3.3. Soit D une matrice diagonale et P une matrice inversible tel qu $A(V) = P^{-1}DP$. Soit $S_0 := {}^t P P$. Alors S_0 est une matrice permettant de symétriser le système (28). En effet : Soit $X \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Alors :

$$\begin{aligned}{}^t X S_0 X &= {}^t (P X) P X \\ &= \|P X\|^2 \\ &> 0 \text{ car } P \text{ est inversible.}\end{aligned}$$

Donc S_0 est symétrique définie positive. Et on a bien grâce à cette définition $S_0 A$ qui est symétrique.

La remarque suivante donne une expression de S_0 . On s'aperçoit que celle-ci est assez lourde et difficilement manipulable, mais nous verrons dans la dernière partie de ce rapport que l'important est essentiellement son existence et non son expression.

Remarque 3.4. On résout les systèmes linéaires adéquats pour trouver les vecteurs propres de $A(V)$ et donc déterminer une matrice de passage. On trouve pour P^{-1} :

$$S_0(V) := \begin{pmatrix} a_1^2 & v_1 & v_1 \\ a_2^2 & v_2 & v_2 \\ 0 & \sqrt{\frac{p_m}{4\rho_m}} & -\sqrt{\frac{p_m}{4\rho_m}} \end{pmatrix}.$$

On calcul alors :

$$P^{-1} := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{2v_2}{a_1^2 v_2 - a_2^2 v_1} & \frac{2v_2}{a_2^2 v_1 - a_1^2 v_2} & 0 \\ \frac{2a_2^2}{2a_2^2 v_1 - 2a_1^2 v_2} & \frac{2a_1^2}{2a_1^2 v_2 - 2a_2^2 v_1} & \sqrt{\frac{4\rho_m}{p_m}} \\ \frac{2a_2^2}{2a_2^2 v_1 - 2a_1^2 v_2} & \frac{2a_1^2}{2a_1^2 v_2 - 2a_2^2 v_1} & -\sqrt{\frac{4\rho_m}{p_m}} \end{pmatrix}.$$

En multipliant par sa transposée on a :

$$S_0(V) := \frac{1}{4(a_1^2 v_2 - a_2^2 v_1)^2} \begin{pmatrix} 4(v_1^2 + v_2^2) & -2(a_2^2 v_1 + a_1^2 v_2)^2 & -2(a_2^2 v_1 + a_1^2 v_2)^2 \\ -2(a_2^2 v_1 + a_1^2 v_2)^2 & (a_2^2 + a_1^2) + \frac{p_m}{4\rho_m} (a_1^2 v_2 - a_2^2 v_1)^2 & (a_2^2 + a_1^2) - \frac{p_m}{4\rho_m} (a_1^2 v_2 - a_2^2 v_1)^2 \\ -2(a_2^2 v_1 + a_1^2 v_2)^2 & (a_2^2 + a_1^2) - \frac{p_m}{4\rho_m} (a_1^2 v_2 - a_2^2 v_1)^2 & (a_2^2 + a_1^2) + \frac{p_m}{4\rho_m} (a_1^2 v_2 - a_2^2 v_1)^2 \end{pmatrix}.$$

4 Système asymptotique avec prise en compte de la gravité

Nous allons maintenant déterminer un système asymptotique pour le même problème, mais cette fois-ci en tenant compte de la force de gravitation (Cas étudié dans le cadre incompressible dans [3]) i.e. des termes en rouges dans (3). Cela nous ramène donc à revoir les calculs impliquant cette équation.

Tout d'abord, la proposition 3.3 devient :

Proposition 4.1. Sous les hypothèses 2.1 et 2.2, on a :

$$\partial_z p_1 = -\rho k g + 2\epsilon \mu_1^0 \partial_{zz} w_1 + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (29)$$

$$\partial_z p_2 = -\rho k g + 2\epsilon \mu_2^0 \partial_{zz} w_2 + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (30)$$

Démonstration. Reprendre exactement la preuve de 3.3. □

La modification de l'égalité dans 3.3 nous amène à regarder les conséquences sur les propositions qui en découlent. Il se trouve que la seule proposition qui la fait intervenir est la proposition 3.9 qui nous dit :

$$w_I = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{2(\alpha_1 \mu_2^0 + \alpha_2 \mu_1^0)} (\bar{p}_1 - \bar{p}_2) + \mathcal{O}(\epsilon).$$

La prise en compte de la gravité va rajouter un terme dans l'égalité précédente, la question est de savoir quel est son ordre de grandeur. En effet, si cet ordre n'était pas au moins en $\mathcal{O}(\epsilon)$ le corollaire 3.2 disant que $\bar{p}_1 - \bar{p}_2 = \mathcal{O}(\epsilon)$ ne serait plus vrai et alors cela changerait le système final. Nous allons voir que ça n'est pas le cas.

4.1 Établissement du système limite

Nous avons la proposition suivante pour le système asymptotique :

Proposition 4.2. *Le système asymptotique vérifié par le système initial avec prise en compte de la force de gravitation est le même que celui vérifié sans prise en compte, à savoir le système (28).*

La preuve de cette proposition consiste essentiellement à reprendre les calculs de la deuxième partie de ce rapport, le seul problème se pose lorsque l'on démontre la proposition 3.9 qui nous sert à avoir l'estimation en $\mathcal{O}(\epsilon)$ de $\bar{p}_1 - \bar{p}_2$. On doit donc regarder si cette estimation tient toujours lorsque l'on rajoute la gravité.

Proposition 4.3. *On a toujours sous les hypothèse de la section 3 l'approximation $\bar{p}_1 - \bar{p}_2$, en prenant en compte la force de gravitation dans le système initial.*

Démonstration. En reprenant les calculs de la proposition 3.9, on obtient avec le rajout du terme de gravité :

$$(\bar{p}_1 - \bar{p}_2) = \left[\frac{g_0}{\epsilon \alpha_1} \int_0^{\epsilon \alpha_1} \int_z^{\epsilon \alpha_1} \rho_1(s) ds dz - \frac{g_0}{\epsilon \alpha_2} \int_{\epsilon \alpha_1}^{\epsilon} \int_{\epsilon \alpha_1}^z \rho_2(s) ds dz \right] + 2 \left(\frac{\mu_1^0 \alpha_2 + \mu_2^0 \alpha_1}{\alpha_1 \alpha_2} \right) w_I + \mathcal{O}(\epsilon).$$

Montrons donc : $\frac{g_0}{\epsilon \alpha_1} \int_0^{\epsilon \alpha_1} \int_z^{\epsilon \alpha_1} \rho_1(s) ds dz - \frac{g_0}{\epsilon \alpha_2} \int_{\epsilon \alpha_1}^{\epsilon} \int_{\epsilon \alpha_1}^z \rho_2(s) ds dz = \mathcal{O}(\epsilon)$.

C'est équivalent à montrer que $\alpha_2 \int_0^{\epsilon \alpha_1} \int_z^{\epsilon \alpha_1} \rho_1(s) ds dz - \alpha_1 \int_{\epsilon \alpha_1}^{\epsilon} \int_{\epsilon \alpha_1}^z \rho_2(s) ds dz = \mathcal{O}(\epsilon^2)$.

On a :

$$\begin{aligned} \int_{z=0}^{\epsilon \alpha_1} \int_{s=z}^{\epsilon \alpha_1} \rho_1(s) ds dz &= \int_{s=0}^{\epsilon \alpha_1} \int_{z=0}^s \rho_1(s) dz ds \\ &= \int_{s=0}^{\epsilon \alpha_1} \rho_1(s) s ds \end{aligned}$$

De la même manière :

$$\int_{\epsilon \alpha_1}^{\epsilon} \int_{\epsilon \alpha_1}^z \rho_2(s) ds dz = \int_{s=\epsilon \alpha_1}^{\epsilon} \rho_2(s) (s - \epsilon) ds$$

On a donc, en utilisant que $\alpha_i \leq 1$:

$$\left| \alpha_2 \int_0^{\epsilon \alpha_1} \int_z^{\epsilon \alpha_1} \rho_1(s) ds dz - \alpha_1 \int_{\epsilon \alpha_1}^{\epsilon} \int_{\epsilon \alpha_1}^z \rho_2(s) ds dz \right| \leq \left| \int_{s=0}^{\epsilon \alpha_1} \rho_1(s) s ds \right| + \left| \int_{s=\epsilon \alpha_1}^{\epsilon} \rho_2(s) (s - \epsilon) ds \right|$$

en utilisant le fait que les masses volumiques sont bornées :

$$\begin{aligned} &\leq M \left(\left| \int_{s=0}^{\epsilon \alpha_1} s ds \right| + \left| \int_{s=\epsilon \alpha_1}^{\epsilon} (s - \epsilon) ds \right| \right) \\ &\leq 2M\epsilon^2. \end{aligned}$$

On a bien montré que $\bar{p}_1 - \bar{p}_2 = \mathcal{O}(\epsilon)$. □

5 Discussion

5.1 Autour des solutions du système limite

Il s'agit maintenant de discuter autour de la régularité des solutions de notre système final. On dispose dans le cas de systèmes hyperboliques symétrisables de théorèmes d'existence de solutions (c.f [6]) régulières en temps court :

Théorème 5.1. *Soit un système, comme précédemment de la forme :*

$$\begin{cases} \partial_t U + \sum_{k=1}^d \partial_{x_k} f_k(U) = S(U) \\ U(0, \cdot) = U_0 \end{cases} \quad (C)$$

Alors pour S de classe \mathcal{C}^∞ , $s > \frac{d}{2} + 1$ et $U_0 \in H^s(\mathbb{R}^d)$ on a $T' > 0$ ainsi que existence et unicité d'une solution $u \in \mathcal{C}^0([0, T'], H^s(\mathbb{R}^d))$ de (C).

Mais dans le cadre de notre modèle final, [7] nous donne même existence globale de solution régulière, il faut montrer que le système vérifie certaines propriétés supplémentaires (condition de Kawashima, Condition (K), lemmes 2 et 3 p.110.).

5.2 Le cas de la dimension 2

Dans le cadre de la dimension 2, nous avons dit que la proposition 3.10 n'était plus valable, cependant nous gardons la symétrisabilité grâce à la notion de couple entropie/flux d'entropie. Soit un système de la forme :

$$\partial_t(U) + \partial_x(f(U)) = S(U) \quad (C'),$$

où $f : D \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$.

Definition 5.1. *On dit que (η, F) est couple entropie-flux d'entropie pour (C') si $\eta \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ est une fonction strictement convexe (à sens où sa hessienne est symétrique définie positive) et si ${}^t \nabla F(U) = {}^t \nabla(\eta)(U) \nabla(f)(U)$ pour tout U dans Ω .*

Proposition 5.1. *Un système de la forme (C') est symétrisable si et seulement si il admet un couple entropie-flux d'entropie.*

Remarque 5.1. *Pour des compléments et preuves sur ces théorèmes, voir [5].*

L'enjeu est donc de montrer que le système admet un couple entropie-flux d'entropie via des calculs qui resteront valable en dimension 2, c'est là que nous allons introduire l'énergie du système et regarder les équations qu'elle vérifie, car ce sera notre candidat pour l'entropie η .

Théorème 5.2. *On définit $E_m := \frac{(\alpha_1 \bar{\rho}_1 + \alpha_2 \bar{\rho}_2) u_m^2}{2} + a_1^2 \alpha_1 \bar{\rho}_1 + a_2^2 \alpha_2 \bar{\rho}_2$. Elle est appelée énergie associée à (28) et vérifie les propriétés suivantes :*

- E_m est convexe par rapport aux variables ρ_m et $\rho_m u_m$
- E_m vérifie : $\partial_t E_m + \partial_x(u_m E_m) + \partial_x(u_m(a_1^2 \alpha_1 \bar{\rho}_1 + a_2^2 \alpha_2 \bar{\rho}_2)) = -\kappa_m u_m^2 \leq 0$.
- E_m est une entropie d'un couple entropie-flux d'entropie associé à (28), avec comme flux associé $u_m(E_m + a_1^2 \alpha_1 \bar{\rho}_1 + a_2^2 \alpha_2 \bar{\rho}_2)$

Cette énergie et les calculs autour s'étendent lors d'un passage asymptotique de la 3D à la 2D. Cela permet de garder le caractère hyperbolique bien posé de (28) lorsqu'il devient un système 2D.

Références

- [1] Edwige Godlewski and Nicolas Seguin. Modèles hyperboliques d'écoulements complexes dans le domaine de l'énergie. 2011.
- [2] H. Bruce Stewart and Burton Wendroff. Two-phase flow : models and methods. J. Comput. Phys., 56(3) :363–409, 1984.
- [3] Charles Demay and Jean-Marc Hérard. A compressible two-layer model for transient gas-liquid flows in pipes. Contin. Mech. Thermodyn., 29(2) :385–410, 2017.
- [4] J.-F. Gerbeau and B. Perthame. Derivation of viscous Saint-Venant system for laminar shallow water ; numerical validation. Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B, 1(1) :89–102, 2001.
- [5] E Godlewski and P A Raviart. Numerical Approximation of Hyperbolic System of Conservation Laws, volume 118. 01 1998.
- [6] Guy Metivier. Para-differential calculus and applications to the cauchy problem for nonlinear systems. 01 2008.
- [7] B. Hanouzet and R. Natalini. Global existence of smooth solutions for partially dissipative hyperbolic systems with a convex entropy. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 169(2) :89–117, Sep 2003.