



ÉCOLE NORMALE
SUPÉRIEURE DE RENNES

UNIVERSITÉ PIERRE ET
MARIE CURIE

STAGE DE LICENCE DE MATHÉMATIQUES

17 mai au 15 juillet 2016

Initiation à l'algèbre homologique et à la théorie des faisceaux, application à la géométrie algébrique

Auteur :
Nicolas BOULLÉ

Encadrant :
M. Antoine DUCROS

Table des matières

Introduction	2
1 Algèbre commutative	3
1.1 Théorie des anneaux et des modules	3
1.2 Anneaux et modules gradués	5
1.3 Algèbre finie et entière	6
1.4 Extension de corps	7
2 Théorie des catégories et théorie des faisceaux	7
2.1 Théorie des catégories	7
2.2 Faisceaux et préfaisceaux	10
2.3 Suite exacte	11
2.4 Espaces annelés	12
3 Géométrie algébrique	13
3.1 Ensembles algébriques affines	13
3.2 Ensembles algébriques projectifs	17
3.3 Variété algébrique affine	19
3.4 Variété algébrique projective	21
3.5 Dimension des variétés algébriques	22
3.6 Schémas finis et multiplicité	24
4 Cohomologie des faisceaux	27
4.1 Complexe et suite exacte	27
4.2 Cohomologie de Čech	28
4.3 Calculs de groupes de cohomologie	30
4.4 Théorème de Bézout	33

Introduction

La géométrie algébrique est une discipline des mathématiques qui étudie des objets géométriques et les relations algébriques entre ces objets. Historiquement, les grecs sont les premiers à utiliser la géométrie pour répondre à des problèmes algébriques notamment les courbes algébriques comme solutions d'équations. Cependant, la naissance de la géométrie algébrique et de la géométrie différentielle s'effectue plutôt au XVI^e siècle sous l'impulsion de Descartes et Fermat qui introduisent les coordonnées cartésiennes. Celles-ci permettent de résoudre des problèmes d'un point de vue algébrique ou géométrique en donnant un procédé qui traduit les relations entre les points du plan en équations sur les coordonnées. Cette période voit aussi l'introduction intuitive en faible dimension des premiers objets de géométrie algébrique : les courbes et les plans. Ces derniers sont ainsi caractérisés par des équations polynomiales de faible degré. Les problèmes d'intersection de courbes commencent à être étudiés bien que cette notion ne soit pas définie clairement. Ainsi, au XVIII^e siècle, Maclaurin est le premier à conjecturer que le nombre de points d'intersection des courbes $P(x, y) = 0$ et $Q(x, y) = 0$ doit être égal au produit des degrés de ces courbes. Euler s'empare de ce problème mais rencontre des difficultés liées aux racines multiples, points imaginaires et points à l'infini. Vers 1765, Etienne Bézout, sans tenir compte des interrogations d'Euler, démontre le résultat que l'on connaît désormais sous le nom de "théorème de Bézout". Par la suite, la géométrie algébrique se transforme au XIX^e siècle grâce à Desargues qui, s'inspirant de la notion de perspectives, ajoute une "droite à l'infini" au plan réel pour former la géométrie projective. Cette nouvelle géométrie permet de reformuler et de préciser les résultats classiques de géométrie algébrique et notamment le théorème de Bézout. Kronecker est le premier, vers 1860, à donner une définition précise des notions de dimension, variété ou d'irréductibilité qui jusqu'ici n'étaient utilisées qu'en faible dimension avec une approche intuitive. C'est seulement à partir du début du XX^e siècle qu'a lieu la transformation de la géométrie algébrique qui lui donne la forme qu'on lui connaît actuellement. En effet, Poincaré travaille en 1895 sur la topologie algébrique et invente les concepts de complexes et de groupes d'homologies et étudie leurs applications aux variétés algébriques. La géométrie algébrique va petit à petit perdre sa forme intuitive pour une approche plus abstraite motivée par le développement de l'algèbre abstraite et des structures algébriques (groupes, corps, anneaux, ...) au XX^e siècle. A cette époque, il devient fondamental de développer la théorie des corps commutatifs pour généraliser les raisonnements classiques sur les corps réel et complexe. En effet, dans leurs travaux de 1882, Dedekind et Weber font l'hypothèse que le corps sur lequel ils travaillent est algébriquement clos. C'est ainsi qu'en 1910, Steinitz définit le degré de transcendance et montre l'existence de la clôture algébrique. Ces résultats auront un vrai impact en géométrie algébrique car le théorème des zéros de Hilbert (ou Nullstellensatz) a pour hypothèse le fait que le corps soit algébriquement clos. De plus, la généralisation des théorèmes de géométrie algébrique conduira André Weil à définir les variétés algébriques abstraites en 1946. A la même époque, les liens entre géométrie et algèbre deviennent plus évidents et notamment la correspondance variétés algébriques affines - idéaux de $k[X_1, \dots, X_n]$. En 1950, Zariski munit les variétés algébriques d'une topologie ("topologie de Zariski") qui fait de l'espace un espace quasi-compact mais non séparé en général. La révolution de la géométrie algébrique s'effectue vers 1950 et est initiée par Jean Leray qui introduit les faisceaux et la cohomologie des faisceaux. Ceux-ci sont d'abord utilisés en géométrie analytique par Cartan et Serre qui généralisent les résultats obtenus précédemment. Ainsi, dans son célèbre article *Faisceaux algébriques cohérents* ([Ser55]), Serre étend aux variétés algébriques les résultats de cohomologie des faisceaux (cohomologie de Čech) en se limitant aux faisceaux cohérents. C'est en 1955 que se généralise le recours aux langages des catégories et, en 1957, Grothendieck entreprend un chantier de généralisation de la géométrie algébrique (travaux publiés sous le nom d'*Eléments de Géométrie Algébrique*) en travaillant sur des anneaux commutatifs sans hypothèses supplémentaires. Grothendieck définit ainsi la notion de schéma en utilisant le spectre d'un anneau muni de la topologie de Zariski. Il considère

également comme faisceaux les \mathcal{O}_X -modules quasi-cohérents plus généraux que les faisceaux cohérents introduits par Serre. Le dictionnaire de correspondance géométrie-algèbre prend son sens en associant à chaque point x d'un schéma X , un anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$. Ces différents points de vue se retrouvent lors des raisonnements où l'on possède deux visions duales pour traiter un problème.

1 Algèbre commutative

Dans cette section, on travaille exclusivement sur des anneaux commutatifs, on s'appuiera principalement sur [Duc15] et [Eis95] pour les rappels d'algèbre commutative qui vont suivre. En effet, comme vu dans l'introduction, à cause de la correspondance algèbre-géométrie, il est nécessaire de maîtriser les principaux concepts d'algèbre avant de débiter la géométrie algébrique.

1.1 Théorie des anneaux et des modules

Les notions de base de théorie des anneaux (définitions, intégrité, idéaux, ...) ne sont pas rappelées mais sont disponibles dans le chapitre 0 de [Eis95]. Cette première sous-section a pour vocation d'énoncer les propriétés importantes des idéaux, d'introduire les propriétés universelles du quotient et du localisé et de définir les modules sur des anneaux.

Définition 1.1.1 (Idéal premier). Soit A un anneau, un idéal $I \subset A$ est premier si

1. I est strict c'est-à-dire $I \subsetneq A$.
2. $\forall a, b \in A, ab \in I \Rightarrow a \in I$ ou $b \in I$.

Définition 1.1.2 (Spectre d'un anneau). Soit A un anneau, on appelle spectre de A et on note $\text{Spec}(A)$ l'ensemble des idéaux premiers de A .

Exemple 1.1.3. $\text{Spec}(\mathbb{Z}) = \{(0)\} \cup \{p\mathbb{Z}, p \text{ premier}\}$.

Définition 1.1.4 (Idéal maximal). Soit A un anneau, un idéal $I \subset A$ est maximal si

1. I est strict c'est-à-dire $I \subsetneq A$.
2. Si J est un idéal de A tel que $I \subset J$ alors $I = J$ ou $J = A$.

Proposition 1.1.5. Soient A un anneau et I un idéal de A alors

1. I est premier si et seulement si A/I est intègre.
2. I est maximal si et seulement si A/I est un corps.

Le théorème suivant assure l'existence d'idéaux maximaux dans un anneau non nul et se montre en admettant l'axiome du choix et en utilisant le lemme de Zorn ([AM69], I, corollaire 1.4).

Théorème 1.1.6 (Krull). Soient A un anneau et I un idéal strict de A , il existe un idéal maximal de A contenant I .

Les propositions 1.1.7 et 1.1.8 sont les propriétés universelles du quotient et du localisé. La notion de propriété universelle sera expliquée en section 2.1 avec le lemme 2.1.12 et la remarque 2.1.14.

Proposition 1.1.7 (Propriété universelle du quotient). Soient A et B des anneaux, I un idéal de A et ϕ un morphisme de $A \rightarrow B$, $\exists! \psi : A/I \rightarrow B$ tel que le diagramme suivant commute.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\phi} & B \\ \downarrow \pi & \searrow \psi & \nearrow \\ A/I & & \end{array}$$

Proposition 1.1.8 (Propriété universelle du localisé). Soient A et B des anneaux, S une partie multiplicative de A et ϕ un morphisme de $A \rightarrow B$, $\exists! \psi : S^{-1}A \rightarrow B$ tel que le diagramme suivant commute.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\phi} & B \\ \downarrow \pi & \searrow \psi & \nearrow \\ S^{-1}A & & \end{array}$$

Le prochain lemme est un résultat sur la localisation d'un anneau de polynômes et nous servira par la suite.

Lemme 1.1.9. Soit $P \in k[X]^*$ alors l'anneau $k[X]_{(P)}$ n'est pas un corps.

Démonstration. Posons $Q = 1 + XP$ et supposons que $k[X]_{(P)}$ soit un corps. Alors Q est inversible donc il existe $Q' \in k[X]$ tel que $(1 + XP)Q' = P^n$. Quitte à poser $Q' = P^m Q''$, on peut supposer n minimal et $P \nmid Q''$. De plus, par un argument de degré, $n \geq 1$ et comme P et $1 + XP$ sont premiers entre eux, par lemme de Gauss, $P \mid Q''$ ce qui contredit la minimalité de n . □

Définition 1.1.10 (Idéal de type fini). Un idéal est de type fini s'il est engendré par un nombre fini d'éléments.

Exemple 1.1.11. Soit $x \in \mathbb{R}$, l'idéal $I = \{P \in \mathbb{R}[X], P(x) = 0\}$ est de type fini car $\mathbb{R}[X]$ est principal.

On rappelle la propriété suivante qui sera utilisée par la suite.

Proposition 1.1.12. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et k un corps alors l'anneau $k[X_1, \dots, X_n]$ est factoriel.

Définition 1.1.13 (Anneau noethérien). Un anneau est dit noethérien si tous ses idéaux sont de type fini.

Exemple 1.1.14.

1. Un corps est noethérien car ses idéaux sont triviaux.
2. Un anneau principal est noethérien car ses idéaux sont engendrés par un seul élément.

Les anneaux locaux sont des cas particuliers d'anneaux ayant une importance en géométrie algébrique.

Définition 1.1.15 (Anneau local). Soit A un anneau, il y a équivalence entre

- A possède un unique idéal maximal.
- $A \setminus A^\times$ est un idéal de A .

Si l'une des propositions précédentes est vérifiée on dira que A est local.

Exemple 1.1.16. Soit k un corps, k possède (0) comme unique idéal maximal donc est local.

Définition 1.1.17 (Corps résiduel). Soit A un anneau local d'idéal maximal m , le corps A/m est appelé corps résiduel de A .

Les modules sont un concept qui généralisent les espaces vectoriels car ils sont définis sur des anneaux et non plus sur des corps.

Définition 1.1.18 (Module sur un anneau). Soit A un anneau, un groupe abélien $(M, +)$ est appelé A -module s'il est muni d'une loi $\cdot : A \times M \rightarrow M$ telle que $\forall a, b \in A, \forall x, y \in M$,

1. $a.(x + y) = a.x + a.y$,
2. $(a + b).x = a.x + b.x$,
3. $(ab).x = a.(b.x)$,
4. $1_A.x = x$.

Exemple 1.1.19. Si A est un corps, les A -modules sont en fait les A -espaces vectoriels.

Définition 1.1.20 (Module de type fini). Un A -module M est de type fini si

$$\exists(x_1, \dots, x_n) \in M^n \text{ tel que } M = \sum_{i=1}^n Ax_i.$$

Exemple 1.1.21. \mathbb{Z}^2 est un \mathbb{Z} -module de type fini engendré par $(0, 1)$ et $(1, 0)$.

La notion de produit tensoriel de modules est définie de la même manière que pour les espaces vectoriels et il existe également une propriété universelle correspondante.

Proposition 1.1.22 (Propriété universelle du produit tensoriel de deux modules). Soient M, N et L des A -modules et ϕ un morphisme de $M \times N \rightarrow L$, $\exists! \psi : M \otimes_A N \rightarrow L$ tel que le diagramme suivant commute.

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{\phi} & L \\ \downarrow \pi & \searrow \psi & \\ M \otimes_A N & & \end{array}$$

Remarque 1.1.23. $M \otimes_A N$ est engendré comme A -module par les tenseurs purs $m \otimes n$ où $(m, n) \in M \times N$.

Exemple 1.1.24. Grâce au théorème de Bézout, on montre que si p et q sont premiers entre eux alors $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} = 0$.

1.2 Anneaux et modules gradués

L'utilisation d'anneaux gradués ou de modules gradués et notamment le fait de décaler la graduation est une technique courante utilisée pour le calcul de suites exactes.

Définition 1.2.1 (Anneau gradué). Un anneau R est dit gradué s'il est muni d'une décomposition en somme directe de groupes abéliens : $R = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} R_n$ tel que $\forall i, j \in \mathbb{Z}, R_i R_j \subset R_{i+j}$.

Remarque 1.2.2. Un élément de R_i est dit homogène, s'il est non nul alors l'indice i est unique et est appelé son degré.

Exemple 1.2.3. L'anneau $k[X_0, \dots, X_n]$ est muni naturellement d'une structure d'anneau gradué. En effet, en notant S_d l'espace des polynômes homogènes de degré d , $k[X_0, \dots, X_n] = \bigoplus_{d \in \mathbb{N}} S_d$.

L'exemple précédent définit l'espace vectoriel des polynômes homogènes de degré d et sa dimension est donnée par la proposition ci-dessous.

Proposition 1.2.4. Soient $(n, d) \in \mathbb{N}^2$ alors $\dim_k S_d = \binom{n+d}{n}$.

Démonstration. Comme $S_d = \text{Vect}_k(\{X_0^{\alpha_0} \dots X_n^{\alpha_n}, \alpha_0 + \dots + \alpha_n = d\})$, on introduit $A_n^d = \{(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \llbracket 0, d \rrbracket^n, \alpha_0 + \dots + \alpha_n = d\}$. Ainsi, il est évident que $\dim_k S_d = \text{Card}(A_n^d)$.

L'égalité $\text{Card}(A_n^d) = \binom{n+d}{n}$ se montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. En effet, le cas $n = 0$ est évident et, si $n \in \mathbb{N}$, comme $A_{n+1}^d = \bigcup_{\alpha_{n+1}=0}^d A_n^{d-\alpha_{n+1}}$, en passant aux cardinaux il vient $\text{Card}(A_{n+1}^d) = \sum_{k=0}^d \binom{n+k}{n} = \binom{n+d+1}{n+1}$. La dernière égalité se montre par récurrence en utilisant la formule de Pascal. \square

Définition 1.2.5 (Module gradué). Soit R une k -algèbre graduée, un R -module M est dit gradué s'il est muni d'une décomposition $M = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} M_n$ où les M_n sont des sous- k -espaces vectoriels de M tels que $\forall p, q \in \mathbb{Z}^2, R_p M_q \subset M_{p+q}$.

Remarque 1.2.6. Un morphisme $\phi : M \rightarrow N$ de R -modules gradués est dit homogène de degré d si $\forall n \in \mathbb{N}, \phi(M_n) = N_{d+n}$.

Définition 1.2.7 (Graduation décalée). Soit $M = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} M_n$ un R -module gradué et $d \in \mathbb{Z}$, on appelle R -module gradué décalé le module $M(d) = M$ mais avec la graduation $M(d)_n = M_{d+n}$.

1.3 Algèbre finie et entière

Dans cette sous-section, A désigne un anneau commutatif, la notion d'algèbre sur un anneau généralise celle d'algèbre sur un espace vectoriel.

Définition 1.3.1 (Algèbre sur un anneau). Soit B un A -module. B est une A -algèbre s'il est muni d'une loi de composition interne $\cdot : B \times B \rightarrow B$ bilinéaire.

Définition 1.3.2 (Algèbre finie). Soit B une A -algèbre, on dit que B est finie si B est de type fini comme A -module.

Exemple 1.3.3. \mathbb{C} est une \mathbb{R} -algèbre finie engendrée par 1 et i .

Définition 1.3.4 (Elément entier, Algèbre entière). Soit B une A -algèbre et $x \in B$, on dit que x est entier sur A si l'une des propositions équivalentes suivantes est vérifiée.

- $\exists P \in A[X]$ unitaire tel que $P(x) = 0$.
- La A -algèbre $A[X]$ est finie.
- Il existe une sous-algèbre finie C de B contenant x .

B est entière si $\forall x \in B, x$ est entier sur A .

Exemple 1.3.5. \mathbb{R} est une \mathbb{Q} -algèbre et $\sqrt{2}$ est entier sur \mathbb{Q} car annule le polynôme $X^2 - 2$ mais \mathbb{R} n'est pas entière sur \mathbb{Q} (π n'est pas entier sur \mathbb{Q}).

Lemme 1.3.6. Si $A \subset B$ sont deux anneaux intègres tels que B soit entier sur A alors A est un corps si et seulement si B l'est.

Démonstration. Supposons que A soit un corps. Soit $x \in B^*$, comme x est entier sur A , il existe $n \geq 1$ et $(a_1, \dots, a_n) \in A^n$ tels que $x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$. Or, comme x est non nul, le polynôme $P = X^n + \dots + a_n$ est non nul donc, par intégrité de B , il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $a_p \neq 0$ et $x^p + \dots + a_p = 0$. De plus, $a_p \in A^*$ est inversible. En posant $y = -(x^{p-1} + \dots + a_{p-1})a_p^{-1}$, x est inversible d'inverse y .

Supposons maintenant que B soit un corps, pour $x \in A^* \subset B$, il existe $y \in B^*$ tel que $xy = 1$. Or, y est entier sur A donc il existe $n \geq 1$ et $(a_1, \dots, a_n) \in A^n$ tels que $y^n + a_1 y^{n-1} + \dots + a_n = 0$. De la même manière que précédemment, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $a_p \neq 0$ et $y^p + a_1 y^{p-1} + \dots + a_p = 0$. En multipliant cette dernière égalité par x^{p-1} , on obtient que $y \in A$. \square

1.4 Extension de corps

Les extensions de corps et plus particulièrement les clôtures algébriques permettent d'assurer l'existence de racines de polynômes en augmentant le corps de base.

Définition 1.4.1 (Extension de corps). Soit k un corps, une extension de k est un corps L muni d'un morphisme de corps $i : k \hookrightarrow L$.

Exemple 1.4.2. $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$.

Définition 1.4.3 (Extension finie). Soit $k \hookrightarrow L$ une extension de corps, on dit que L est une extension finie de k si L est un k -espace vectoriel de dimension finie.

Exemple 1.4.4.

1. \mathbb{C} est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 2.
2. \mathbb{R} n'est pas une extension finie de \mathbb{Q} .

Définition 1.4.5 (Extension algébrique). Soit $k \hookrightarrow L$ une extension de corps, $x \in L$ est algébrique sur k s'il est entier sur k , dans le cas contraire x est dit transcendant. L est une extension algébrique de k si tous ses éléments sont algébriques sur k .

Définition 1.4.6 (Clôture algébrique). Soit $k \hookrightarrow L$ une extension algébrique de corps, on dit que L est une clôture algébrique de k si tout polynôme à coefficients dans L de degré supérieur ou égal à 1 admet au moins une racine dans L .

Exemple 1.4.7. \mathbb{C} est une clôture algébrique de \mathbb{R} .

Le théorème suivant assure l'existence et l'unicité de la clôture algébrique d'un corps (ce résultat est disponible chez [Lan02], V, §2, théorème 2.5 et corollaire 2.9).

Théorème 1.4.8 (Steinitz).

1. Tout corps possède une clôture algébrique.
2. Deux clôtures algébriques d'un corps k sont reliées par un isomorphisme laissant invariant les éléments de k .

Remarque 1.4.9. Une clôture algébrique d'un corps k a le même cardinal que k si k est infini et est dénombrable sinon ([Lan02], V, §3).

Notation 1.4.10. Si k est un corps, on note \hat{k} une clôture algébrique de k .

2 Théorie des catégories et théorie des faisceaux

Dans cette section on présente la théorie des faisceaux et des catégories en accord avec [Duc15] et [Gro57]. Cette formalisation permet dans un premier temps de comprendre la notion de propriétés universelles et sera utile en géométrie algébrique pour introduire les variétés algébriques.

2.1 Théorie des catégories

Définition 2.1.1 (Catégorie). Une catégorie \mathbf{C} est une classe d'objets, avec la donnée pour $A, B \in \mathbf{C}$ d'un ensemble $\text{Hom}(A, B)$ et $\forall A, B, C \in \mathbf{C}$, d'une application de composition des morphismes de $\text{Hom}(A, B) \times \text{Hom}(B, C) \rightarrow \text{Hom}(A, C)$ associative et telle que $\forall A \in \mathbf{C}$, il existe $I_A \in \text{Hom}(A, A)$ un élément neutre pour la composition des morphismes.

Exemple 2.1.2. Les catégories usuelles sont désignées par **Ens** : ensemble, **Gp** : groupe, **Ab** : groupe abélien, **Ann** : anneau et **Top** : espace topologique.

Définition 2.1.3 (Catégorie opposée). Soit \mathbf{C} une catégorie, on définit la catégorie opposée de \mathbf{C} : \mathbf{C}^{op} par la catégorie ayant les mêmes objets que \mathbf{C} et où $\forall A, B \in \mathbf{C}^{op}$, $\text{Hom}(A, B)^{op} = \text{Hom}(B, A)$.

Définition 2.1.4 (Foncteur). Soient \mathbf{C} et \mathbf{D} deux catégories, un foncteur covariant $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ est la donnée d'une fonction qui à un objet $A \in \mathbf{C}$ associe un objet $F(A) \in \mathbf{D}$ et d'une fonction qui à un morphisme $u : A \rightarrow B$ de \mathbf{C} associe un morphisme $F(u) : F(A) \rightarrow F(B)$ de \mathbf{D} tel que $F(I_A) = I_{F(A)}$ et $F(u \circ v) = F(u) \circ F(v)$. Un foncteur contravariant de $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ est simplement un foncteur covariant de $\mathbf{C}^{op} \rightarrow \mathbf{D}$.

L'exemple qui suit introduit des foncteurs particuliers appelés foncteurs associés à un objet qui auront une utilité pour la définition de la représentation d'un foncteur.

Exemple 2.1.5.

1. Les foncteurs d'oubli envoient des objets d'une catégorie dans une autre en oubliant certaines propriétés (**Ann** vers **Gp**, **Top** vers **Ens**, ...).
 2. Soit \mathbf{C} une catégorie et $X \in \mathbf{C}$ on appelle foncteur associé à X le foncteur h_X qui envoie un objet $Y \in \mathbf{C}$ sur l'ensemble des morphismes de X vers Y et une flèche $f \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(Y, Y')$ sur l'application $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y')$.
- $$g \quad \mapsto \quad f \circ g$$

Définition 2.1.6 (Propriétés des foncteurs). Soient \mathbf{C} et \mathbf{D} deux catégories, un foncteur covariant $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ est dit fidèle (resp. plein, resp. pleinement fidèle) si

$$\forall X, Y \in \mathbf{C}, \quad \begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y) & \rightarrow & \text{Hom}_{\mathbf{D}}(F(X), F(Y)) \\ f & \mapsto & F(f) \end{array}$$

est injective (resp. surjective, resp. bijective).

Exemple 2.1.7.

1. Le foncteur d'oubli de **Ab** vers **Gp** est pleinement fidèle.
2. Le foncteur d'oubli de **Gp** vers **Ens** est fidèle mais pas plein.

Définition 2.1.8 (Morphisme de foncteurs). Soient \mathbf{C} et \mathbf{D} deux catégories, $F, G : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ deux foncteurs covariants. Un morphisme de foncteurs $\phi : F \rightarrow G$ est la donnée $\forall X \in \mathbf{C}$ d'un morphisme $\phi(X) : F(X) \rightarrow G(X)$ de \mathbf{D} tel que $\forall Y \in \mathbf{C}, \forall f \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$, le diagramme suivant soit commutatif.

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{\phi(X)} & G(X) \\ \downarrow F(f) & & \downarrow G(f) \\ F(Y) & \xrightarrow{\phi(Y)} & G(Y) \end{array}$$

Définition 2.1.9 (Isomorphisme de foncteurs). Soient \mathbf{C} et \mathbf{D} deux catégories, F, G deux foncteurs de $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$, $\phi : F \rightarrow G$ est un isomorphisme s'il existe $\psi : G \rightarrow F$ tel que $\psi \circ \phi = Id_F$ et $\phi \circ \psi = Id_G$. De plus, ϕ est un isomorphisme si et seulement si $\forall X \in \mathbf{C}$, $\phi(X)$ est un isomorphisme.

Définition 2.1.10 (Équivalence de catégories). Soient \mathbf{C} et \mathbf{D} deux catégories et $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$. F est une équivalence de catégorie s'il existe $G : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ tel que $F \circ G \cong Id_{\mathbf{D}}$ et $G \circ F \cong Id_{\mathbf{C}}$.

La définition de la représentation des foncteurs et le lemme 2.1.12 explique l'existence de propriétés universelles.

Définition 2.1.11 (Foncteur représentable). Soit \mathbf{C} une catégorie, un foncteur $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Ens}$ est dit représentable s'il existe un objet $X \in \mathbf{C}$ et un isomorphisme tel que $h_X \cong F$.

Lemme 2.1.12 (Yoneda). Soient \mathbf{C} une catégorie, $X \in \mathbf{C}$, F un foncteur de \mathbf{C} vers \mathbf{Ens} et $\epsilon \in F(X)$. On appelle ϕ_ϵ le morphisme de foncteurs de $h_X \rightarrow F$ défini par, si $f \in h_X(Y)$, $f \mapsto F(f)(\epsilon)$. Soit ψ un morphisme de $h_X \rightarrow F$ alors il existe un unique $\epsilon \in F(X)$ tel que $\psi = \phi_\epsilon$.

Remarque 2.1.13.

1. En fait, $\epsilon = \psi(X)(Id_X)$.
2. On dit que (X, ϵ) est un représentant de F (deux représentants (X, ϵ) et (Y, η) sont canoniquement isomorphes).

Démonstration. On commence par montrer l'unicité. Soit ϵ tel que $\psi = \phi_\epsilon$, alors $\psi(X)(Id_X) = \phi_\epsilon(X)(Id_X) = F(Id_X)(\epsilon) = Id_{F(X)}(\epsilon) = \epsilon$ d'où l'unicité.

Soit $\epsilon = \psi(X)(Id_X)$, il reste à montrer que $\psi = \phi_\epsilon$. Soient $Y \in \mathbf{C}$ et $f \in h_X(Y)$, comme f est un morphisme de foncteurs, le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{array}{ccc} h_X(X) & \xrightarrow{h_X(f)} & h_X(Y) \\ \downarrow \psi(X) & & \downarrow \psi(Y) \\ F(X) & \xrightarrow{F(f)} & F(Y) \end{array}$$

plus, $h_X(f)(Id_X) = f$ et par définition de ϵ , $\psi(X)(Id_X) = \epsilon$. Ainsi, par commutativité du diagramme, $\psi(Y)(f) = F(f) \circ \psi(X)(Id_X) = F(f)(\epsilon) = \phi_\epsilon(Y)(f)$ ce qui achève la démonstration. \square

Remarque 2.1.14. Cette notion est la notion usuelle de propriété universelle dont on donne quelques exemples :

1. Propriété universelle du quotient : Soient A un anneau et I un idéal de A , alors le foncteur $F : \mathbf{Ann} \rightarrow \mathbf{Ens}$ est représentable par le couple $(A/I, \pi : A \rightarrow A/I)$

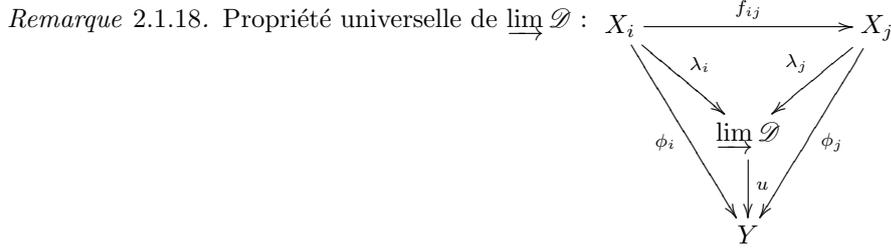
$$B \mapsto \{f \in \text{Hom}(A, B) \text{ tel que } f(I) = 0\}$$
2. Propriété universelle du localisé : Soient A un anneau et S une partie multiplicative de A , le foncteur $F : \mathbf{Ann} \rightarrow \mathbf{Ens}$ est représentable par le couple $(S^{-1}A, \pi : A \rightarrow S^{-1}A)$

$$B \mapsto \{f \in \text{Hom}(A, B) \text{ tel que } \forall s \in S, f(s) \in B^\times\}$$
3. Propriété universelle du produit tensoriel de deux modules : Soient M et N deux A -modules, le foncteur $F : \mathbf{A-Mod} \rightarrow \mathbf{Ens}$ est représentable par le couple $(M \otimes_A N, (m, n) \mapsto m \otimes n)$. Les éléments $m \otimes n$ sont appelés tenseurs purs et engendrent $M \otimes_A N$.
$$P \mapsto \text{Bil}_A(M \times N, P)$$

Définition 2.1.15 (Diagramme). Un diagramme \mathcal{D} dans une catégorie \mathbf{C} est la donnée d'une famille $(X_i)_{i \in I}$ d'objets de \mathbf{C} et pour $i, j \in I$ d'un ensemble $E_{i,j}$ de flèches de $X_i \rightarrow X_j$.

Définition 2.1.16 (Morphisme de diagramme). Soit $Y \in \mathbf{C}$, un morphisme de $\mathcal{D} \rightarrow Y$ est la donnée d'une famille $(a_i : X_i \rightarrow Y)_i$ telle que $\forall f \in E_{i,j}, a_j \circ f = a_i$. On note $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(\mathcal{D}, Y)$ l'ensemble de ces morphismes.

Définition 2.1.17 (Limite inductive/projective). Soit \mathcal{D} un diagramme de \mathbf{C} , si le foncteur $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Ens}$ défini par $Y \mapsto \text{Hom}_{\mathbf{C}}(\mathcal{D}, Y)$ est représentable, son représentant est appelé limite inductive de \mathcal{D} et est noté $\varinjlim \mathcal{D}$. La limite projective de $\mathcal{D} : \varprojlim \mathcal{D}$ est la limite inductive de \mathcal{D} dans \mathbf{C}^{op} .



Exemple 2.1.19.

1. Si $X, Y \in \mathbf{Ens}$, la limite inductive du diagramme $\mathcal{D} : X \rightarrow Y$ existe si et seulement si $X \cup Y$ existe et, dans ce cas, $\varinjlim \mathcal{D} = X \cup Y$.
2. Si $X, Y \in \mathbf{Ens}$, la limite projective du diagramme $\mathcal{D} : X \rightarrow Y$ existe si et seulement si $X \times Y$ existe et, dans ce cas, $\varprojlim \mathcal{D} = X \times Y$.

2.2 Faisceaux et préfaisceaux

La théorie des faisceaux est très utile en géométrie pour traiter des problèmes de recollement (recollement de fonctions C^∞ coïncidant sur leurs intersections, recollement de fonctions holomorphes, ...). Dans cette section, on désignera par X un espace topologique et \mathbf{C} l'une des catégories suivantes : \mathbf{Ens} , \mathbf{Gp} , \mathbf{Ann} , $A\text{-Mod}$ ou $A\text{-Alg}$ (A est un anneau). On commence par définir les préfaisceaux puis on définira la notion plus intéressante mais plus contraignante de faisceaux.

Définition 2.2.1 (Préfaisceau). Soit \mathbf{Ouv}_X la catégorie dont les objets sont les ouverts de X et les flèches les inclusions, un préfaisceau \mathcal{F} est un foncteur contravariant de $\mathbf{Ouv}_X \rightarrow \mathbf{C}$. Soit $U \in \mathbf{Ouv}_X$, on appelle sections de \mathcal{F} sur U les éléments de $\mathcal{F}(U)$ et, si $V \subset U$ et $i : V \hookrightarrow U$, on note $r_{U \rightarrow V} : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$ le morphisme de restriction qui est l'image de i par \mathcal{F} .

Notation 2.2.2. La catégorie des préfaisceaux sur X est notée \mathbf{Pref}_X .

Exemple 2.2.3.

1. Soit E un ensemble, le foncteur $U \mapsto E$ est un préfaisceau appelé préfaisceau constant associé à E .
2. Le foncteur $U \mapsto C^\infty(U, \mathbb{R})$ est un préfaisceau de \mathbb{R} -algèbres.
3. Le foncteur $U \mapsto \mathcal{H}(U, \mathbb{C})$ est un préfaisceau de \mathbb{C} -algèbres.

Définition 2.2.4 (Fibre de \mathcal{F} en x). Soient \mathcal{F} un préfaisceau sur X et $x \in X$, notons \mathcal{V} l'ensemble des voisinages ouverts de x . Le diagramme $\mathcal{D} = ((\mathcal{F}(U))_{U \in \mathcal{V}}, (r_{U \rightarrow V})_{V \subset U})$ admet une limite inductive qui est appelée fibre de \mathcal{F} en x et notée \mathcal{F}_x .

Remarque 2.2.5. Une manière de visualiser \mathcal{F}_x est de la considérer comme le quotient des couples (U, s) , où U est un voisinage ouvert de x et s une section de \mathcal{F} sur U , par la relation $(U, s) \sim (V, t)$ si et seulement si il existe un voisinage W de x dans $U \cap V$ tel que s et t coïncident sur W .

Définition 2.2.6 (Morphisme de préfaisceaux). Si $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathbf{Pref}_X$, un morphisme de $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ est la donnée $\forall U \subset X$ d'un morphisme $\phi_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ tel que le diagramme suivant commute.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\phi_U} & \mathcal{G}(U) \\ \downarrow r_{U \rightarrow V} & & \downarrow r_{U \rightarrow V} \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\phi_V} & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

Exemple 2.2.7.

1. Soit $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un morphisme de préfaisceaux, le préfaisceau $\text{Im}(\phi)$ est défini par $U \mapsto \text{Im}(\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U))$.
2. Avec les mêmes notations que précédemment, on définit le préfaisceau $\text{Ker}(\phi)$ par $U \mapsto \text{Ker}(\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U))$.
3. Si \mathcal{D} est un diagramme de préfaisceaux, $U \mapsto \varinjlim \mathcal{D}(U)$ et $U \mapsto \varprojlim \mathcal{D}(U)$ sont des préfaisceaux.
4. Soient $f : Y \rightarrow X$ continue et \mathcal{G} un préfaisceau sur Y alors $U \mapsto \mathcal{G}(f^{-1}(U))$ définit un préfaisceau noté $f_*\mathcal{G}$.
5. Soient \mathcal{F} préfaisceau sur X et $V \subset Y$. En notant ϵ_V l'ensemble des voisinages ouverts de $f(V)$ et $\mathcal{D}_V = ((\mathcal{F}(U))_{U \in \epsilon_V}, (r_U \rightarrow r_{U'})_{U' \subset U})$ alors $f^{-1}\mathcal{F} : V \mapsto \varinjlim \mathcal{D}_V$ est un préfaisceau.

La notion qui suit est fondamentale car elle permet de savoir à quelles conditions le recollement de sections est possible et parce qu'il est possible de transformer tout préfaisceau en faisceau par la proposition 2.2.10.

Définition 2.2.8 (Faisceau). Un préfaisceau \mathcal{F} sur X est un faisceau si $\forall U \subset X, \forall U = \bigcup_{i \in I} U_i, \forall (s_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i)$ tel que $\forall (i, j), s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}, \exists ! s \in \mathcal{F}(U)$ telle que $\forall i \in I, s|_{U_i} = s_i$.

Exemple 2.2.9.

1. Le préfaisceau $U \mapsto C^\infty(U, \mathbb{R})$ est un faisceau de \mathbb{R} -algèbres.
2. Le préfaisceau $U \mapsto \mathcal{H}(U, \mathbb{C})$ est un faisceau de \mathbb{C} -algèbres.

Proposition 2.2.10 (Faisceautisation). Soit \mathcal{F} un préfaisceau sur X , le foncteur covariant

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Faisc}_X & \rightarrow & \mathbf{Ens} \\ \mathcal{G} & \mapsto & \text{Hom}_{\mathbf{Pref}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \end{array}$$

est représentable par un couple $(\hat{\mathcal{F}}, \pi : \mathcal{F} \rightarrow \hat{\mathcal{F}})$. $\hat{\mathcal{F}}$ est un faisceau appelé le faisceautisé de \mathcal{F} .

La construction explicite du faisceautisé est expliquée chez [Duc15] (III, proposition 3.1.18). On veut maintenant définir des faisceaux image et noyau comme pour le cas des préfaisceaux.

Définition 2.2.11 (Faisceaux noyau et image). Soit $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un morphisme de faisceaux de groupes abéliens.

1. Le noyau de f est défini par le faisceau $\text{Ker}(f) : U \rightarrow \text{Ker}(f(U))$.
2. L'image de f est définie comme le faisceautisé du préfaisceau $\text{Im}(f) : U \rightarrow \text{Im}(f(U))$.

Définition 2.2.12. Un morphisme de faisceaux de groupes abéliens $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ est dit injectif (resp. surjectif) si $\text{Ker}(f) = 0$ (resp. $\text{Im}(f) = \mathcal{G}$).

Par la suite, nous aurons besoin de considérer la somme directe de faisceaux de groupes abéliens. Cette construction est effectuée chez [Gro57] dans un cadre plus général.

2.3 Suite exacte

Dans cette section, A désigne un anneau commutatif, les suites exactes de A -modules sont définies ci-dessous mais il est aussi possible de définir les suites exactes de groupes de la même manière. Les suites exactes imposent une condition sur la composition des morphismes qui permet d'obtenir des renseignements sur les objets étudiés, nous verrons en section 4 une théorie appelée cohomologie qui mesure le défaut d'exactitude des suites.

Définition 2.3.1 (Suite exacte). Soient $(f_i)_{i \in I}$ des morphismes de A -modules et

$$S = \dots \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} \dots$$

une suite de A -modules. S est dite exacte si $\forall i$ tel que $i - 1$ et $i + 1 \in I$, $\text{Im}(f_i) = \text{Ker}(f_{i+1})$.

Exemple 2.3.2. La suite

$$0 \rightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0$$

est exacte si et seulement si f est injective, g est surjective et $\text{Ker}(g) = \text{Im}(f)$.

Définition 2.3.3. Soient B un anneau et F un foncteur de $\mathbf{A} - \mathbf{Mod} \rightarrow \mathbf{B} - \mathbf{Mod}$, on dit que F est exact à gauche (resp. à droite, resp. exact) si

1. $\forall (M, N) \in \mathbf{A} - \mathbf{Mod}$, l'application $\text{Hom}_A(M, N) \rightarrow \text{Hom}_B(F(M), F(N))$ est un morphisme de groupes.
2. F transforme toute suite exacte de la forme $0 \rightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ (resp. $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0$, resp. $0 \rightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0$) en une suite exacte.

Exemple 2.3.4. Si X est un groupe abélien alors le foncteur $h_X : \mathbf{Ab} \rightarrow \mathbf{Ens}$ est exact à gauche.

On définit de la même manière les suites exactes sur les faisceaux de groupes.

Exemple 2.3.5. En notant $\underline{\mathbb{C}}$ le faisceau des fonctions localement constantes sur \mathbb{C} , \mathcal{H} le faisceau des fonctions holomorphes sur \mathbb{C} et d la dérivation alors la suite de faisceaux de \mathbb{C} -espaces vectoriels $0 \rightarrow \underline{\mathbb{C}} \rightarrow \mathcal{H} \xrightarrow{d} \mathcal{H} \rightarrow 0$ est exacte.

2.4 Espaces annelés

Dans cette section on considère un espace topologique X qu'on munit d'un faisceau d'anneaux pour définir les espaces annelés.

Définition 2.4.1 (Espace annelé). Un espace annelé est un couple (X, \mathcal{O}_X) où X est un espace topologique et \mathcal{O}_X un faisceau d'anneaux sur X appelé faisceau structural.

Notation 2.4.2. Dans le cadre des faisceaux structuraux, on utilisera la notation $\Gamma(U, \mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_X(U)$.

Exemple 2.4.3.

1. Une variété différentielle X munie du faisceau des fonctions C^∞ sur X est un espace annelé.
2. Une variété analytique complexe X munie du faisceau des fonctions holomorphes sur X est un espace annelé.

Remarque 2.4.4. Soit (X, \mathcal{O}_X) un espace annelé, par définition de la limite inductive, les fibres $\mathcal{O}_{X,x}$ du faisceau d'anneaux \mathcal{O}_X sont des anneaux.

Définition 2.4.5 (Morphisme d'espaces annelés). Soient (X, \mathcal{O}_X) et (Y, \mathcal{O}_Y) deux espaces annelés. Un morphisme d'espaces annelés est constitué d'une application $\phi : Y \rightarrow X$ continue et de (les 3 données sont équivalentes) :

- un morphisme de faisceaux d'anneaux de $\mathcal{O}_X \rightarrow \phi_* \mathcal{O}_Y$.
- Un morphisme de faisceaux d'anneaux de $\phi^{-1} \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_Y$.

- $\forall U \subset X, \forall V \subset Y$, tels que $\phi(V) \subset U$, un morphisme d'anneaux $\phi_{U,V}^* : \mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_Y(V)$ tel que si $U \subset U', V \subset V'$ et $\phi(V') \subset U'$, le diagramme suivant commute.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X(U) & \xrightarrow{\phi_{U,U'}^*} & \mathcal{O}_Y(V) \\ \downarrow r_{U \rightarrow U'} & & \downarrow r_{V \rightarrow V'} \\ \mathcal{O}_X(U') & \xrightarrow{\phi_{U',V'}^*} & \mathcal{O}_Y(V') \end{array}$$

Définition 2.4.6 (\mathcal{O}_X -module). Soit (X, \mathcal{O}_X) un espace annelé, un \mathcal{O}_X -module \mathcal{M} est un faisceau de groupes abéliens sur X muni $\forall U \subset X$ d'une loi $\cdot : \mathcal{O}_X(U) \times \mathcal{M}(U) \rightarrow \mathcal{M}(U)$ qui fait du groupe $\mathcal{M}(U)$ un $\mathcal{O}_X(U)$ -module.

3 Géométrie algébrique

La géométrie algébrique a vocation à étudier les variétés algébriques en s'appuyant aussi bien sur l'algèbre que la géométrie. Nous commencerons par la définition des variétés algébriques affines et projectives et nous étudierons le Nullstellensatz qui met en évidence les liens entre algèbre et géométrie. Ce théorème nous conduira à nous restreindre aux corps algébriquement clos. Cependant, cette restriction est en fait relativement bénigne car le théorème 1.4.8 permet de plonger chaque corps dans sa clôture algébrique.

3.1 Ensembles algébriques affines

Dans cette section, k désignera un corps quelconque, on commence par définir les ensembles algébriques affines puis la topologie de Zariski qui en fait des variétés. Enfin, on conclut cette section par la démonstration du Nullstellensatz.

Définition 3.1.1 (Ensemble algébrique affine). Soit $S \subset k[X_1, \dots, X_n]$, on appelle ensemble algébrique affine défini par S l'ensemble $V(S) = \{x \in k^n, \forall P \in S, P(x) = 0\}$.

Remarque 3.1.2.

1. L'application V est décroissante : $S \subset S' \Rightarrow V(S') \subset V(S)$,
2. $\bigcap_j V(S_j) = V(\bigcup_j S_j)$.

Définition 3.1.3 (Ouvert standard). Soit $f \in k[X_1, \dots, X_n]$, on appelle ouvert standard associé à f l'ensemble $D(f) = \{x \in k^n, f(x) \neq 0\}$.

Définition 3.1.4 (Topologie de Zariski). La topologie de Zariski est définie comme la topologie induite par les ouverts standards de k^n .

Remarque 3.1.5.

1. Les ouverts standards jouent un rôle important dans la topologie de Zariski car ils forment une base d'ouverts pour cette topologie. Ainsi, tout ouvert de Zariski est réunion finie d'ouverts standards.
2. L'intersection de deux ouverts standards est standard.
3. Les fermés de Zariski sont exactement les ensembles algébriques affines.

Définition 3.1.6 (Idéal d'un ensemble algébrique affine). Soit $V \subset k^n$, on appelle idéal de V et on note $I(V) = \{f \in k[X_1, \dots, X_n], \forall x \in V, f(x) = 0\}$.

Remarque 3.1.7.

1. L'application I est décroissante : $V_1 \subset V_2 \Rightarrow I(V_2) \subset I(V_1)$,
2. Si V est un ensemble algébrique affine alors $V(I(V)) = V$,
3. $I \subset I(V(I))$.

Exemple 3.1.8. Il est possible que $I \neq I(V(I))$.

1. Si $I = (X^2)$ alors $V(I) = \{0\}$ d'où $I(V(I)) = (X) \neq (X^2)$.
2. Si $k = \mathbb{R}$ et $I = (X^2 + Y^2 + 1)$ alors $I(V(I)) = \mathbb{R}[X, Y] \subsetneq I$ (c'est le fait que \mathbb{R} ne soit pas algébriquement clos qui permet le contre-exemple).

Définition 3.1.9 (Algèbre affine). Soit $V \subset k^n$ un ensemble algébrique affine, on appelle algèbre affine de V l'anneau $\Gamma(V) = k[X_1, \dots, X_n]/I(V)$.

Remarque 3.1.10. En fait, si V est un ensemble algébrique affine alors $\Gamma(V)$ est une k -algèbre de type fini.

Définition 3.1.11 (Fonction régulière). Soient $V \subset k^n$, $W \subset k^m$ deux ensembles algébriques affines et $\phi : V \rightarrow W$ qu'on décompose en applications $\phi_i : V \rightarrow k$. ϕ est dite régulière si ses composantes ϕ_i sont polynomiales (ou encore sont dans $\Gamma(V)$). L'ensemble des applications régulières de V dans W est noté $\text{Reg}(V, W)$.

Remarque 3.1.12.

1. La notion de fonction régulière définit un foncteur contravariant Γ de la catégorie des ensembles algébriques affines, munis des applications régulières, vers la catégorie des k -algèbres de type fini réduites, munies des morphismes de k -algèbres. Ceci signifie que si X et Y sont deux ensembles algébriques affines et $\phi : X \rightarrow Y$ un morphisme alors $\phi^* : \Gamma(W) \rightarrow \Gamma(V)$ est un morphisme de k -algèbres et on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\phi} & W \\ \downarrow \pi_V & & \downarrow \pi_W \\ \Gamma(V) & \xleftarrow{\phi^*} & \Gamma(W) \end{array}$$

2. En fait, nous verrons avec le théorème 3.1.26 que lorsque k est algébriquement clos Γ est une équivalence de catégories.

Définition 3.1.13 (Irréductibilité). Soit $X \neq \emptyset$ un espace topologique, il y a équivalence entre

- si $X = F \cup G$, où F et G sont des fermés alors $X = F$ ou $X = G$,
- si U et V sont des ouverts tels que $U \cap V = \emptyset$ alors $U = \emptyset$ ou $V = \emptyset$.

On dit alors que X est irréductible.

Exemple 3.1.14. Si k est infini alors l'espace affine k^n est irréductible.

Le théorème 3.1.15 ([Per95], I, théorème 3.6) permet de décomposer un ensemble algébrique affine en union d'irréductibles.

Théorème 3.1.15 (Décomposition en irréductibles). Soit V un ensemble algébrique affine. V s'écrit de manière unique $V = \bigcup_i V_i$ où les V_i sont des ensembles algébriques affines irréductibles tels que $V_i \neq V_j$. Les V_i sont appelées composantes irréductibles de V .

L'objectif est maintenant de démontrer le théorème qui suit et qui aura un impact important par la suite notamment grâce à la proposition 3.1.23 qui souligne le lien algèbre-géométrie en géométrie algébrique.

Théorème 3.1.16 (Nullstellensatz faible). *Si k est un corps algébriquement clos et $I \subsetneq k[X_1, \dots, X_n]$ alors $V(I) \neq \emptyset$.*

La proposition suivante est une variante du Nullstellensatz faible qui sera utilisée pour sa démonstration dont la preuve est issue de [AM69] (V, exercice 18).

Proposition 3.1.17. *Soit k un corps et A une k -algèbre de type fini. Si A est un corps alors A est une extension algébrique finie de k .*

Démonstration. Soit (x_1, \dots, x_n) une famille génératrice de A , la proposition se montre par récurrence sur $n \geq 1$. Si $n = 1$ c'est évident, posons donc $n > 1$ et considérons $K = \text{Frac}(k[x_1]) = k(x_1)$. Par double inclusion, $A = K[x_2, \dots, x_n]$ et par propriété de récurrence au rang $n - 1$, A est une extension algébrique finie de K .

Il reste à prouver que A est algébrique sur k . Comme A est algébrique sur K , il existe $P_2, \dots, P_n \in K[X]$ tels que $\forall i, P_i(x_i) = 0$. Notons f le produit des dénominateurs des P_i . Ainsi, les coefficients des P_i appartiennent à $B = k[x_1]_{(f)}$. Par définition des P_i , x_2, \dots, x_n sont entiers sur B donc l'algèbre engendrée par ces éléments aussi, c'est-à-dire A est entière sur B . De plus, comme A est un corps, par lemme 1.3.6, B est un corps. Nous allons maintenant montrer que K est algébrique sur k , pour cela, supposons par l'absurde que x_1 soit transcendant sur k . On a alors un isomorphisme $k[x_1] \cong k[X]$ et il existe $P \in k[X]$ tel que $B \cong k[X]_{(P)}$. Ceci contredit le fait que B soit un corps (lemme 1.1.9). Ainsi, A est une extension algébrique de K qui est une extension algébrique de k ce qui conclut la preuve. \square

Corollaire 3.1.18. *Si k est algébriquement clos, les idéaux maximaux de $k[X_1, \dots, X_n]$ sont exactement ceux de la forme $(X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n)$ où $(a_1, \dots, a_n) \in k^n$.*

Démonstration. Soit m un idéal maximal de $k[X_1, \dots, X_n]$, notons $A = k[X_1, \dots, X_n]/m$ la k -algèbre finie engendrée par les $\overline{X_i}$. A est un corps car m est maximal donc par proposition 3.1.17, A est une extension algébrique finie de k . Or, k est algébriquement clos donc $A = k$. Posons pour $1 \leq i \leq n$, $a_i = \overline{X_i} \in k$ et remarquons que $(X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n) \subset m$. Soit $P \in m$, par divisions euclidiennes dans $k[X_1, \dots, X_n]$, P s'écrit sous la forme $P = (X_1 - a_1)Q_1(X_1, \dots, X_n) + \dots + (X_n - a_n)Q_n(X_n) + Q(a_1, \dots, a_n)$. Or $Q(a_1, \dots, a_n) = P - (X_1 - a_1)Q_1(X_1, \dots, X_n) + \dots + (X_n - a_n)Q_n(X_n) \in m$ donc est nul car sinon cela contredirait le fait que m soit strict. Ainsi $m = (X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n)$. Réciproquement, si $(a_1, \dots, a_n) \in k^n$, l'idéal $(X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n)$ est maximal car $k[X_1, \dots, X_n]/(X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n) = k$. \square

Démonstration du Nullstellensatz faible. Soit I un idéal strict de $k[X_1, \dots, X_n]$, par théorème 1.1.6 il existe un idéal maximal $m \subset k[X_1, \dots, X_n]$ contenant I . Or, par corollaire 3.1.18, cet idéal maximal est de la forme $(X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n)$. Ainsi, pour tout $P \in I$, $P(a_1, \dots, a_n) = 0$ d'où $(a_1, \dots, a_n) \in V(I)$. \square

Définition 3.1.19 (Radical d'un idéal). Soit I un idéal de A , on définit le radical de I par $\text{rac}(I) = \{x \in A \text{ tel que } \exists r \in \mathbb{N}, x^r \in I\}$.

Exemple 3.1.20. Si $I = (X_1^2) \subset k[X_1, \dots, X_n]$ alors $\text{rac}(I) = (X_1)$.

Théorème 3.1.21 (Nullstellensatz fort). *Soit I un idéal de $k[X_1, \dots, X_n]$ alors $I(V(I)) = \text{rac}(I)$.*

La démonstration du Nullstellensatz fort utilise le Nullstellensatz faible et est inspirée de [CL13] (III, corollaire 3.25) et [Per95] (I, théorème 4.3).

Démonstration. L'inclusion $\text{rac}(I) \subset I(V(I))$ est évidente. Comme $k[X_1, \dots, X_n]$ est noethérien, il existe P_1, \dots, P_m tels que $I = (P_1, \dots, P_m)$, notons $R = k[X_1, \dots, X_n]$. Soit $P \in I(V(I))$, nous allons montrer que l'idéal $IR_{(P)}$ engendré par I dans $R_{(P)}$ est égal à $R_{(P)} = (1)$. Dans un premier temps, posons $J = (P_1, \dots, P_m, 1 - TP) \subset k[X_1, \dots, X_n, T]$. Alors $V(J) = \emptyset$ car, si $(x_1, \dots, x_n, t) \in V(J)$ alors $(x_1, \dots, x_n) \in V(I)$ et donc annule P . Par conséquent (x_1, \dots, x_n, t) ne peut annuler $1 - TP$. Ainsi, par théorème 3.1.16, $J = k[X_1, \dots, X_n, T] = (1)$ ce qui implique l'existence de $Q_1, \dots, Q_m, A \in k[X_1, \dots, X_n, T]$ tels que $1 = \sum_{i=1}^m P_i Q_i + A(1 - TP)$. Or $R_{(P)} \cong k[X_1, \dots, X_n, T]/(1 - TP)$ donc l'égalité précédente équivaut à $1 = \sum_{i=1}^m \frac{P_i Q_i}{P^r}$ ce qui prouve que $P \in \text{rac}(I)$. \square

Définition 3.1.22 (Idéal radical). Un idéal I d'un anneau commutatif est dit radical lorsqu'il est égal à son radical $\text{rac}(I)$.

Proposition 3.1.23 (Correspondance idéal premier - ensemble irréductible). *Supposons k algébriquement clos, les applications $W \mapsto I_V(W)$ et $I \mapsto V(I)$ sont des bijections décroissantes réciproques entre les ensembles algébriques affines et les idéaux radicaux de $\Gamma(V)$. De plus, on a les équivalences suivantes :*

1. W est irréductible $\Leftrightarrow I_V(W)$ est premier $\Leftrightarrow \Gamma(W)$ est intègre.
2. W est un singleton $\Leftrightarrow I_V(W)$ est maximal $\Leftrightarrow \Gamma(W) = k$.
3. W est une composante irréductible de $V \Leftrightarrow I_V(W)$ est un idéal premier minimal de $\Gamma(V)$.

Démonstration. Il est facile de voir que ces applications sont des bijections réciproques grâce au théorème 3.1.21.

1. On montre seulement la première équivalence car la deuxième repose sur la proposition 1.1.5. Supposons que W soit irréductible, soit $fg \in I_V(W)$, alors $W = V(I_V(W))$ (remarque 3.1.7) et $I_V(W) \subset V(fg) = V(f) \cup V(g)$. Ainsi, on peut écrire $W = (W \cap V(f)) \cup (W \cap V(g))$ et l'irréductibilité de W donne le résultat.

Réciproquement, si $I_V(W)$ est premier, en écrivant $W = W_1 \cup W_2$ et en supposant $W_i \neq W$ alors $I_V(W) \subsetneq I_V(W_i)$ (car sinon cela contredirait l'injectivité de $W \rightarrow I_V(W)$). Par conséquent, si $f_i \in I_V(W_i) \setminus I_V(W)$, $f_1 f_2 \in I_V(W)$ ce qui fournit une contradiction.

2. La deuxième assertion découle de la proposition 1.1.5. Pour la première équivalence, on construit une bijection entre les points de V et les idéaux maximaux de $\Gamma(V)$. Si $x \in V$, on note $\chi_x : \Gamma(V) \rightarrow k$ le morphisme de k -algèbres défini par $f \mapsto f(x)$. $\text{Ker}(\chi_x)$ est un idéal maximal de $\Gamma(V)$ (car k est un corps) qu'on note m_x et, par définition, $m_x = I_V(\{x\})$.
3. Par théorème 3.1.15, les composantes irréductibles sont maximales donc, par la première assertion et par décroissance de $W \rightarrow I_V(W)$ (remarque 3.1.7), les composantes irréductibles de V correspondent aux idéaux premiers minimaux de $\Gamma(V)$. \square

Le théorème suivant ([Per95], V, théorème 5.1) est un premier résultat sur l'intersection de deux polynômes et un premier pas vers le théorème de Bézout (théorème 4.4.1) que nous étudierons en section 4.4.

Théorème 3.1.24. *Soient $F, G \in k[X, Y]$, non nuls et sans facteur commun alors $V(F) \cap V(G)$ est fini.*

Démonstration. F et G sont sans facteur commun donc ils sont premiers entre eux dans $k[X, Y]$ et on peut montrer qu'ils le sont aussi dans $k(X)[Y]$. Ainsi, comme $k(X)[Y]$ est principal, par théorème de Bézout, il existe $d \in k[X]$ et $A, B \in k[X, Y]$ tels que $d = AF + BG$. Soit $(x, y) \in V(F) \cap V(G)$, on déduit de l'égalité précédente que $d(x) = 0$. Or d a un nombre fini de racines donc $\{x \in k, (x, y) \in V(F) \cap V(G)\}$ est fini. La démonstration se conclut par un raisonnement similaire sur y . \square

Théorème 3.1.25. *Soient $F, G \in k[X, Y]$, deux polynômes non nuls et sans facteur commun alors $k[X, Y]/(F, G)$ est un k -espace vectoriel de dimension finie.*

Démonstration. Par le même raisonnement que pour le théorème 3.1.24, il existe $D_1 \in k[X]$, $D_2 \in k[Y]$ et $A_1, A_2, B_1, B_2 \in k[X, Y]$ tels que $D_1 = A_1F + B_1G$ et $D_2 = A_2F + B_2G$. On note d_1 (resp. d_2) le degré de D_1 (resp. D_2) et $\overline{X^i Y^j}$ l'image de $X^i Y^j$ dans le quotient. Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, il suffit de montrer que $\overline{X^n Y^m} \in \text{Vect}_k(\overline{X^i Y^j}, i < d_1, j < d_2)$. Par division avec reste dans $k[X]$, il existe $Q_1, R_1 \in k[X]$ avec $\deg(R_1) < d_1$ tels que $X^n = Q_1 D_1 + R_1$. De la même manière, $Y^m = Q_2 D_2 + R_2$. Or, comme D_1 et D_2 appartiennent à l'idéal (F, G) , en passant au quotient on a $\overline{X^n Y^m} = \overline{R_1 R_2} \in \text{Vect}_k(\overline{X^i Y^j}, i < d_1, j < d_2)$. \square

Le théorème suivant découle du théorème 3.1.21 ([Per95], I, théorème 6.13).

Théorème 3.1.26. *On suppose k algébriquement clos. Le foncteur Γ induit alors une équivalence de catégories entre la catégorie des ensembles algébriques affines, munis des applications régulières, et la catégorie des k -algèbres de type fini réduites, munies des morphismes de k -algèbres.*

3.2 Ensembles algébriques projectifs

Cette section s'inspire de [Per95] et [Per] pour définir l'espace projectif et les propriétés relatives qui forment la géométrie projective. Ainsi, la plupart des notions et résultats vus dans la précédente section admettent un analogue en géométrie projective. Cette nouvelle géométrie est utile car elle permet par exemple d'étudier les intersections de droites à l'infini ou, plus généralement, de prendre en compte les phénomènes à l'infini. Dans cette section, on fixe k un corps et E un k -espace vectoriel de dimension $n + 1$ ($n \in \mathbb{N}$).

Définition 3.2.1 (Espace projectif associé à E). L'espace projectif associé à E est défini comme le quotient $(E \setminus \{0\})/\mathcal{R}$ où $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists \lambda \in k^*, y = \lambda x$. Cet espace est noté $\mathbb{P}(E)$, n est appelé dimension de $\mathbb{P}(E)$ et $p : E \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}(E)$ désigne la projection canonique.

Remarque 3.2.2. L'espace projectif $\mathbb{P}(E)$ est en fait l'ensemble des droites vectorielles de E .

Notation 3.2.3. On pose $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}^n(k) = \mathbb{P}(k^{n+1})$.

Il est très facile de passer de l'espace affine à l'espace projectif associé par projection mais il est également possible d'effectuer l'opération inverse. En effet, on commence par munir E d'une base de sorte que, si $x \in E$, x s'écrit (x_0, \dots, x_n) et on considère H l'hyperplan vectoriel d'équation $x_0 = 0$. Alors, en notant \overline{H} la projection de H dans \mathbb{P}^n et $U = \mathbb{P}^n \setminus \overline{H}$, l'application $\phi : U \rightarrow k^n$ est une bijection qui permet d'identifier U et k^n .

$$\begin{aligned} \phi : U &\rightarrow k^n \\ \bar{x} &\mapsto (x_1/x_0, \dots, x_n/x_0) \end{aligned}$$

Après avoir étudié les ensembles algébriques affines et défini l'espace projectif, il est naturel d'introduire les ensembles algébriques projectifs. On commencera par noter (x_0, \dots, x_n) les coordonnées de \mathbb{P}^n et considérer des polynômes homogènes (selon la remarque 1.2.2) de $k[X_0, \dots, X_n]$. En effet, la nullité éventuelle de l'évaluation des polynômes en un point \bar{x} de \mathbb{P}^n

n'est définie que si les polynômes sont homogènes car elle dépend du système de coordonnées homogènes choisi.

Cependant, pour P un polynôme quelconque de $k[X_0, \dots, X_n]$ et $\bar{x} \in \mathbb{P}^n$, on dit que \bar{x} est un zéro de P si $\forall \lambda \in k^*, P(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = 0$. De plus, si $P = P_0 + \dots + P_d$ où P_i est homogène de degré i alors $P(\bar{x}) = 0$ si et seulement si $\forall i, P_i(x) = 0$.

Définition 3.2.4 (Ensemble algébrique projectif). Soit $S \subset k[X_0, \dots, X_n]$, on appelle ensemble algébrique projectif défini par S l'ensemble $V_{\mathbb{P}}(S) = \{x \in \mathbb{P}^n, \forall P \in S, P(x) = 0\}$.

Exemple 3.2.5.

1. $V_{\mathbb{P}}(\{0\}) = \mathbb{P}^n$.
2. Soit $x \in \mathbb{P}^n$, $\{x\}$ est un ensemble algébrique projectif car $\{x\} = V_{\mathbb{P}}(X_1 - x_1 X_0, \dots, X_n - x_n X_0)$.

Remarque 3.2.6.

1. $V_{\mathbb{P}}$ est décroissante.
2. Une intersection quelconque et une union finie d'ensembles algébriques projectifs sont encore des ensembles algébriques projectifs. Les ensembles algébriques projectifs sont donc des fermés d'une topologie dite de Zariski.

Définition 3.2.7 (Ouvert standard). Soit $f \in k[X_0, \dots, X_n]$ homogène, on appelle ouvert standard associé à f l'ensemble $D^+(f) = \{x \in \mathbb{P}^n, f(x) \neq 0\}$.

Définition 3.2.8 (Anneau gradué associé à un ensemble algébrique projectif). Soient V un ensemble algébrique projectif de \mathbb{P}^n et $I_{\mathbb{P}}(V)$ l'idéal associé. L'anneau associé à V est défini par $\Gamma_h(V) = k[X_0, \dots, X_n]/I_{\mathbb{P}}(V)$ et la graduation naturelle passe au quotient.

Définition 3.2.9 (Cône d'un ensemble algébrique projectif). Soit $V \subset \mathbb{P}^n$, on définit le cône de V par $C(V) = p^{-1}(V) \cup \{0\}$ où p désigne la projection de $k^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^n$.

Remarque 3.2.10. Le cône d'un ensemble algébrique projectif est utile car il permet de ramener un problème projectif à une question affine. Par exemple, si $I \subsetneq k[X_0, \dots, X_n]$ est un idéal homogène et $V = V_{\mathbb{P}}(I)$ alors $C(V) = V(I) \subset k^{n+1}$.

Comme pour les ensembles algébriques affines, il existe un idéal naturel associé aux ensembles algébriques projectifs.

Définition 3.2.11 (Idéal d'un ensemble algébrique projectif). Soit $V \subset \mathbb{P}^n$, l'idéal associé à V est défini par $I_{\mathbb{P}}(V) = \{P \in k[X_0, \dots, X_n], \forall x \in V, P(x) = 0\}$.

Exemple 3.2.12.

1. $I_{\mathbb{P}}(\mathbb{P}^n) = (0)$.
2. $I_{\mathbb{P}}(\emptyset) = k[X_0, \dots, X_n]$.

Remarque 3.2.13. Les propriétés de l'idéal associé à un ensemble algébrique projectif sont analogues à celles d'un ensemble algébrique affine.

1. $I_{\mathbb{P}}$ est décroissante.
2. Soit $V \subset \mathbb{P}^n$ un ensemble algébrique projectif alors $V_{\mathbb{P}}(I_{\mathbb{P}}(V)) = V$.
3. Si I est un idéal de $k[X_0, \dots, X_n]$ alors $I \subset I_{\mathbb{P}}(V_{\mathbb{P}}(I))$.

On ne rappelle pas la définition et les propriétés d'irréductibilité des ensembles algébriques projectifs qui sont l'analogie du cas affine. On énonce maintenant le Nullstellensatz projectif dont la démonstration repose sur le Nullstellensatz fort (théorème 3.1.21).

Théorème 3.2.14 (Nullstellensatz projectif). *On suppose que k est algébriquement clos, soient I un idéal homogène de $k[X_0, \dots, X_n]$ et $V = V_{\mathbb{P}}(I)$. Alors*

1. $V_{\mathbb{P}}(I) = \emptyset \Leftrightarrow (X_0, \dots, X_n) \subset \text{rac}(I)$.
2. Si $V_{\mathbb{P}}(I) \neq \emptyset$ alors $I_{\mathbb{P}}(V_{\mathbb{P}}(I)) = \text{rac}(I)$.

Démonstration. Le cas $I = k[X_0, \dots, X_n]$ est trivial, on suppose donc $I \neq k[X_0, \dots, X_n]$ alors, en notant $V = V_{\mathbb{P}}(I)$ et en appliquant le Nullstellensatz fort à $C(V) = V(I) \subset k^{n+1}$ (remarque 3.2.10), $V_{\mathbb{P}}(I) = \emptyset$ si et seulement si $C(V) = \{0\}$ ce qui équivaut à $\text{rac}(I) = (X_0, \dots, X_n)$ (car $I(\{0\}) = (X_0, \dots, X_n)$).

Le deuxième point se démontre aussi facilement. En effet, si $V = V_{\mathbb{P}}(I) \neq \emptyset$ alors $I_{\mathbb{P}}(V) = I(C(V)) = I(V(I)) = \text{rac}(I)$ par Nullstellensatz fort. \square

Les deux opérations définies ci-dessous permettent de faire le lien entre affine et projectif en homogénéisant ou en déshomogénéisant un polynôme.

Définition 3.2.15 (Opérations \flat et \sharp). Les opérations \flat et \sharp permettent respectivement de déshomogénéiser et d'homogénéiser un polynôme.

1. \flat est le morphisme surjectif de $k[X_0, \dots, X_n] \rightarrow k[X_1, \dots, X_n]$ défini par $P(X_0, \dots, X_n) \mapsto P_{\flat}(X_1, \dots, X_n) = P(1, X_1, \dots, X_n)$. On s'intéressera essentiellement au cas où le polynôme de base P est homogène.
2. \sharp est l'application de $k[X_1, \dots, X_n] \rightarrow k[X_0, \dots, X_n]$ définie par :
 - si Q est un polynôme de degré d non nul alors $Q^{\sharp}(X_0, \dots, X_n) = X_0^d Q(\frac{X_1}{X_0}, \dots, \frac{X_n}{X_0})$.
 Q^{\sharp} est alors un polynôme homogène.
 - si $Q = 0$ alors $Q^{\sharp} = 0$.

Remarque 3.2.16.

1. Si $Q \in k[X_1, \dots, X_n]$, $Q = (Q^{\sharp})_{\flat}$.
2. Si $P \in k[X_0, \dots, X_n]^*$ est homogène alors $P = X_0^r (P_{\flat})^{\sharp}$ où $r = \sup\{i \in \mathbb{N}, X_0^i | P\}$.

3.3 Variété algébrique affine

Dans cette section et à partir de maintenant, le corps de base k est supposé algébriquement clos. Avant de définir les variétés algébriques, on souhaite munir les ensembles algébriques affines d'une structure d'espace annelé. Pour cela, on se donne V un ensemble algébrique affine quelconque et on cherche à munir V d'un faisceau structural \mathcal{O}_V (aussi appelé faisceau des fonctions régulières sur V) défini sur les ouverts de V . De plus, comme la proposition 3.1.23 fournit une correspondance l'ensemble algébrique affine V et l'algèbre des fonctions régulières associé $\Gamma(V)$, il est naturel de demander $\mathcal{O}_V(V) = \Gamma(V)$. Le faisceau structural est défini sur les ouverts standards $D(f)$ car ceux-ci forment une base de la topologie de Zariski (remarque 3.1.5).

Définition 3.3.1 (Préfaisceau structural d'un ensemble algébrique affine). Soit V un ensemble algébrique affine, le préfaisceau structural associé à V est défini par : $\forall f \in \Gamma(V)^*$, $\Gamma(D(f), \mathcal{O}_V) = \Gamma(V)_f$.

Le lemme suivant assure le fait que le faisceau structural soit bien défini.

Lemme 3.3.2. *Soit V un ensemble algébrique affine, si un ouvert a deux écritures $D(f) = D(g)$ alors $\Gamma(V)_f = \Gamma(V)_g$.*

Démonstration. La preuve se fait par double-inclusion. On suppose donc $D(f) \subset D(g)$ et on veut montrer que $\Gamma(V)_g = \Gamma(V)_f$. Par remarque 3.1.2, $V(g) \subset V(f)$ donc $f|_{V(g)} = 0$. Ainsi, par théorème 3.1.21, il existe $n \in \mathbb{N}$ et $h \in \Gamma(V)$ tels que $f^n = gh$. Soit $\frac{u}{g^i} \in \Gamma(V)_g$, sa restriction à $D(f)$ s'écrit $\frac{uh^i}{g^i h^i} = \frac{uh^i}{f^n} \in \Gamma(V)_f$. L'autre inclusion se traite de la même manière. \square

Le théorème suivant, démontré chez [Per95] (III, vérification 2.4), montre que le préfaisceau défini ci-dessus est en fait un faisceau.

Théorème 3.3.3. *Soit V un ensemble algébrique affine alors son préfaisceau structural associé est un faisceau.*

Remarque 3.3.4.

1. Dans la définition précédente, $\Gamma(D(f), \mathcal{O}_V)$ désigne $\mathcal{O}_V(D(f))$ en accord avec la notation 2.4.2 et $\Gamma(V, \mathcal{O}_V) = \Gamma(V)$.
2. En fait l'opération $\mathcal{O}_V \rightarrow \Gamma(\mathcal{O}_V) = \Gamma(V)$ se généralise par la définition du foncteur global

$$\Gamma : \mathbf{Faisc}_X \rightarrow \mathbf{Ab}$$
 qui commute aux sommes directes et est exact à gauche : il

$$\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}(X)$$

transforme toute suite exacte de faisceaux de groupes abéliens $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \xrightarrow{\pi} \mathcal{H} \rightarrow 0$ en une suite exacte $0 \rightarrow \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{G}(X) \xrightarrow{\pi} \mathcal{H}(X)$ mais π n'est pas forcément surjectif.

Définition 3.3.5 (Variétés algébriques affines). Une variété algébrique affine est un espace annelé isomorphe à un espace annelé (V, \mathcal{O}_V) où V est un ensemble algébrique affine et \mathcal{O}_V son faisceau structural.

On énonce le lemme suivant qui affirme que les ouverts standards sont naturellement des ensembles algébriques affines ([Per95], III, proposition 3.3).

Lemme 3.3.6. *Soient V un ensemble algébrique affine et $f \in \Gamma(V)$ alors $(D(f), \mathcal{O}_{V|D(f)})$ est une variété algébrique affine.*

Exemple 3.3.7. $GL_n(\mathbb{C})$ est une variété algébrique affine car c'est un ouvert standard $D(\det)$ dans l'espace affine $M_n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{n^2}$.

Les fibres du faisceau structural d'une variété algébrique affine sont des anneaux locaux.

Proposition 3.3.8. *Soient X une variété algébrique affine et $x \in X$ alors $\mathcal{O}_{X,x}$ est une k -algèbre locale d'idéal maximal $m_{X,x} = \{f \in \mathcal{O}_{X,x}, f(x) = 0\}$ et $\mathcal{O}_{X,x}/m_{X,x} \cong k$.*

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{O}_{X,x}$, par définition des fibres, $f(x)$ est bien définie. Introduisons $\pi : \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow k$ le morphisme d'anneaux surjectif qui envoie x sur $f(x)$. Comme k est un corps, $m_{X,x} = \text{Ker}(\pi)$ est maximal. De plus, si $f \in \mathcal{O}_{X,x} \setminus m_{X,x}$, f est inversible dans $\mathcal{O}_{X,x}$ (car si $f = \overline{(U, g)}$, $x \in D_U(g)$ et g est inversible dans $\Gamma(D_U(g), \mathcal{O}_U)$ donc f l'est aussi dans $\mathcal{O}_{X,x}$). \square

On va maintenant définir une classe de faisceaux de modules sur les variétés algébriques affines. Soient V une variété algébrique affine et $A = \Gamma(V, \mathcal{O}_V) = \Gamma(V)$ l'anneau des fonctions régulières associé.

Définition 3.3.9. Soit M un A -module, le \mathcal{O}_V -module \tilde{M} associé à V est défini sur les ouverts standards de V par : si $f \in A$, $\tilde{M}(D(f)) = M_f$ où M_f désigne le localisé de M en f .

Remarque 3.3.10.

1. On vérifie que le préfaisceau défini ci-dessus est bien un faisceau et que l'opération est bien définie (lemme 3.3.2 et théorème 3.3.3).

2. $\tilde{M}(V) = M$.
3. $\tilde{A} = \mathcal{O}_V$.

La proposition suivante est démontrée dans [Per95] (III, proposition 7.3).

Proposition 3.3.11. *Le foncteur $\sim: \mathbf{A} - \mathbf{Mod} \rightarrow \mathcal{O}_V - \mathbf{Mod}$ est exact et commute aux sommes directes et aux produits tensoriels.*

Définition 3.3.12 (Faisceau quasi-cohérent). Un \mathcal{O}_V -module est dit quasi-cohérent s'il est isomorphe à un \mathcal{O}_V -module du type \tilde{M} .

3.4 Variété algébrique projective

Dans cette section, on se fixe V un ensemble algébrique projectif de \mathbb{P}^n qu'on veut munir, de manière analogue à la précédente section, d'un faisceau structural et d'une structure de variété algébrique.

Par la suite, si R est un anneau gradué, et $f \in R$ homogène de degré d alors $R_{(f)}$ désigne le sous-anneau de R_f formé des éléments g/f^r de degré 0 (c'est-à-dire tels que $\deg(g/f^r) = \deg(g) - rd = 0$).

Définition 3.4.1 (Anneau associé à un ensemble algébrique projectif). Soit $V \subset \mathbb{P}^n$ un ensemble algébrique projectif et $I_{\mathbb{P}}(V)$ l'idéal associé. L'anneau associé à V est l'anneau quotient gradué $\Gamma_h(V) = k[X_0, \dots, X_n]/I_{\mathbb{P}}(V)$.

Définition 3.4.2. Le faisceau structural associé à V est défini sur les ouverts standards de V par : si $f \in \Gamma_h(V)$ est homogène de degré strictement positif alors $\Gamma(D^+(f), \mathcal{O}_V) = \Gamma_h(V)_{(f)}$.

Définition 3.4.3 (Variété algébrique projective). Une variété algébrique projective est un espace annelé isomorphe à un espace annelé (V, \mathcal{O}_V) où V est un ensemble algébrique projectif et \mathcal{O}_V le faisceau structural associé.

Par la suite, il sera utile de pouvoir recouvrir \mathbb{P}^n par des ouverts particuliers appelés ouverts affines.

Définition 3.4.4 (Ouvert affine). Soit X une variété algébrique affine ou projective, un ouvert de X est dit affine si c'est une variété algébrique affine.

Cette définition est très pratique dans le cas des variétés algébriques de \mathbb{P}^n car les ouverts $D^+(f)$ sont affines comme le montre la proposition qui suit ([Per95], III, proposition 11.8). Ceci nous permet de recouvrir une variété algébrique projective par des ouverts affines.

Proposition 3.4.5. *Soit $f \in k[X_0, \dots, X_n]$ homogène de degré strictement positif alors $D^+(f)$ est un ouvert affine de \mathbb{P}^n .*

De la même manière que pour la définition 3.3.9, on définit un faisceau de modules sur les variétés algébriques projectives. Soient X une variété algébrique projective et $R = \Gamma_h(X)$ l'anneau associé.

Définition 3.4.6 (Faisceau de modules sur les variétés algébriques projectives). Soit M un R -module gradué, le \mathcal{O}_X -module associé à X est défini sur les ouverts standards de X par : si $f \in R$ est homogène de degré strictement positif alors $\tilde{M}(D^+(f)) = M_{(f)}$.

Remarque 3.4.7.

1. Le préfaisceau défini ci-dessus est en fait un faisceau et l'opération est bien définie.

2. $\tilde{R} = \mathcal{O}_X$.

On a également la proposition suivante ([Per95], III, proposition 9.3) analogue à la proposition 3.3.11 :

Proposition 3.4.8. *Le foncteur $\sim: \mathbf{R} - \mathbf{Mod} \rightarrow \mathcal{O}_X - \mathbf{Mod}$ est exact et commute aux sommes directes et aux produits tensoriels.*

La section 1.2 introduit les anneaux et modules gradués. Nous allons nous appuyer dessus pour définir des faisceaux quasi-cohérents associés à des modules décalés.

Définition 3.4.9. Soient X une variété projective et $R = \Gamma_h(X)$, on note $\mathcal{O}_X(d)$ le faisceau associé au module décalé $R(d)$ et défini par $\mathcal{O}_X(d) = \widetilde{R(d)}$.

Exemple 3.4.10. Si $X = \mathbb{P}^n$ et $S = k[X_0, \dots, X_n]$ alors $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d) = \widetilde{S(d)}$.

Ces faisceaux seront très utilisés par la suite et notamment dans la section 4.3 où nous calculerons leurs sections globales.

3.5 Dimension des variétés algébriques

La notion de dimension d'une variété algébrique n'échappe pas à la correspondance algèbre-géométrie. De plus, celle-ci se rapproche de l'intuition que nous possédons en petite dimension d'une courbe ou d'une surface.

Définition 3.5.1 (Chaîne de parties d'un ensemble). Soit X un ensemble, une chaîne de parties de X de longueur n est une suite $X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq \dots \subsetneq X_n$.

Définition 3.5.2 (Dimension de Krull). Soit A un anneau, on appelle dimension de Krull de A et on note $\dim_K A$ la borne supérieure des longueurs des chaînes d'idéaux premiers de A (égale à $-\infty$ si $A = \{0\}$).

Définition 3.5.3 (Dimension d'un espace topologique). Soit X un espace topologique, on appelle dimension de X et on note $\dim X$ la borne supérieure des longueurs des chaînes de parties fermées irréductibles de X .

Remarque 3.5.4. La dimension d'une variété est le sup des dimensions de ses composantes.

Exemple 3.5.5.

1. k^n est de dimension n .
2. \mathbb{P}^n est de dimension n .

La proposition suivante, qui est une conséquence immédiate de la proposition 3.1.23, fait le lien entre la dimension de Krull d'un anneau et la dimension topologique dans le cadre d'une variété algébrique affine.

Proposition 3.5.6. *Soit V une variété algébrique affine alors $\dim V = \dim_K \Gamma(V)$.*

Dans le cadre des espaces vectoriels, un hyperplan est défini par une équation linéaire et est de codimension 1. Le théorème 3.5.10 s'inspire de cette propriété et en donne une analogie pour les variétés algébriques affines. La proposition ci-dessous élimine deux cas particuliers.

Proposition 3.5.7. *Soit V une variété algébrique affine de dimension d et $f \in \Gamma(V)$,*

1. $V(f) = \emptyset \Leftrightarrow f \in \Gamma(V)^\times$.

2. $V(f)$ contient une composante irréductible $\Leftrightarrow f$ est diviseur de zéro.

Démonstration.

1. Supposons $V(f) = \emptyset$ (dans V) et notons I l'idéal radical définissant V . Soit g un relevé de f dans $k[X_1, \dots, X_n]$. Alors, dire que $V(f) = \emptyset$ signifie que $V(I + (g)) = \emptyset$ (dans k^n). Ainsi, par théorème 3.1.16, $(I + (g)) = k[X_1, \dots, X_n]$ ce qui implique l'inversibilité de g modulo I c'est-à-dire en tant que fonction de $V \rightarrow k$ donc $f \in \Gamma(V)^\times$. Réciproquement, si f est inversible dans $\Gamma(V)$ alors il existe $g \in \Gamma(V)$ tel que $fg = 1$. Or, $V(f) \subset V(fg) = V(1) = \emptyset$.
2. Si f est un diviseur de 0 alors il existe $g \in \Gamma(V)$ tel que $fg = 0$. Ainsi, $V = V(fg) = V(f) \cup V(g)$ et, si V_i est une composante irréductible de V alors $V_i = (V(f) \cap V_i) \cup (V(g) \cap V_i)$ donc $V_i \subset V(f)$ ou $V_i \subset V(g)$. Or, comme $V(g) \neq V$, $V(f)$ contient au moins une composante irréductible.

Supposons que $V(f)$ contienne V_i alors, si on prend $g \in \Gamma(V)$ non nul sur V mais nul sur $\bigcup_{j \neq i} V_j$ (cela est possible d'après [Per95], I, remarque 2.2) on a le résultat. □

Définition 3.5.8 (Variété équidimensionnelle). Une variété algébrique X est dite équidimensionnelle si toutes ses composantes irréductibles ont même dimension.

Exemple 3.5.9. Une variété algébrique irréductible est équidimensionnelle.

Théorème 3.5.10 (Hauptidealsatz). Soit V une variété algébrique affine équidimensionnelle de dimension n et $f \in \Gamma(V)$ non inversible et non diviseur de zéro. Alors $V(f)$ est une variété algébrique affine équidimensionnelle de dimension $n - 1$.

Ce théorème est démontré chez [Mum88] (I, §7, théorème 2). Le corollaire qui suit se démontre par récurrence sur r .

Corollaire 3.5.11. Soient V une variété algébrique affine équidimensionnelle de dimension n et $f_1, \dots, f_r \in \Gamma(V)$. Si W est une composante irréductible de $V(f_1, \dots, f_r)$ alors $\dim W \geq n - r$.

Les résultats précédents trouvent une analogie dans le cadre projectif. En effet, on peut se ramener au cas affine pour démontrer le cas projectif grâce à la notion de cône d'un ensemble algébrique projectif (définition 3.2.9) et plus particulièrement au fait que le cône contient toujours au moins l'origine.

Théorème 3.5.12 (Hauptidealsatz projectif). Soient $V \subset \mathbb{P}^n$ une variété algébrique projective irréductible et $f \in \Gamma_h(V)$ homogène non constant.

1. Toute composante irréductible de $V(f)$ est de codimension 1.
2. Si $\dim V > 0$ alors $V(f) \neq \emptyset$.

Corollaire 3.5.13. Soient $V \subset \mathbb{P}^n$ une variété algébrique projective irréductible et $f_1, \dots, f_r \in \Gamma_h(V)$ homogènes non constants.

1. Si W est une composante irréductible de $V(f_1, \dots, f_r)$ alors $\text{codim} W \leq r$.
2. Si $\dim V \geq r$ alors $V(f_1, \dots, f_r) \neq \emptyset$.

3.6 Schémas finis et multiplicité

Dans la section 4.4, nous énoncerons un théorème sur l'intersection des courbes. Pour cela, nous avons besoin de définir la multiplicité d'une courbe en un point pour en arriver à la notion de multiplicité de deux courbes en un point (définitions 3.6.13 et 3.6.17). En fait, la définition que nous donnerons généralise celle de la multiplicité des racines d'un polynôme.

Définition 3.6.1 (Multiplicité d'une courbe en un point). Soient F un polynôme de $k[X, Y]$ et $P = (x_P, y_P) \in k^2$. Soit $F = F_0 + \dots + F_d$ la décomposition de F en polynômes homogènes (F_i est homogène de degré i). On appelle multiplicité de F en $(0, 0)$ et on note $\mu_{(0,0)}(F) = \inf\{i, F_i \neq 0\}$. La multiplicité de F en P est définie comme la multiplicité de $F(X + x_P, Y + y_P)$ en $(0, 0)$ et est notée $\mu_P(F)$. De plus, si F est sans facteur multiple, cet entier désigne aussi la multiplicité de la courbe $C = V(F)$ en P .

Le problème de cette définition est que rien n'empêche la multiplicité de dépendre du choix des coordonnées. Nous allons voir que, grâce au théorème suivant et au corollaire 3.6.4, la multiplicité d'une courbe en un point est une propriété intrinsèque de la courbe et ne dépend pas du choix des coordonnées.

Définition 3.6.2 (Fonction de Hilbert-Samuel). Soient A un anneau local noethérien et k son corps résiduel, on appelle fonction de Hilbert-Samuel de A la fonction définie par

$$\chi_A^m : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \quad . \\ n \mapsto \dim_k(A/m^n)$$

Le théorème suivant donne une définition très générale de la multiplicité (la démonstration est disponible chez [ZS75], VIII, §10).

Théorème 3.6.3. *Pour n assez grand, la fonction de Hilbert-Samuel de A est un polynôme de degré $d = \dim_K A$ dont le coefficient dominant est un entier de la forme $\frac{\mu_A}{d!}$. On appelle μ_A la multiplicité de A .*

En pratique, le corollaire ci-dessous ([Per95], V, proposition 4.6) suffit pour les propositions qui suivent et montre que la multiplicité de la courbe en un point (selon la définition 3.6.1) est en fait la multiplicité de son anneau local en ce point.

Corollaire 3.6.4. *Soit $F \in k[X, Y]$, on note $F = F_r + \dots + F_p$ sa décomposition en polynômes homogènes. Soient $P = (0, 0) \in k^2$ tel que $r = \mu_P(F)$, $\mathcal{O}_{k^2, P}$ l'anneau local de k^2 en P , $m = m_P$ son idéal maximal, $A = \mathcal{O}_{k^2, P}/(F)$ et \bar{m} son idéal maximal. Alors, pour n assez grand, $\dim_k A/\bar{m}^n = rn - \frac{r(r-1)}{2}$.*

Après avoir défini la multiplicité d'une courbe en un point, il paraît naturel de vouloir définir la multiplicité d'intersection de deux courbes. Pour cela, nous introduisons les schémas finis qui nous permettront, toujours à l'aide de la structure d'espace vectoriel des anneaux locaux, de définir cette multiplicité. Conformément aux sections précédentes, on suppose k algébriquement clos. En effet, certains des résultats qui suivent reposent fortement sur le Nullstellensatz.

Définition 3.6.5 (Schéma fini). Un schéma fini (Z, \mathcal{O}_Z) est un espace annelé où Z est un ensemble fini muni de la topologie discrète et où $\forall P \in X$, $\mathcal{O}_Z(\{P\})$ est une k -algèbre locale de dimension finie (comme k -espace vectoriel). Cette dimension est appelée multiplicité de Z au point P et notée $\mu_P(Z)$.

Proposition 3.6.6. *Soit (Z, \mathcal{O}_Z) un schéma fini alors, $\forall V \subset Z$, $\Gamma(V, \mathcal{O}_Z) = \prod_{P \in V} \mathcal{O}_{Z, P}$.*

Le résultat suivant est issu de [Per95] (VI, proposition 1.6).

Théorème 3.6.7. *Soient X une variété algébrique affine irréductible et $R = \Gamma(X)$. Soient I un idéal de R , $Z = V(I)$, $i : Z \hookrightarrow X$ et $\mathcal{F} = \widetilde{R/I}$. Soit $D(f)$ un ouvert standard de X alors,*

1. *Si $D(f) \cap Z = \emptyset$ alors $\Gamma(D(f), \mathcal{F}) = 0$.*
2. *Si $D(f) \cap Z = \{x\}$ alors $\Gamma(D(f), \mathcal{F}) = \mathcal{O}_{X,x}/I\mathcal{O}_{X,x}$.*
3. *Si $D(f) \cap Z = \{x_1, \dots, x_n\}$ alors $\Gamma(D(f), \mathcal{F}) = \prod_{i=1}^n \mathcal{O}_{X,x_i}/I\mathcal{O}_{X,x_i}$.*
4. *Z est fini si et seulement si R/I est une k -algèbre finie et on définit un faisceau \mathcal{O}_Z sur Z par : pour $U \subset Z$, $\Gamma(U, \mathcal{O}_Z) = \prod_{x \in U} \mathcal{O}_{X,x}/I\mathcal{O}_{X,x}$.*

Remarque 3.6.8. L'espace annelé (Z, \mathcal{O}_Z) défini ci-dessus est un schéma fini.

Démonstration. Comme le localisé commute avec le quotient, $\Gamma(D(f), \mathcal{F}) = (R/I)_f = R_f/IR_f$.

1. Comme $D(f) \cap Z = \emptyset$, $f(Z) = 0$ donc $f \in I(V(I)) = \text{rac}(I)$ par théorème 3.1.21 (k est supposé algébriquement clos). Ainsi, $\exists r \in \mathbb{N}$, tel que $f^r \in I$. Or, dans l'anneau quotient R_f/IR_f , cet élément est inversible et nul donc l'anneau est trivial.
2. Par proposition 3.1.23, x correspond à l'idéal maximal $m_x \subset R$. Or, comme $x \in D(f)$, $f \notin m_x$ donc, par correspondance des idéaux, m_x correspond à un idéal $m_x R_f$ maximal dans R_f . De plus, comme $x \in Z$, $I \subset m_x$ donc par correspondance des idéaux, m_x définit un idéal maximal $\widetilde{m_x R_f}$ de R_f/IR_f et comme l'intersection $D(f) \cap Z$ est réduite à un point, cet idéal est l'unique idéal maximal de R_f/IR_f . Ainsi, cet anneau est local donc égal à son localisé et $R_f/IR_f = (R_f/IR_f)_{\widetilde{m_x R_f}} = R_{m_x}/IR_{m_x}$.
3. D'après [Bou06] (II, proposition 2), $\exists f_1, \dots, f_r \in R$ tels que $\forall i$, $f_i(x_i) = 0$ et $\forall j \neq i$, $f_i(x_j) \neq 0$. Alors, $x_i \in D(f f_i)$ mais $\forall j \neq i$, $x_i \notin D(f f_j)$. On va calculer $\Gamma(D(f), \mathcal{F})$ en recouvrant $D(f)$ par les $D(f f_i)$ et des $D(g_j)$ qui n'intersectent pas Z . Ceci nous construit un morphisme injectif

$$\Gamma(D(f), \mathcal{F}) \rightarrow \prod_{i=1}^n \Gamma(D(f f_i), \mathcal{F}) \times \prod_j \Gamma(D(g_j), \mathcal{F}). \quad (3.1)$$

Les anneaux $\Gamma(D(g_j), \mathcal{F})$ sont nuls par la première assertion du théorème. De plus, les intersections $D(f f_i) \cap D(f f_j)$ sont vides si $i \neq j$ par définition des f_i donc comme \mathcal{F} est un faisceau il y a bien recollement des sections sur les sections globales de $\Gamma(D(f), \mathcal{F})$. Ainsi, le morphisme défini ci-dessus est un isomorphisme et on conclut par la deuxième assertion du théorème.

4. D'après la remarque 3.1.7, $I \subset I(V(I))$ donc $\dim_k \Gamma(Z) = \dim_k R/I(Z) \leq \dim_k R/I < \infty$ et par lemme 3.6.9, Z est fini. Réciproquement, si on suppose Z fini, par lemme 3.6.9, $\Gamma(Z)$ est un k -espace vectoriel de dimension finie. De plus, par l'assertion 3 du théorème, $R/I = \Gamma(D(1), \mathcal{F}) = \prod_{x \in Z} \mathcal{O}_{X,x}/I\mathcal{O}_{X,x}$. Ainsi, $\Gamma(Z)$ est produit d'anneaux locaux et ceux-ci sont égaux à k (car Z est fini) donc $\forall x \in Z$, l'idéal maximal de l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}/I\mathcal{O}_{X,x}$ est nilpotent. Ainsi, $\mathcal{O}_{X,x}/I\mathcal{O}_{X,x}$ est de dimension fini ([Per95], VI, lemme 1.7) donc R/I aussi. □

Lemme 3.6.9. *Avec les notations du théorème 3.6.7, $\Gamma(Z)$ est un k -espace vectoriel de dimension finie si et seulement si Z est fini.*

Démonstration. On commence par supposer que $\Gamma(Z)$ est de dimension finie, par définition, $\Gamma(Z) \cong k[X_1, \dots, X_n]/I(Z)$. Notons \overline{X}_i l'image de X_i dans le quotient. Comme $\Gamma(Z)$ est de dimension finie, $\exists s \in \mathbb{N}, \forall 1 \leq i \leq n, \exists (a_{0,i}, \dots, a_{s,i}) \in k^n$ tel que $a_{s,i}\overline{X}_i^s + \dots + a_{0,i} = 0$ ($1, X_i, \dots, X_i^s$ sont liés). Ainsi, si $u = (x_1, \dots, x_n) \in Z, \forall 1 \leq i \leq n, a_{s,i}x_i^s + \dots + a_{0,i} = 0$. Or cette équation n'a qu'un nombre fini de racines donc $\{x_i, (x_1, \dots, x_n) \in Z\}$ est fini ce qui implique que Z soit fini.

On fait maintenant l'hypothèse que Z est fini ($Z = \{u_1, \dots, u_r\}$), alors le morphisme $\phi : k[X_1, \dots, X_n] \rightarrow k^r$ défini par $\phi(F) = (F(u_1), \dots, F(u_r))$ se relève en une injection de $\Gamma(Z) \hookrightarrow k^r$ ce qui conclut la preuve. \square

Corollaire 3.6.10. *Soient $F, G \in k[X, Y]$ sans facteur commun et $Z = V(F, G)$ (fini d'après le théorème 3.1.24). On pose $R = k[X, Y]$ et $I = (F, G)$. On munit Z d'une structure d'espace annelé grâce au théorème 3.6.7. Alors (Z, \mathcal{O}_Z) est un schéma fini, $\forall P \in Z, \mathcal{O}_{Z,P} = \mathcal{O}_{k^2,P}/(F, G)$ et $k[X, Y]/(F, G) \cong \prod_{P \in Z} \mathcal{O}_{k^2,P}/(F, G) = \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z)$.*

Démonstration. Ce corollaire découle du point 4 du théorème 3.6.7 : par définition de $\mathcal{F} = \widetilde{R/I}$, $\Gamma(Z, \mathcal{O}_Z) = \Gamma(X, \mathcal{F}) = R/I = k[X, Y]/(F, G) = \prod_{P \in Z} \mathcal{O}_{k^2,P}/(F, G)$. \square

Remarque 3.6.11. Le corollaire précédent n'est plus vrai si k n'est pas algébriquement clos. Si $k = \mathbb{R}$ et $(F, G) = (X^2 + 1, Y)$ alors d'une part $\mathbb{R}[X, Y]/(X^2 + 1, Y) \cong \mathbb{R}[X]/(X^2 + 1) \cong \mathbb{C}$ et d'autre part, $V(F, G) = \emptyset$ car $X^2 + 1$ est irréductible sur \mathbb{R} donc on aurait $\mathbb{C} \cong (0)$ ce qui est absurde.

On donne ci-dessous une vérification explicite du corollaire 3.6.10 dans le cas de deux polynômes de $\mathbb{C}[X, Y]$.

Exemple 3.6.12. Soient $(F, G) = (X - Y, Y^4 - 1) \in \mathbb{C}[X, Y]^2$, les points d'intersection de F et G sont donnés par l'ensemble $V(F, G) = \{(1, 1), (-1, -1), (i, i)(-i, -i)\}$. Or, $\mathbb{C}[X, Y]/(F, G) \cong \mathbb{C}[Y]/(Y^4 - 1) \cong k[\epsilon, \epsilon^2, \epsilon^3]$, en notant ϵ la classe de Y dans le quotient.

De plus, pour déterminer le produit d'espaces vectoriels, prenons par exemple $P = (1, 1)$ et calculons $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,P}/(F, G)$. Alors, $IO_{\mathbb{C}^2,P} = (Y - X, (Y - 1)(Y + 1)(Y - i)(Y + i)) = (Y - X, Y - 1)$ car $(Y + 1), (Y - i)$ et $(Y + i)$ sont inversibles dans $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,P}$. Ainsi, $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,P}/(F, G) \cong \mathbb{C}[Y]/(Y - 1) \cong \mathbb{C}$ d'où $\mathbb{C}[X, Y]/(F, G) \cong k[\epsilon, \epsilon^2, \epsilon^3] \cong \mathbb{C}^4$.

Le corollaire 3.6.10 motive la définition de multiplicité d'intersection de deux polynômes.

Définition 3.6.13 (Multiplicité d'intersection - affine). On définit la multiplicité d'intersection de F et G en P par la multiplicité du schéma (Z, \mathcal{O}_Z) en $P : \mu_P(F, G) = \dim_k \mathcal{O}_{Z,P} = \dim_k \mathcal{O}_{k^2,P}/(F, G)$.

Remarque 3.6.14. Cette définition est cohérente avec la notion intuitive d'intersection. En effet, $\mu_P(F, G) = 0$ si et seulement si $P \notin V(F, G)$ ce qui signifie que les polynômes ne s'intersectent pas au point P .

Le corollaire suivant, conséquence immédiate du corollaire 3.6.10 fournit un moyen de calculer la somme des multiplicités de deux polynômes.

Corollaire 3.6.15. *En conservant les notations du corollaire 3.6.10, il vient*

$$\sum_{P \in V(F, G)} \mu_P(F, G) = \dim_k \prod_{P \in Z} \mathcal{O}_{k^2,P}/(F, G) = \dim_k k[X, Y]/(F, G) = \dim_k \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z).$$

Remarque 3.6.16. La formule a un sens si $P \notin V(F, G)$ car $\mu_P(F, G) = 0$, on a alors

$$\sum_{P \in k^2} \mu_P(F, G) = \dim_k k[X, Y]/(F, G).$$

Dans le cas projectif, on utilise le procédé de déshomogénéisation (défini en section 3.2) pour se ramener à la définition affine.

Définition 3.6.17 (Multiplicité d'intersection - projectif). Soient $F, G \in k[X, Y, T]$ homogènes et $P = (x, y, t) \in \mathbb{P}^2$, on suppose $t = 1$. La multiplicité d'intersection de F et G en P est définie par

$$\mu_P(F, G) = \mu_{(x,y)}(F_b, G_b).$$

4 Cohomologie des faisceaux

Cette section introduit la cohomologie des faisceaux qui est une théorie très utile en géométrie algébrique et joue également un rôle majeur dans d'autres types de géométries (topologie algébrique, géométrie différentielle, géométrie analytique complexe, ...). Nous verrons une application dans la section 4.4 avec le théorème de Bézout.

4.1 Complexe et suite exacte

Nous commençons par approfondir les notions de suites exactes issues de la section 2.3. En effet, dans certains cas, les suites d'objets que l'on étudie (groupes abéliens, A -modules, \mathcal{O}_X -modules, ...) ne sont pas exactes. Par exemple, le foncteur section globale introduit avec la remarque 3.3.4 est exact à gauche mais pas à droite. Pour remédier à cela, on introduit les groupes de cohomologie qui mesurent le défaut d'exactitude des foncteurs et permettent de compléter une suite exacte de faisceaux en suite exacte longue.

Définition 4.1.1 (Complexe). Soit $(A^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ des objets (on utilisera des groupes abéliens, A -modules ou \mathcal{O}_X -modules). Un complexe est une suite $A^* : \dots \rightarrow A^{i-1} \xrightarrow{d^i} A^i \xrightarrow{d^{i+1}} A^{i+1} \rightarrow \dots$ telle que les morphismes d^i (aussi appelés différentielles ou cobords) vérifient $\forall i, d^{i+1} \circ d^i = 0$. Les groupes de cohomologie de A^* sont définis par $H^i(A^*) = \text{Ker}(d^{i+1})/\text{Im}(d^i)$.

Définition 4.1.2 (Morphisme de complexes). Soient A^* et B^* deux complexes munis de leurs différentielles d^i et δ^i . Un morphisme de complexes de $A^* \rightarrow B^*$ est une famille de morphismes (f^i) tels que $\forall i$, le diagramme qui suit soit commutatif.

$$\begin{array}{ccc} A^i & \xrightarrow{d^{i+1}} & A^{i+1} \\ \downarrow f^i & & \downarrow f^{i+1} \\ B^i & \xrightarrow{\delta^{i+1}} & B^{i+1} \end{array}$$

Proposition 4.1.3. Soit $0 \rightarrow A^* \xrightarrow{f} B^* \xrightarrow{g} C^* \rightarrow 0$ une suite exacte de complexes, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, la suite induite $H^n A^* \xrightarrow{\bar{f}^n} H^n B^* \xrightarrow{\bar{g}^n} H^n C^*$ est exacte.

Démonstration. Les morphismes $f^n : A^n \rightarrow A^{n+1}$ et $g^n : B^n \rightarrow B^{n+1}$ se relèvent en des morphismes $\bar{f}^n : \text{Ker}(d^{n+1})/\text{Im}(d^n)$ et $\bar{g}^n : \text{Ker}(\delta^{n+1})/\text{Im}(\delta^n)$ qui préservent l'exactitude sur les groupes de cohomologie □

Théorème 4.1.4. Soit $0 \rightarrow A^* \xrightarrow{f} B^* \xrightarrow{g} C^* \rightarrow 0$ une suite exacte de complexes, il existe des morphismes $\partial^n : H^n C^* \rightarrow H^{n+1} A^*$ tels que la suite longue ci-dessous soit exacte :

$$\dots \rightarrow H^{n-1} C^* \xrightarrow{\partial^{n-1}} H^n A^* \xrightarrow{\bar{f}^n} H^n B^* \xrightarrow{\bar{g}^n} H^n C^* \xrightarrow{\partial^n} H^{n+1} A^* \rightarrow \dots$$

Démonstration. Pour construire les ∂^n , on commence par écrire le diagramme commutatif suivant (les lignes sont des complexes et les colonnes des suites exactes).

$$\begin{array}{cccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \dots & \longrightarrow & A^{n-1} & \xrightarrow{d^n} & A^n & \xrightarrow{d^{n+1}} & A^{n+1} & \xrightarrow{d^{n+2}} & A^{n+2} & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow f^{n-1} & & \downarrow f^n & & \downarrow f^{n+1} & & \downarrow f^{n+2} & & \\ \dots & \longrightarrow & B^{n-1} & \xrightarrow{\delta^n} & B^n & \xrightarrow{\delta^{n+1}} & B^{n+1} & \xrightarrow{\delta^{n+2}} & B^{n+2} & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow g^{n-1} & & \downarrow g^n & & \downarrow g^{n+1} & & \downarrow g^{n+2} & & \\ \dots & \longrightarrow & C^{n-1} & \xrightarrow{\Delta^n} & C^n & \xrightarrow{\Delta^{n+1}} & C^{n+1} & \xrightarrow{\Delta^{n+2}} & C^{n+2} & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

On procède en plusieurs étapes :

1. Soit $\bar{x} \in H^n C^*$, on va associer à \bar{x} un élément de $H^{n+1} A^*$ ce qui construira une application de $H^n C^* \rightarrow H^{n+1} A^*$ dont on vérifiera les propriétés. Comme $\bar{x} \in H^n C^*$, il est l'image d'un élément x de C^n tel que $\Delta^{n+1}(x) = 0$ par définition des groupes de cohomologie. Par surjectivité de g^n , il existe $y \in B^n$ tel que $x = g^n(y)$ et, grâce au diagramme ci-dessus, $g^{n+1} \circ \delta^{n+1}(y) = \Delta^{n+1} \circ g^n(y) = \Delta^{n+1}(x) = 0$ donc $\delta^{n+1}(y) \in \text{Ker}(g^{n+1}) = \text{Im}(f^{n+1})$. Ainsi, il existe $z \in A^{n+1}$ (dont on vérifiera qu'il ne dépend pas du choix de y) tel que $\delta^{n+1}(y) = f^{n+1}(z)$ et, de plus, $z \in \text{Ker}(d^{n+2})$. On note \bar{z} l'image de z dans $H^{n+1} A^*$ et $D : \text{Ker}(\Delta^{n+1}) \rightarrow H^{n+1} A^*$ l'application définie par $x \mapsto \bar{z}$.
2. D est bien un morphisme.
3. $D|_{\text{Im}(\Delta^n)} = 0$.
4. Par les deux assertions précédentes, D se relève en un morphisme $\partial^n : H^n C^* \rightarrow H^{n+1} A^*$ qui, à un élément $\bar{x} \in H^n C^*$ associe \bar{z} défini ci-dessus.
5. Il faut maintenant prouver l'exactitude de la suite, la proposition 4.1.3 nous donne l'exactitude en $H^n B^*$. Il reste à montrer que la suite est exacte en $H^n A^*$ et $H^n C^*$.

Montrons que la suite est exacte en $H^n C^*$ c'est-à-dire $\text{Im}(\bar{g}^n) = \text{Ker}(\partial^n)$ (l'exactitude en $H^n A^*$ se traite de la même manière). Soit $\bar{y} \in \text{Im}(\bar{g}^n)$, il existe $y \in B^n$ vérifiant $\delta^{n+1}(y) = 0$ tel que \bar{y} soit le projeté de y . De plus, en posant $x = g^n(y)$, $\bar{x} = \bar{g}^n(\bar{y})$ d'où $\partial^n(\bar{x}) = \bar{z}$ avec $f^{n+1}(z) = \delta^{n+1}(y) = 0$. L'injectivité de f^{n+1} donne $\bar{x} \in \text{Ker}(\partial^n)$ soit $\text{Im}(\bar{g}^n) \subset \text{Ker}(\partial^n)$. Soit $\bar{x} \in \text{Ker}(\partial^n)$, comme $\bar{z} = 0$ par paragraphe précédent, $\exists t \in A^n$ tel que $z = d^{n+1}(t)$. Ainsi, $f^{n+1}(z) = \delta^{n+1}(y) = \delta^{n+1} \circ f^n(t)$ d'où $x = g^n(y - f^n(t))$ ce qui, en passant au quotient, donne le résultat souhaité. \square

4.2 Cohomologie de Čech

Cette section permet de définir une cohomologie sur les faisceaux de groupes abéliens en introduisant des complexes de faisceaux appelés complexes de Čech qui donneront lieu par la suite à des suites exactes longues.

Soient X un espace topologique, $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in [0, n]}$ un recouvrement ouverts de X et \mathcal{F} un faisceau de groupes abéliens sur X .

Notation 4.2.1. Soit $i_0, \dots, i_p \in [0, n]$, on note $U_{i_0 \dots i_p} = \bigcap_{k=0}^p U_{i_k}$ et $s_{i_0 \dots i_p}$ une section de \mathcal{F} sur une intersection $U_{i_0 \dots i_p}$.

Définition 4.2.2 (Complexe de Čech de \mathcal{F} relativement à \mathcal{U}). On définit le complexe de Čech de \mathcal{F} relativement à $\mathcal{U} : C^*(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ par

- $C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \prod_{0 \leq i_0 < \dots < i_p \leq n} \mathcal{F}(U_{i_0 \dots i_p})$ si $p \in [0, n]$.
- $C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$ si $p > n$.

Un élément s de $C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ est appelé cochaîne et est la donnée de sections $s_{i_0 \dots i_p} \in \mathcal{F}(U_{i_0 \dots i_p})$. La différentielle $d^{p+1} : C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^{p+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ est définie par l'expression

$$d^{p+1}(s)_{i_0 \dots i_{p+1}} = \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k s_{i_0 \dots i_{k-1} i_{k+1} \dots i_{p+1}} |_{U_{i_0 \dots i_{p+1}}}.$$

Remarque 4.2.3. $C^*(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ est bien un complexe. En effet, on vérifie grâce à la définition de la différentielle que $d^{p+1} \circ d^p = 0$.

Notation 4.2.4. On note $\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ le $p^{\text{ème}}$ groupe de cohomologie de $C^*(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.

Proposition 4.2.5.

1. La cohomologie de Čech est fonctorielle c'est-à-dire qu'un morphisme $u : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ induit naturellement des morphismes de complexes $C^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^*(\mathcal{U}, \mathcal{G})$ et de groupes abéliens $\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow \check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{G})$.
2. La cohomologie de Čech commute aux sommes directes : $\check{H}^p(X, \bigoplus_{i \in I} \mathcal{F}_i) = \bigoplus_{i \in I} \check{H}^p(X, \mathcal{F}_i)$.
3. Soient k un corps, X une variété algébrique affine ou projective sur k et \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -module alors les groupes $\mathcal{F}(U_{i_0 \dots i_p})$, $C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ et $\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ sont munis naturellement d'une structure de k -espace vectoriel.

Notation 4.2.6. Soit \mathcal{F} un faisceau, on note $h^i \mathcal{F} = \dim_k \check{H}^i(X, \mathcal{F})$.

Le lemme suivant ([Har77], III, lemme 4.1) est une première étape vers la compréhension des groupes de cohomologie de Čech. En effet, à l'ordre 0, ces derniers sont liés au foncteur section globale défini en remarque 3.3.4. De plus, le groupe de cohomologie obtenu est indépendant du recouvrement de X

Lemme 4.2.7. Soient \mathcal{F} un faisceau de groupes abéliens, X un espace topologique et \mathcal{U} un recouvrement ouverts de X alors $\check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \cong \Gamma(X, \mathcal{F})$.

Démonstration. Par définition, $\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \text{Ker}(d^1)$. Soit $s \in C^0$, il est la donnée de $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ et, $\forall i < j$, $d^1(s)_{ij} = s_j - s_i$. Ainsi, $d^1(s) = 0$ si et seulement si $s_i = s_j$ sur U_{ij} . Or, comme \mathcal{F} est un faisceau, les s_i se recollent en un élément de $\Gamma(X, \mathcal{F})$. \square

Le lemme qui suit est en fait un théorème d'annulation de groupes de cohomologie ([Per95], VII, théorème 2.5) qu'on ne démontrera pas.

Lemme 4.2.8. Soient X une variété algébrique affine et $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$ une suite exacte de faisceaux quasi-cohérents alors la suite de sections globales

$$0 \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{G}) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{H}) \rightarrow 0$$

est exacte.

Le théorème suivant est fondamental car il justifie l'intérêt de la cohomologie de Čech, à savoir compléter une suite exacte de faisceaux quasi-cohérents en une suite exacte longue de groupes de cohomologie.

Théorème 4.2.9. *Soient X une variété algébrique affine ou projective, \mathcal{U} un recouvrement affine fini de X et $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$ une suite exacte de faisceaux quasi-cohérents alors on a une suite exacte longue en cohomologie de Čech :*

$$0 \rightarrow \check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow \check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \rightarrow \check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{H}) \rightarrow \check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow \check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \rightarrow \check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{H}) \rightarrow \dots$$

Démonstration. Soient $i_0, \dots, i_p \in \llbracket 0, n \rrbracket$, d'après [Per95] (VII, définition 2.7), l'intersection $U_{i_0 \dots i_p}$ est un ouvert affine et les faisceaux sont quasi-cohérents donc, par lemme 4.2.8, la suite $0 \rightarrow \Gamma(U_{i_0 \dots i_p}, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(U_{i_0 \dots i_p}, \mathcal{G}) \rightarrow \Gamma(U_{i_0 \dots i_p}, \mathcal{H}) \rightarrow 0$ est exacte. En passant aux produits sur les indices i_0, \dots, i_p , on en déduit la suite exacte $0 \rightarrow C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^p(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \rightarrow C^p(\mathcal{U}, \mathcal{H}) \rightarrow 0$ ce qui, par définition, donne une suite exacte de complexes $0 \rightarrow C^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^*(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \rightarrow C^*(\mathcal{U}, \mathcal{H}) \rightarrow 0$. On conclut avec le théorème 4.1.4. \square

Remarque 4.2.10. D'après [Har77] (III, théorème 4.5) et [Ser55] (n° 52, proposition 2), le groupe de cohomologie de Čech ne dépend pas du recouvrement affine \mathcal{U} de X choisi. Ainsi, à partir de maintenant, on notera $H^p(X, \mathcal{F}) = \check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.

4.3 Calculs de groupes de cohomologie

Cette section a pour objectif de calculer les groupes de cohomologie pour des cas particuliers de faisceaux quasi-cohérents. Les résultats obtenus ici ont vocation à servir dans la section 4.4 lors de la démonstration du théorème de Bézout.

On rappelle, conformément à l'exemple 1.2.3, que S_d désigne l'espace des polynômes homogènes de degré d de $S = k[X_0, \dots, X_n] = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} S_d$ avec la convention $S_d = 0$ si $d < 0$. Dans cette section, $\mathcal{F} = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$ est le faisceau quasi-cohérent sur \mathbb{P}^n associé à $M = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} S(d)$. Cette écriture de \mathcal{F} en somme directe de faisceaux est justifiée par le fait que \sim commute aux sommes directes (proposition 3.4.8).

Le théorème qui suit ([Har77], III, théorème 2.7) est dû à Grothendieck et montre l'annulation des groupes de cohomologie dont le degré est supérieur à la dimension de l'espace.

Théorème 4.3.1 (Grothendieck). *Soient X une variété algébrique affine ou projective de dimension n et \mathcal{F} un faisceau quasi-cohérent sur X alors $\forall i > n, H^i(X, \mathcal{F}) = 0$.*

On admet le théorème suivant, démontré dans [Har77] (III, théorème 3.5) qui montre l'annulation de la plupart des groupes de cohomologie des faisceaux quasi-cohérents si l'espace est affine.

Théorème 4.3.2. *Soient A un anneau noethérien, $X = \text{Spec}(A)$ et \mathcal{F} un faisceau quasi-cohérent sur X alors $\forall i > 0, H^i(X, \mathcal{F}) = 0$.*

Le théorème suivant issu de [Har77] (III, théorème 5.1) fournit le calcul des groupes de cohomologie des faisceaux $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$ qui joueront un rôle fondamental dans la prochaine section.

Théorème 4.3.3. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a les résultats suivants pour tout $d \in \mathbb{Z}$,*

1. $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) = S_d$.
2. $\forall 0 < i < n, H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) = 0$.

3. $H^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) \cong H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-d-n-1))^*$ en tant que k -espace vectoriel.

Démonstration. Avant de considérer les complexes de Čech des faisceaux $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$, on commence par choisir le recouvrement naturel de \mathbb{P}^n par les ouverts standards : $\mathcal{U} = (D^+(X_i))_{i \in [0, n]}$. Par définition des faisceaux $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$ sur les ouverts standards, $\Gamma(U_{i_0 \dots i_p}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) = S(d)_{(X_{i_0} \dots X_{i_p})}$ est l'ensemble des polynôme homogène de degré d de $S_{X_{i_0} \dots X_{i_p}}$. Ainsi, on en déduit les complexes des faisceaux $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$ et donc, par somme, celui de $\mathcal{F} : C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \prod_{i_0 < \dots < i_p} S_{X_{i_0} \dots X_{i_p}}$.

1. Cette propriété se montre par double inclusion. En effet, un polynôme de S_d définit bien une section globale de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$. Inversement, si f est une section globale de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$, $f|_{D^+(X_i)}$ est de la forme $\frac{P_i(X_0, \dots, X_n)}{X_i^r}$ où P_i est un polynôme homogène de degré $d+r$ tel que $X_i \nmid P_i$. De même, $f|_{D^+(X_j)} = \frac{P_j(X_0, \dots, X_n)}{X_j^s}$ avec P_j homogène de degré $d+s$ tel que $X_j \nmid P_j$. En considérant f restreint à l'intersection $D^+(X_i X_j)$, on a l'égalité dans $k[X_0, \dots, X_n]$ d'où $X_j^s P_i(X_0, \dots, X_n) = X_i^r P_j(X_0, \dots, X_n)$. Ainsi, par lemme de Gauss, $r = s = 0$ donc $P_i = P_j$ et f est en fait un polynôme homogène de degré d .
2. Cette assertion se démontre par récurrence sur $n \geq 1$. En effet, le cas $n = 1$ est trivial. Soit $n > 1$, considérons le complexe $C^*(X_0)$ obtenu par localisation du complexe $C^*(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ (on ne garde que les éléments de degré 0 dans le localisé en X_0). Alors, par exactitude du foncteur localisé, les groupes de cohomologie de $C^*(X_0)$ se déduisent de ceux de $C^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}) : H^p(C^*(X_0)) = H^p(C^*)_{(X_0)}$. De plus, l'opération \flat (définition 3.2.15) induit un isomorphisme de $S_{(X_0)}$ (éléments de degré 0 dans le localisé S_{X_0}) sur $k[X_1, \dots, X_n] = \Gamma(D^+(X_0), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n})$. La dernière égalité découle de la définition du faisceau $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$ (définition 3.4.6). L'isomorphisme précédent induit, par localisation, les isomorphismes $(S_{X_{i_0} \dots X_{i_p}})_{(X_0)} \cong k[X_1, \dots, X_n]_{X_{i_0} \dots X_{i_p}}$. Ceci signifie que le complexe $C^*(X_0)$ est isomorphe au complexe $C'^*(U', \mathcal{F}|_{D^+(X_0)})$ où $U' = (D^+(X_i) \cap D^+(X_0))_{i \in [0, n]}$. Or, $D^+(X_0) = \text{Spec}(S_{(X_0)})$ et \mathcal{F} est un faisceau quasi-cohérent donc les groupes de cohomologie de C'^* sont nuls si $p \geq 1$ (théorème 4.3.2) ce qui est aussi le cas pour ceux de $C^*(X_0)$ d'où $\forall p \geq 1, H^p(\mathbb{P}^n, \mathcal{F})_{(X_0)} = 0$. Ceci signifie que pour chaque élément x de $H^p(\mathbb{P}^n, \mathcal{F})$, il existe un entier m_x tel que $xX_0^{m_x} = 0$.

Montrons maintenant que pour tout $1 \leq p \leq n-1$, la multiplication par X_0 induit une bijection

$$\phi : H^p(\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(-1)) \rightarrow H^p(\mathbb{P}^n, \mathcal{F}).$$

Ceci nous donnera le résultat souhaité car si l'application ϕ est bijective alors, si $x \in H^p(\mathbb{P}^n, \mathcal{F})$, il existe y et m_x tels que $x = \phi(y)$ et $xX_0^{m_x} = 0$ d'où $\phi^{m_x}(y) = 0$ ce qui implique $y = 0$ et finalement $x = 0$.

L'application $\cdot X_0$ induit une suite exacte de faisceaux

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) \xrightarrow{\cdot X_0} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \rightarrow \mathcal{O}_H \rightarrow 0$$

où $H = V(X_0) \cong \mathbb{P}^{n-1}$. Ce qui, après avoir décalé cette suite sur \mathbb{Z} et pris la somme directe, devient (on considère $\mathcal{F}_H = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{O}_H(n)$)

$$0 \rightarrow \mathcal{F}(-1) \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_H \rightarrow 0.$$

Comme H est de dimension $n-1$ (exemple 3.5.5), par théorèmes 4.2.9 et 4.3.1, on a la suite exacte longue suivante en cohomologie de Čech :

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(-1)) \xrightarrow{\cdot X_0} H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{F}) \xrightarrow{\pi} H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{F}_H) \rightarrow \dots \rightarrow H^{n-1}(\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(-1)) \xrightarrow{i} \\ H^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{F}) \xrightarrow{\cdot X_0} H^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{F}_H) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Or, d'après [Har77] (III, lemme 2.10), $H^p(X, \mathcal{F}_H) = H^p(H, \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{O}_H(n))$ donc, par hypothèse de récurrence, $\forall 1 \leq p \leq n-2$, $H^p(X, \mathcal{F}_H) = 0$. De plus, la surjectivité de π et l'injectivité de i donnent la suite exacte ci-dessous pour tout $1 \leq p \leq n-1$:

$$0 \rightarrow H^p(\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(-1)) \rightarrow H^p(\mathbb{P}^n, \mathcal{F}) \rightarrow 0.$$

Ainsi, on a bien l'isomorphisme $H^p(\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(-1)) \cong H^p(\mathbb{P}^n, \mathcal{F})$ pour $1 \leq p \leq n-1$ ce qui conclut la preuve.

3. On rappelle que

$$d^n : \prod_{i_0 < \dots < i_{n-1}} S_{X_{i_0} \dots X_{i_{n-1}}} \rightarrow \prod_{i_0 < \dots < i_n} S_{X_{i_0} \dots X_{i_n}} = S_{X_0 \dots X_n} = k(X_0, \dots, X_n)$$

désigne la différentielle de $C^*(\mathcal{U}, \mathcal{F})$. Montrons par double inclusion que $\text{Im}(d^n) = \text{Vect}(\{X_0^{\alpha_0} \dots X_n^{\alpha_n}, \exists \alpha_i \geq 0\})$. Soit $(s_i)_{0 \leq i \leq n} \in \prod_{i=0}^n S_{X_0 \dots X_{i-1} X_{i+1} \dots X_n}$ alors

$$\delta^n((s_i)_{0 \leq i \leq n}) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{X_i^r F_i}{(X_0 \dots X_n)^r} \in \text{Vect}(\{X_0^{\alpha_0} \dots X_n^{\alpha_n}, \exists \alpha_i \geq 0\}).$$

En effet, dans l'expression ci-dessus, le terme $(-1)^i \frac{X_i^r F_i}{(X_0 \dots X_n)^r} \in \text{Vect}(\{X_0^{\alpha_0} \dots X_n^{\alpha_n}, \exists \alpha_i \geq 0\})$ car le coefficient devant X_i est positif. Ainsi, la somme reste dans l'espace vectoriel ce qui montre la première inclusion, l'inclusion réciproque est évidente. Cependant, $S_{X_0 \dots X_n}$ est formé des monômes $X_0^{\alpha_0} \dots X_n^{\alpha_n}$ donc

$$S_{X_0 \dots X_n} = \text{Vect}(\{X_0^{\alpha_0} \dots X_n^{\alpha_n}, \forall i, \alpha_i < 0\}) \oplus \text{Vect}(\{X_0^{\alpha_0} \dots X_n^{\alpha_n}, \exists \alpha_i \geq 0\}).$$

Ainsi,

$$\text{Coker}(d^n) = S_{X_0 \dots X_n} / \text{Im}(d^n) = \text{Vect}(\{X_0^{\alpha_0} \dots X_n^{\alpha_n}, \forall i, \alpha_i < 0\}).$$

De plus, comme $H^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{F}) = \text{Ker}(d^{n+1}) / \text{Im}(d^n)$ et $d^{n+1} = 0$,

$$H^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{F}) = \text{Coker}(d^n) = \text{Vect}(\{X_0^{\alpha_0} \dots X_n^{\alpha_n}, \forall i, \alpha_i < 0\}).$$

Comme la cohomologie de Čech commute aux sommes directes (proposition 4.2.5), on en déduit les groupes de cohomologie des faisceaux $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$,

$$H^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) = \text{Vect} \left(\left\{ X_0^{\alpha_0} \dots X_n^{\alpha_n}, \forall i, \alpha_i < 0 \text{ et } \sum_{i=0}^n \alpha_i = d \right\} \right).$$

Ainsi, on remarque que $H^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n-1)) \cong k$ et on définit

$$\begin{aligned} \phi : H^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) \times H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-d-n-1)) &\rightarrow H^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n-1)) \\ (X_0^{\alpha_0} \dots X_n^{\alpha_n}, X_0^{\beta_0} \dots X_n^{\beta_n}) &\mapsto X_0^{\alpha_0 + \beta_0} \dots X_n^{\alpha_n + \beta_n} \end{aligned}$$

une forme bilinéaire non dégénérée. ϕ induit l'isomorphisme ψ défini par

$$\begin{aligned} \psi : H^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) &\rightarrow H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-d-n-1))^* \\ X_0^{\alpha_0} \dots X_n^{\alpha_n} &\mapsto \phi(X_0^{\alpha_0} \dots X_n^{\alpha_n}, \cdot) \end{aligned}$$

□

4.4 Théorème de Bézout

Cette section est dédiée à l'énoncé et à la démonstration du théorème de Bézout. Ce résultat d'intersection des courbes algébriques de \mathbb{P}^2 nécessite plusieurs lemmes intermédiaires et fera intervenir les notions de cohomologie des faisceaux introduites précédemment.

Théorème 4.4.1 (Bézout). *Soient $F, G \in k[X, Y, T]$ deux polynômes homogènes sans facteur commun de degré s et t alors*

$$\sum_{P \in V(F) \cap V(G)} \mu_P(F, G) = st.$$

Lemme 4.4.2. *$V(F) \cap V(G) \subset \mathbb{P}^2$ est fini.*

Démonstration. On choisit $T = 0$ comme droite de l'infini et on la note D_∞ , $V(F) \cap D_\infty$ est un ensemble algébrique projectif inclus dans D_∞ donc sa dimension est 0 ou 1. Ainsi, $V(F) \cap D_\infty$ est fini ou égal à D_∞ . Si $V(F) \cap D_\infty = D_\infty$ alors $T|F$ et de même pour G . Or, par hypothèse, F et G n'ont pas de facteur en commun donc $V(F) \cap V(G) \cap D_\infty$ est fini. De plus, comme $\mathbb{P}^2 \setminus D_\infty \cong k^2$, $V(F) \cap k^2 = V(F_b)$ et $V(G) \cap k^2 = V(G_b)$. F_b et G_b étant sans facteur commun, $V(F) \cap V(G) \cap k^2 = V(F_b) \cap V(G_b) < \infty$ par théorème 3.1.24. En conclusion, $\text{Card}(V(F) \cap V(G)) = \text{Card}((V(F) \cap V(G) \cap D_\infty) \cup (V(F) \cap V(G) \cap k^2)) < \infty$. \square

A partir de maintenant on notera $Z = V(F, G)$.

Lemme 4.4.3. *Il existe une droite projective D telle que $D \cap V(F) \cap V(G) = \emptyset$.*

Ce lemme est trivial car si $x \notin V(F) \cap V(G)$, comme cet ensemble est fini par lemme 4.4.2, il existe une infinité de droites passant par x et ne rencontrant pas $V(F) \cap V(G)$.

Lemme 4.4.4. *Soient $S = k[X, Y, T]$ et $J = (F, G)$, la suite de S -modules gradués*

$$0 \rightarrow S(-s-t) \xrightarrow{\phi} S(-s) \oplus S(-t) \xrightarrow{\psi} S \rightarrow S/J$$

est exacte (avec $\phi(W) = (WG, -WF)$ et $\psi(U, V) = UF + VG$).

La vérification du lemme précédent est immédiate.

Lemme 4.4.5. *Avec les notations précédentes, on a les suites exactes*

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-s-t) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-s) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-t) \rightarrow \tilde{J} \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow \tilde{J} \rightarrow \widetilde{S/J} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Démonstration. Comme le foncteur \sim est exact (proposition 3.4.8), le résultat se déduit du lemme 4.4.4 en passant aux faisceaux. \square

Remarque 4.4.6. En fait, \tilde{J} est un faisceau d'idéaux sur \mathbb{P}^2 qui s'identifie à un faisceau \mathcal{J}_Z sur Z et $\widetilde{S/J}$ s'identifie au faisceau \mathcal{O}_Z défini dans le théorème 3.6.7. Ceci donne les égalités suivantes sur les sections globales : $\Gamma(\mathbb{P}^2, \tilde{J}) = \Gamma(Z, \mathcal{J}_Z)$ et $\Gamma(\mathbb{P}^2, \widetilde{S/J}) = \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z)$.

Démonstration (du théorème de Bézout). On rappelle que $Z = V(F, G)$, par lemme 4.4.3, il existe une droite projective D telle que $D \cap Z = \emptyset$. On peut supposer sans perte de généralités que D est la droite $T = 0$ et la choisir comme droite à l'infini. Ainsi, comme $k^2 \cong \mathbb{P}^2 \setminus D_\infty$,

$$Z = V(F, G) = V(F_b, G_b) \subset k^2.$$

En munissant Z de sa structure de schéma fini (corollaire 3.6.10) et, par corollaire 3.6.15, on a l'égalité

$$\sum_{P \in V(F,G)} \mu_P(F,G) = \dim_k k[X,Y]/(F_b, G_b) = \dim_k \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z). \quad (4.3)$$

Par lemme 4.2.7, $H^0(Z, \mathcal{O}_Z) = \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z)$. Il suffit de montrer que $h^0 \mathcal{O}_Z = st$ pour achever la preuve du théorème de Bézout. D'après le lemme 4.4.5 les suites qui suivent sont exactes

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-s-t) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-s) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-t) \rightarrow \tilde{J} \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow \tilde{J} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \rightarrow \widetilde{S/J} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

En passant aux groupes de cohomologie sur la 1^{re} suite exacte et en utilisant le théorème 4.3.3 qui annule la plupart des termes de la suite exacte longue,

$$0 \rightarrow H^1(\mathbb{P}^2, \tilde{J}) \rightarrow H^2(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-s-t)) \rightarrow H^2(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-s)) \oplus H^2(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-t)) \rightarrow 0$$

est exacte (la cohomologie de Čech commute aux sommes directes par proposition 4.2.5). Ainsi, en passant aux dimensions,

$$h^1 \mathcal{J}_Z = h^1 \tilde{J} = h^2 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-s-t) - h^2 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-s) - h^2 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-t).$$

Or, par théorème 4.3.3 et proposition 1.2.4,

$$h^2 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d) = h^0 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-d-3) = \dim_k S_{-d-3} = \binom{-d-1}{2}.$$

Ceci conduit à l'égalité suivant,

$$h^1 \mathcal{J}_Z = st - 1. \quad (4.7)$$

De plus, $H^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-s-t)) = H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-s)) = H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-s)) = 0$ par théorème 4.3.3 et en utilisant la suite exacte longue issue de la 1^{re} suite exacte,

$$h^0 \mathcal{J}_Z = h^0 \tilde{J} = 0. \quad (4.8)$$

La 2^e suite exacte donne lieu à la suite exacte longue

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(\mathbb{P}^2, \tilde{J}) \rightarrow H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}) \rightarrow H^0(\mathbb{P}^2, \widetilde{S/J}) \rightarrow H^1(\mathbb{P}^2, \tilde{J}) \rightarrow H^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}) \rightarrow H^1(\mathbb{P}^2, \widetilde{S/J}) \\ \rightarrow H^2(\mathbb{P}^2, \tilde{J}) \rightarrow H^2(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}) \rightarrow H^2(\mathbb{P}^2, \widetilde{S/J}) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Or, $H^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}) = 0$ par théorème 4.3.3 donc il reste la suite exacte

$$0 \rightarrow H^0(\mathbb{P}^2, \tilde{J}) \rightarrow H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}) \rightarrow H^0(\mathbb{P}^2, \widetilde{S/J}) \rightarrow H^1(\mathbb{P}^2, \tilde{J}) \rightarrow 0.$$

De plus, $h^0 \mathcal{J}_Z = 0$ par (4.8). On en déduit donc, après un passage aux dimensions et comme $h^0 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} = 1$ par théorème 4.3.3 et proposition 1.2.4, que

$$h^0 \mathcal{O}_Z = h^1 \mathcal{J}_Z + 1.$$

Ainsi, grâce à (4.7), $h^0 \mathcal{O}_Z = st$ et on conclut avec (4.3). \square

Références

- [AM69] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald. *Introduction to commutative algebra*, volume 2. Addison-Wesley Reading, 1969.
- [Bou06] N. Bourbaki. *Algèbre commutative : Chapitres 1 à 4*. Springer Berlin Heidelberg, 2006.
- [CL13] A. Chambert-Loir. Algèbre commutative et introduction à la géométrie algébrique. <https://webusers.imj-prg.fr/~antoine.chambert-loir/enseignement/2013-14/aceiga/Dea.pdf>, 2013.
- [Die74] J. Dieudonné. *Cours de géométrie algébrique*. Presses universitaires de France, 1974.
- [Duc15] A. Ducros. Les outils de la géométrie algébrique. <https://webusers.imj-prg.fr/~antoine.ducros/polym2.pdf>, 2015.
- [Eis95] D. Eisenbud. *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry*. Springer-Verlag New York, 1995.
- [Gro57] A. Grothendieck. Sur quelques points d'algèbre homologique. *Tohoku Math. J*, 9(2) :119–221, 1957.
- [Har77] R. Hartshorne. *Algebraic Geometry*. Springer-Verlag New York, 1977.
- [Lan02] S. Lang. *Algebra*. Springer-Verlag New York, 2002.
- [Mum88] D. Mumford. *The Red Book of Varieties and Schemes*. Springer Berlin Heidelberg, 1988.
- [Per] D. Perrin. Géométrie projective plane et applications aux géométries euclidienne et non euclidiennes. http://www.math.u-psud.fr/~perrin/Livre_de_geometrie_projective.html.
- [Per95] D. Perrin. *Géométrie Algébrique : une introduction*. InterÉditions, 1995.
- [Ser55] J.-P. Serre. Faisceaux algébriques cohérents. *Annals of Mathematics*, 61(2) :197–278, 1955.
- [ZS75] O. Zariski and P. Samuel. *Commutative Algebra*, volume 2. Springer-Verlag New York, 1975.