

Exercices de logique formelle

1 Substitutions dans une formule logique

On note D une valeur de vérité (valuation).

On note $F(H/Y)$ la formule logique obtenue en remplaçant toutes les occurrences de H par Y dans la formule logique F .

1. On pose $G = F(H/Y)$. Soit D_1 une valeur de vérité pour G . On pose :

$$D_2 : \begin{cases} X \mapsto D_1(X) & \text{si } X \neq Y \\ X \mapsto D_1(H) & \text{si } X = Y \end{cases}$$

Montrer que $D_1(G) = D_2(F)$.

2. En déduire que si F est une tautologie, $F(H_1/Y_1, \dots, H_n/Y_n)$ est une tautologie.

2 SAT et 3-SAT

- On appelle SAT le problème consistant à savoir si une formule sous forme normale conjonctive est satisfiable.
- On appelle 3-SAT le problème consistant à savoir si une formule sous forme normale conjonctive dont chaque clause contient exactement 3 littéraux est satisfiable.

(étant entendu qu'une clause ne peut contenir 2 fois le même littéral, ou un littéral et sa négation).

1. Montrer que SAT est réductible à 3-SAT : s'il existe un algorithme permettant de résoudre 3-SAT en temps polynomial (en la longueur de la formule), alors il existe un algorithme permettant de résoudre SAT en temps polynomial.
2. Plus dur : on appelle *CLIQUE* le problème consistant à trouver la clique de taille maximale dans un graphe non-orienté (on appelle clique un sous-graphe où chaque sommet est connecté à tous les autres). Montrer que *CLIQUE* est réductible à 3-SAT.