École Normale Supérieure de Rennes

Développements

Rudy Morel

Sommaire

1 Recasages

1.1 Algèbre

101. Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.
Sous-groupes finis de $SO_3(\mathbb{R})$.
Invariants de Smith.

102. Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupes des racines de l'unité. Applications.
Irréductibilité des polynômes cyclotomiques.
Théorème de structure des groupes abéliens finis.

103. Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications
Simplicité de $SO_n(\mathbb{R})$.
Théorème de Frobenius Zolotarev.

104. Groupes finis. Exemples et applications.
Sous-groupes finis de $SO_3(\mathbb{R})$.
Automorphismes de $\mathfrak{S}_n$.
Théorème de structure des groupes abéliens finis.

105. Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.
Théorème de Frobenius Zolotarev.
Automorphismes de $\mathfrak{S}_n$.
Sous-groupes finis de $SO_3(\mathbb{R})$.

106. Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension dinie E, sous-groupes de $GL(E).Applications$
Théorème de Frobenius Zolotarev.
Quelques propriétés de $O(p, q)$.
Sous-groupes finis de $SO_3(\mathbb{R})$.

107. Représentations et caractères d'un groupe fini sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Exemples.
Théorème de structure des groupes abéliens finis.
Table de caractères de D_n.

108. Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.
Automorphismes de $\mathfrak{S}_n$.
Table de caractères de D_n.
Sous-algèbre réduite de $M_n(\mathbb{R})$.

110. Structure et dualité des groupes abéliens finis. Applications
Théorème de structure des groupes abéliens finis.
Quelques applications de la TFD.

120. Anneaux $\mathbb{Z}\backslash n\mathbb{Z}$. Applications.
Théorème ds deux carrés.
Théorème de structure des groupes abéliens finis.
Irréductibilité des polynômes cyclotomiques.

121. Nombres premiers. Applications.
Théorème de structure des groupes abéliens finis.
Théorème de Frobenius Zolotarev.
Théorème des deux carrés.

122. Anneaux principaux. Applications.
Irréductibilité des polynômes cyclotomiques.
Invariants de Smith.
Théorème des deux carrés.

123. Corps finis. Applications.
Théorème de Frobenius Zolotarev.
Polynômes irréductibles sur un corps finis.

125. Extensions de corps. Exemples et applications.
Théorème d'Artin.
Polynômes irréductibles sur un corps finis.

126. Exemples d'équations diophantiennes.
Invariants de Smith.
Théorème des deux carrés.

141. Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.
Irréductibilité des polynômes cyclotomiques.
Polynômes irréductibles sur un corps finis.

142. PGCD et PPCM, algorithmes de calcul. Applications.
IMPASSE

144. Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Exemples et applications.
Irréductibilité des polynômes cyclotomiques.
Polynômes irréductibles sur un corps finis.

150. Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.
Invariants de Smith.
Quelques propriétés de $O(p, q)$.
Ellipsoïde de John-Loewner.

151. Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.
Invariants de similitude d'un endomorphisme.
Théorème d'Artin.
Sous-espaces de $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ stables par translation

152. Déterminant. Exemples et applications.
Théorème de Frobenius Zolotarev.
Ellipsoïde de John-Loewner.

153. Polynômes d'endomorphismes en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.
Décomposition de Dunford effective.
Invariants de similitude d'un endomorphisme.
Sous-algèbre réduite de $M_n(\mathbb{R})$.

154. Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.
Sous-algèbre réduite de $M_n(\mathbb{R})$.
Invariants de similitude d'un endomorphisme.

155. Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.
Sous-algèbre réduite de $M_n(\mathbb{R})$.
Décomposition de Dunford effective.

156. Exponentielle de matrices. Applications.
Théorème de stabilité de Liapounov.
Quelques propriétés de $O(p,q)$.

157. Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.
Sous-algèbre réduite de $M_n(\mathbb{R})$.
Décomposition de Dunford effective.

158. Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.
Ellipsoïde de John-Loewner.
Quelques propriétés de $O(p,q)$.

159. Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.
Invariants de similitude d'un endomorphisme.
Sous-espaces de $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ stables par translation

160. Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).
Ellipsoïde de John-Loewner.
Simplicité de $SO_n(\mathbb{R})$.

161. Isométries d'un espace affine euclidien de dimension finie. Applications en dimensions 2 et 3.
Simplicité de $SO_n(\mathbb{R})$.
Sous-groupes finis de $SO_3(\mathbb{R})$.

162. Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.
Théorème d'Artin.
Invariants de Smith.
Sous-espaces de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ stables par translation

170. Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.
Ellipsoïde de John-Loewner.
Sous-espaces de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ stables par translation

171. Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications.
Ellipsoïde de John-Loewner.
Sous-espaces de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ stables par translation

181. Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications.
IMPASSE

182. Applications des nombres complexes à la géométrie.
IMPASSE

183. Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications.
Sous-groupes finis de $SO_3(\mathbb{R})$.
Table de caractères de D_n.

183. Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications.
Sous-groupes finis de $SO_3(\mathbb{R})$.
Polynômes irréductibles sur un corps finis.

1.2 Analyse

201. Espaces de fonctions. Exemples et applications.
Théorème de Müntz.
Construction du pré-mouvement brownien.
Théorème de Montel.
Densité des polynômes orthogonaux.

202. Exemples de parties denses et applications.
Théorème de Müntz.
Densité des polynômes orthogonaux.

203. Utilisation de la notion de compacité.
Théorème de Montel.
Optimisation sur un Hilbert.
Théorème de point fixe de Brouwer.
Ellipsoïde de John-Loewner.

204. Connexité. Exemples et applications.
Simplicité de $SO_n(\mathbb{R})$.
Théorème de point fixe de Brouwer.

205. Espaces complets. Exemples et applications.
Optimisation sur un Hilbert.
Densité des fonctions continues nulle part dérivables.

207. Prolongement de fonctions. Exemples et applications.
Optimisation sur un Hilbert.
Densité des polynômes orthogonaux.
Caractérisation par les moments et fonction caractéristique.
Indécomposabilité de la loi normale.
Indécomposabilité de la loi de Poisson.

208. Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.
Optimisation sur un Hilbert.
Théorème de Müntz.

209. Approximation d'une fonction par des polynômes et des polynômes trigonométriques. Exemples et applications.
Théorème de Müntz.
Équation de la chaleur.
Densité des polynômes orthogonaux.

213. Espaces de Hilbert. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.
Construction du pré-mouvement brownien.
Optimisation sur un Hilbert.
Densité des polynômes orthogonaux.
Fonctions de Hermite et transformée de Fourier.

214. Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications en analyse et en géométrie.
Simplicité de $SO_n(\mathbb{R})$.
Théorème de point fixe de Brouwer.

215. Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications.
Simplicité de $SO_n(\mathbb{R})$.
Théorème de point fixe de Brouwer.

218 Applications des formules de Taylor.
Caractérisation par les moments et fonction caractéristique.
Méthode de Laplace.

219. Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.
Optimisation sur un Hilbert.
Ellipsoïde de John-Loewner.

220. Équations différentielles $X' = f(t, X)$. Exemples d'études des solutions en dimension 1 et 2.
Théorème de stabilité de Liapounov.
Nombre de zéros d'une équation différentielle.

221. Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.
Théorème de stabilité de Liapounov.
Nombre de zéros d'une équation différentielle.

222. Exemples d'équations aux dérivées partielles linéaires.
Équation de la chaleur.
Solution élémentaire de l'équation de Schrödinger.

223. Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.
IMPASSE

224. Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.
Méthode de Laplace.
Nombre de zéros d'une équation différentielle.

226. Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.
Processus de Galton-Watson.
Décomposition de Dunford effective.

228. Continuité et dérivabilité des fonctions d'une variable réelle. Exemples et applications.
Méthode de Laplace.
Formule sommatoire de Poisson.

229. Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.
Optimisation sur un Hilbert.
Théorème de Glivenko-Cantelli.

230. Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.
Théorèmes d'Abel angulaire et Taubérien faible.
Formule sommatoire de Poisson.

233. Méthodes itératives en analyse numérique matricielle.
IMPASSE

234. Espaces $L^p, 1 \leq p \leq +\infty$.
Construction du pré-mouvement brownien.
Densité des polynômes orthogonaux.
Fonctions de Hermite et transformée de Fourier.

235. Problèmes d'interversion de limites et d'intégrales.
Solution élémentaire de l'équation de Schrödinger.
Fonctions de Hermite et transformée de Fourier.
Méthode de Laplace.
Formule sommatoire de Poisson.

236. Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.
Solution élémentaire de l'équation de Schrödinger.
Fonctions de Hermite et transformée de Fourier.

239. Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.
Solution élémentaire de l'équation de Schrödinger.
Méthode de Laplace.
Densité des polynômes orthogonaux.

241. Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.
Équation de la chaleur.
Théorème de Montel.
Théorème de Müntz.
Fonctions de Hermite et transformée de Fourier.
Construction du pré-mouvement brownien.
Théorèmes d'Abel angulaire et Taubérien faible.
Formule sommatoire de Poisson.

243. Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.
Fonctions de Hermite et transformée de Fourier.
Caractérisation par les moments et fonction caractéristique.
Processus de Galton-Watson.
Théorèmes d'Abel angulaire et Taubérien faible.
Processus de Galton-Watson.

245. Fonctions holomorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$. Exemples et applications.
Théorème de Montel.
Théorème de Müntz.
Densité des polynômes orthogonaux.
Indécomposabilité de la loi normale.
Indécomposabilité de la loi de Poisson.
Fonctions de Hermite et transformée de Fourier.

246. Séries de Fourier. Exemples et applications.
Formule sommatoire de Poisson.
Équation de la chaleur.

250. Transformation de Fourier. Applications.
Solution élémentaire de l'équation de Schrödinger.
Fonctions de Hermite et transformée de Fourier.

253. utilisation de la notion de convexité en analyse.
Optimisation sur un Hilbert.
Théorème de point fixe de Brouwer.
Ellipsoïde de John-Loewner.

260. Espérance, variance et moments d'une variable aléatoire.
Processus de Galton-Watson.
Caractérisation par les moments et fonction caractéristique.

261. Fonction caractéristique d'une variable aléatoire. Exemples et applications.
Caractérisation par les moments et fonction caractéristique.
Indécomposabilité de la loi normale.

262. Mode de convergence d'une suite de variables aléatoires. Exemples et applications.
Construction du pré-mouvement brownien.
Théorème de Glivenko-Cantelli.

263. Variables aléatoires à densité. Exemples et applications.
Indécomposabilité de la loi normale.
Construction du pré-mouvement brownien.

264. Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.

Processus de Galton-Watson.

Indécomposabilité de la loi de Poisson.

2 Algèbre

3 Analyse

3.1 Théorème de Müntz

Leçons : 201, 202, 208, 209, 241, 245.

Théorème (Müntz)**.** *Soit* $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *une suite de réels strictement positifs telle que* $\lambda_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. *Si* $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{\lambda_n} = +\infty$ *alors* $Vect\left\{t\mapsto t^{\lambda_j} \mid j\geq 1\right\}$ *est dense dans* $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{C})$.

On rappelle le critère de densité.

Lemme. *Soit* E *un espace vectoriel normé et* $F\subset E$ *un sev. Alors,* F *est dense si et seulement si toute forme linéaire continue sur* E *nulle sur* F *est nulle sur* E *tout entier.*

Preuve. Soit $l\in\mathcal{C}([0,1],\mathbb{C})'$, on suppose que l est nulle sur les $t\mapsto t^{\lambda_j}$ et on veut montrer que $l=0$. Pour cela, on va montrer : $\forall n\in\mathbb{N},\ l(t^n)=0$.

- Pour $\zeta\in\mathbb{C}, \mathrm{Re}\zeta>0$, posons $f(\zeta) := l(t^\zeta)$. Montrons que f est holomorphe sur $\{\mathrm{Re}\zeta>0\}$. Pour cela, on voit que t^ζ est holomorphe en ζ pour tout $t\in]0,1]$ avec : $\forall t\in]0,1], \lim\limits_{h\to 0}\frac{t^{\zeta+h}-t^\zeta}{h} = (\ln(t))t^\zeta$. Montrons que cette convergence est uniforme en $t\in]0,1]$ (on prend $0^\zeta=0$ et $0^\zeta\ \ln(0)=0$). Si $t=0$ alors $\frac{t^{\zeta+h}-t^\zeta}{h}=0$. Si $t\in]0,1]$:, notant $x=\mathrm{Re}\ \zeta$ on a :

$$\tau := \left|\frac{t^{\zeta+h}-t^\zeta}{h}-(\ln(t))t^\zeta\right| = t^x\left|\frac{t^h-1}{h}-\ln t\right| = t^x\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{|h|^{n-1}|\ln t|^n}{n!} = \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{|h|^{n-1}}{n!}(t^x|\ln t|^n).$$

  Un calcul simple montre que $\sup\limits_{t\in]0,1]} t^x|\ln t|^n = e^{-n}\frac{n^n}{x^n}$. Ainsi :

$$\tau \leq \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{|h|^{n-1}}{n!}e^{-n}\frac{n^n}{x^n}.$$

  Par Stierling on a alors :

$$\tau \leq c\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{|h|^{n-1}}{x^n} = \frac{|h|}{x^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{|h|}{x}\right)^n \leq \frac{2c|h|}{x^2}\quad (\text{pour}|h|\leq\frac{x}{2}).$$

  Ainsi, τ tend vers 0 lorsque h tend vers zéro uniformément en t. Alors, comme l est continue pour $\|\cdot\|_\infty$, f est bien holomorphe. En outre, pour tout $z, \mathrm{Re}z>0, \|t^z\|_\infty\leq 1$ donc $\forall z, \mathrm{Re}z>0, |f(z)|\leq\|l\|_\infty$ et f est bornée.

- Pour $N\geq 1$ et $\mathrm{Re}z>0$ posons $B_N(z)=\prod_{j=1}^N\frac{z-\lambda_j}{z+\lambda_j}$. On a les propriétés :

$$\forall z\notin\{z_1,\cdots,z_N\}, B_N(z)\neq 0,\quad |B_N(z)|\underset{\text{Re z}\to 0}{\longrightarrow} 1 \text{ et } |B_n(z)|\underset{|z|\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

  En effet, il suffit de les montrer pour $N=1$.
  Pour la deuxième propriété, prenons $\epsilon>0$, on a $|z-\lambda|^2\geq|z+\lambda|^2-\epsilon|z-\lambda|^2$ si et seulement si $\epsilon((x-\lambda)^2+y^2)\geq 4x\lambda$. Cette dernière condition est vérifiée lorsque $4x\lambda\leq\frac{\epsilon\lambda^2}{4}$, c'est-à-dire $x\leq\frac{\epsilon\lambda}{16}$. Ainsi, pour $x\leq\frac{\epsilon\lambda}{16}$ on a $|B(z)|\geq(1+\epsilon)^{-1}$.
  Pour la troisième propriété, prenons $|z|\geq\lambda$, on a : $\left|\frac{z-\lambda}{z+\lambda}\right| = \left|1-\frac{2\lambda}{z+\lambda}\right|\geq 1-\left|\frac{2\lambda}{z+\lambda}\right|\geq 1-\left|\frac{2\lambda}{|z|-\lambda}\right|\geq 1-\frac{2\lambda}{|z|-\lambda}$. On fait alors tendre $|z|$ vers $+\infty$.

- Pour $\mathrm{Re}z > 0$, posons $g_N(z) := \frac{f(z)}{B_N(z)}$, g_N est holomorphe car n'a que des singularités effaçables. On a la majoration : $\forall \mathrm{Re}z > 0, |g_N(z)| \leq \|f\|_\infty$. En effet, soit $K \subset \{\mathrm{Re}z > 0\}$ un compact et $\epsilon > 0$. Prenons $\delta > 0$ tel que $K \subset \{\mathrm{Re}z > \delta\} \cap \{|z| < \delta\}$ et tel que pour tout z vérifiant $|z| = \delta^{-1}$ ou $\mathrm{Re}z = \delta$ on a $|B_N(z)| \geq 1 - \epsilon$. Alors, par le principe du maximum, on a :
$$\forall z \in K, \quad |g_N(z)| \leq \frac{\|f\|_\infty}{1-\epsilon}.$$
Lorsque $\epsilon \to 0$ on trouve : $\|g_N\|_{\infty,K} \leq \|f\|_\infty$.
- Supposons par l'absurde que pour $k \in \mathbb{N}$, on ait $f(k) \neq 0$ alors $|g_N(k)| \leq \|f\|_\infty$ entraine : $\forall N \geq 1, \left|\prod_{j=1}^N (1 + \frac{2k}{\lambda_j - k})\right| \leq \frac{\|f\|_\infty}{|f(k)|}$. Comme $\lambda_j \to +\infty$, prenons j_0 tel que $\forall j \geq j_0, 1 + \frac{2k}{\lambda_j - k} > 1$. On a alors $\left|\prod_{j=j_0}^N (1 + \frac{2k}{\lambda_j - k})\right| \leq \frac{\|f\|_\infty}{|f(k)|} \frac{1}{\prod_{j<j_0} |1+\frac{2k}{\lambda_j-k}|}$. En passant au ln on obtient que $\sum_{j \geq j_0}^{\ln(1+\frac{2k}{\lambda_j - k})}$ est convergente et par équivalence $\sum_{j \geq j_0} \frac{2k}{\lambda_j - k}$ et $\sum_{j \geq j_0} \frac{1}{\lambda_k}$ aussi, absurde.
- On conclut par le théorème de Weierstrass, l est nulle sur $\mathrm{Vect}\{t^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ qui est dense dans $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{C})$ donc l est nulle partout.

$\square$

Commentaires. — *Un développement long où il ne faut pas perdre de temps. Selon le temps on pourra démontrer ou pas les propriétés sur les B_N.*
- — *Pour l'inclure dans la leçon 208, on devra développer démontrer le critère de densité grâce à Hahn-Banach et passer la preuve des propriétés de B_N.*
- — *La réciproque est vraie, il s'agit pour cela de construire un contre-exemple avec les mesures de Radon.*
- — *Szasz a obtenu une extension au cas où les λ_j sont complexes. D'ailleurs si $(\lambda_j) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est bornée, on peut montrer plus facilement que $\mathrm{Vect}\left\{t^{\lambda_j} \mid j \geq 0\right\}$ est dense dans $\mathcal{C}([\epsilon, b])$ pour tout $0 < \epsilon < b$.*

3.2 Indécomposabilité de la loi Normale

Leçons : 207, 245, 261, 263.

Soient $X \sim \mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$ et $Y \sim \mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$ avec $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$ et $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}^+$ deux lois indépendantes. On a $X + Y \sim \mathcal{N}(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$. On va montrer la réciproque.

Théorème. *Soient X, Y deux variables aléatoires réelles indépendantes. On suppose que $Z := X + Y$ suit une loi normale. Alors, X et Y suivent des lois normales.*

On utilisera le lemme suivant, que l'on admet et qui ne se base que sur des résultats de fonctions holomorphe (preuve faite dans un autre développement sur la loi de Poisson).

Lemme. *Si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est entière et vérifie $Ref(z) \leq C|z|^d$ pour $C > 0$ et $d \in \mathbb{N}$ alors f est polynomiale de degré au plus d.*

Lemme. *Pour $\eta > 0$ notons $f_X(\eta) = \mathbb{E}[e^{\eta^2 X^2}] \in [0, +\infty]$. Si cette quantité est finie pour un certain $\eta > 0$ alors la fonction caractéristique φ_X de X se prolonge en une unique fonction entière que l'on note Φ_X. Si Φ ne s'annule pas alors X suit une loi normale.*

Preuve. Soit $\zeta \in \mathbb{C}$, on a $\mathbb{E}[|e^{i\zeta X}|] \leq \mathbb{E}[e^{|\zeta X|}] \leq \mathbb{E}[e^{\eta^2 X^2 + \eta^{-2}|\zeta|^2}] \leq e^{\eta^{-2}|\zeta|^2 f_X(\eta)} < +\infty$. On montre alors par le théorème d'holomorphie sous le signe intégrale que φ_X se prolonge en une fonction holomorphe notée Φ_X qui est unique par le principe des zéros isolés (un autre prolongement à $\mathbb{C}$ tout entier coïnciderait sur $\mathbb{R}$ qui a un point d'accumulation).
Comme dans l'énoncé du lemme, supposons que Φ_X ne s'annule pas alors il existe une fonction holomorphe $g\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ entière telle que $\Phi_X = e^g$. Mais pour $\zeta \in \mathbb{C}$ on a : $|\Phi_X(\zeta)| \leq e^{\eta^{-2}|\zeta|^2} f_X(\eta)$ donc $\mathrm{Re}g(\zeta) \leq \ln f_X(\eta) + \eta^{-2}|\zeta|^2$. D'après le lemme, on peut écrire $g(\zeta) = a + b\zeta + c\zeta^2$. Ainsi on a une expression de la fonction caractéristique de X, celle-ci $(t \mapsto e^{g(t)})$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et on vérifie en dérivant que $a = 0, b = i\mathbb{E}X$ et $c = \frac{-\mathbb{V}X}{2}$, de sorte que X est de loi normale. $\square$

Toute la preuve se ramène alors à montrer les conditions du lemme pour X et Y.

- Écrivons $f_X(\eta)$ sous une autre forme. Pour $\eta > 0$ on a $f_X(\eta) = \int_{[0,+\infty[} e^{\eta^2 x^2} \mathrm{d}\mathbb{P}_X(x) + \int_{]-\infty,0[} e^{\eta^2 x^2} \mathrm{d}\mathbb{P}_X(x) = I_+ + I_-$. On a par Fubini :

$$I_+ = \int_{[0,+\infty[} \left(1 + \int_{[0,x[} 2\eta^2 t e^{\eta^2 t^2} \mathrm{d}t\right) \mathrm{d}\mathbb{P}_X(x) \tag{1}$$

$$= \mathbb{P}(X \geq 0) + \int_{[0,+\infty[} 2\eta^2 t e^{\eta^2 t^2} \left(\int_{]t,+\infty[} \mathrm{d}\mathbb{P}_X(x)\right) \mathrm{d}t \tag{2}$$

$$= \mathbb{P}(X \geq 0) + \int_0^{+\infty} 2\eta^2 t e^{\eta^2 t^2} \mathbb{P}(X > t) \mathrm{d}t. \tag{3}$$

On montre de même que

$$I_- = \mathbb{P}(X < 0) + \int_0^{+\infty} 2\eta^2 t e^{\eta^2 t^2} \mathbb{P}(X < -t) \mathrm{d}t.$$

En regroupant les termes on obtient finalement la transformation d'espérance :

$$f_X(\eta) = 1 + \int_0^{+\infty} 2\eta^2 t e^{\eta^2 t^2} \mathbb{P}(|X| > t) \mathrm{d}t.$$

- Montrons maintenant que $f_X(\eta) < +\infty$ pour un certain $\eta > 0$. Quitte à retrancher leur médianes à X et Y, supposons qu'elles admettent toutes deux 0 pour médiane. On a alors :

$$\begin{aligned}
\forall x > 0,\ \mathbb{P}(|X+Y \geq x|) &= \mathbb{P}(X+Y \geq x) + \mathbb{P}(X+Y \leq -x) && (4)\\
&\geq \mathbb{P}(X \geq x, Y \geq 0) + \mathbb{P}(X \leq -x, Y \leq 0) \text{ par indépendace de } X \text{ et } Y && (5)\\
&\geq \frac{1}{2}\mathbb{P}(|X| \geq x) \text{ car } Y \text{ admet 0 pour médiane.} && (6)
\end{aligned}$$

D'après le dernier point on déduit alors que $f_X(\eta) < 2f_{X+Y}(\eta)$. Or, comme $X+Y$ suit une loi normale. Notant σ^2 sa variance, en regardant sa densité on voit que pour $\eta \in]0, \frac{\sigma}{\sqrt{(2)}}[$ on a $f_{X+Y}(\eta) < +\infty$. Il suffit donc de prendre un tel η pour X. Comme X et Y jouent des rôles symétriques, on a le même résultat sur Y.
- D'après le preuve du lemme, le dernier point assure que φ_X et φ_Y sont prolongeables en des fonctions entières Φ_X et Φ_Y. Elles vérifient par prolongement analytique :

$$\forall \zeta \in \mathbb{C}, \quad \Phi_X(\zeta)\Phi_Y(\zeta) = e^{im\zeta}e^{-\frac{\sigma^2\zeta^2}{2}}.$$

En passant à la norme on déduit que Φ_X et Φ_Y ne s'annulent pas. Ainsi, la seconde condition du lemme est vérifiée, ce qui conclut la preuve du théorème.

Commentaires. — *Un développement assez long, il ne faut pas perdre de temps.*

— *On pourrait montrer directement que si* $e^{itm-\frac{\sigma^2t^2}{2}} = \varphi_X(t), \varphi_Y(t)$ *alors* φ_X *et* φ_Y *sont prolongeables en fonctions entières. En effet, pour* $v \in \mathbb{R}$ $\mathbb{E}[e^{vZ}] < +\infty$ *entraîne que* $\mathbb{E}[e^{vX}]\mathbb{E}[e^{vY}] < +\infty$, *ce qui permet d'appliquer le théorème d'holomorphie sous le signe intégral. Cependant, on a pas une majoration précise sur les prolongements.*

— *Il est remarquable que la loi normale soit en quelque sorte une loi limite universelle via le TCL et que pourtant on ne peut pas la décomposer de manière indépendante en autre chose que des lois normales. Il y a derrière cela toute une théorie de la décomposabilité des lois de variables aléatoires.*

— *Dans les applications, lorsque l'on parle de bruit global (accumulation de toute sorte de bruits indépendants) et qu'on le suppose gaussien alors nécessairement les petits bruits qui le composent sont eux aussi gaussien.*

— *On a un résultat similaire sur la décomposition en produit : si* $Z = XY \sim \mathcal{N}$ *avec* $X \perp\!\!\!\perp Y$ *alors* $X, Y \sim \mathcal{N}$ *mais la preuve est beaucoup plus technique (Linnik).*

3.3 Optimisation sur un Hilbert

Leçons : 203, 205, 208, 213, 219, 229, 253.

Théorème. *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé séparable. Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de E'. Alors il existe une extractrice φ et $T \in E'$ tels que :*

$$\forall x \in \mathbb{E}, \quad T_{\varphi(n)(x)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} T(x).$$

Preuve. • Soit $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ une partie de E dense et dénombrable. Notons $M = \|(T_n)_n\|_\infty$Pour tout $i \in \mathbb{N}$, la suite $(T_n(x_i))_{n\geq 0}$ est bornée dans $\mathbb{R}$ car $\forall n \in \mathbb{N},\ |T_n(x_i)| \leq M\|x_i\|$. Puisque $\mathbb{R}$ est complet, on peut extraire de $(T_n(x_i))_{n\geq 0}$ une sous-suite convergente. Par procédé d'extraction diagonale, il existe une extractrice φ telle que :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad T_{\varphi(n)}x_i \underset{n\to+\infty}{} Tx_i \ \text{ où } Tx_i \text{ est une notation.}$$

- Montrons que quelque soit $x \in E$, $(T_{\varphi(n)}(x))_{n\geq 0}$ converge. Soient $x \in E$ et $\epsilon > 0$, prenons $i \in \mathbb{N}$ tel que $\|x - x_i\| \leq \epsilon$. On a alors pour $p, q \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} |T_{\varphi(p)}x - T_{\varphi(q)}x| &\leq |T_{\varphi(p)}x - T_{\varphi(q)}x_i| + T_{\varphi(p)}x_i - T_{\varphi(q)}x_i| + T_{\varphi(p)}x_i - T_{\varphi(q)}x| && (7)\\ &\leq 2M\epsilon + |T_{\varphi(p)}x_i - T_{\varphi(q)}x_i|. && (8) \end{aligned}$$

  Or, on sait que $(T_{\varphi(n)}x_i)_{n\geq 0}$ converge dans $\mathbb{R}$ donc est de Cauchy. On peut alors trouver $n \in \mathbb{N}$ tel que pour $p, q \geq n_0$ on a $|T_{\varphi(p)}x - T_{\varphi(q)}x| \leq (2M + 1)\epsilon$. Ainsi, $(T_{\varphi(n)}x)_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ et donc converge.
- Notons pour $x \in E$ $Tx = \lim_{n\to+\infty} T_{\varphi(n)}x$. Par unicité de la limite, l'application $T : E \mapsto \mathbb{R}$ est linéaire. De plus, on a $\forall x \in E, \forall n \in \mathbb{N}, |T_{\varphi(n)}x| \leq M\|x\|$. En passant à la limite on déduit que T est continue avec $\|T\| \leq M$.

□

Application. *Soit $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace de Hilbert séparable. Si $J : H \to \mathbb{R}$ est continue convexe et coercive au sens où $\lim_{\|x\|\to+\infty} J(x) = +\infty$ alors elle admet un minimum : $\exists x_0 \in H,\ J(x_0) = \underset{x\in H}{inf} J(x)$.*

Preuve. • Soit $(x_n)_{n\geq 0} \in H^{\mathbb{N}}$ une suite minimisante pour J. Comme J est coercive, $(x_n)_n$ est bornée. En effet, par l'absurde, on pourrait extraire $\|x_{\varphi(n)}\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et donc $J(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, ce qui est absurde car J admet un infinimum.
  Ainsi la famille $(\langle x_n, \cdot\rangle)_{n\geq 0} \in (H')^{\mathbb{N}}$ est bornée et par le théorème précédent et le théorème de représentation de Riesz il existe $x_0 \in H$ et φ une extractrice tels que :

$$\forall x \in H, \quad \left\langle x_{\varphi(n)}, x\right\rangle \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \langle x_0, x\rangle .$$

- Montrons alors que x_0 est un minimum de J. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > \inf_{x\in H} J(x)$. Posons $C = \{x \in H \mid J(x) \leq \alpha\}$. On sait que C est non-vide. De plus, C est fermé par continuité de J et il est convexe car J est convexe. Considérons alors P_C la projection orthogonale sur C. Prenons un rang $N \in \mathbb{N}$ à partir duquel les $x_{\varphi(n)}$ sont dans C. On alors par théorème de projection :

$$\forall n \geq N, \quad \left\langle x_0 - P_C x_0, x_{\varphi(n)} - P_C x_0\right\rangle \leq 0.$$

Alors, lorsque n tend vers l'infini on obtient : $\|x_0 - P_C x_0\|^2 \leq 0$ donc $x_0 \in C$, c'est-à-dire $J(x_0) \leq \alpha$. Ceci étant vrai pour tout $\alpha > \inf_{x\in H} J(x)$ on en déduit que $J(x_0) = \inf_{x\in H} J(x)$. $\square$

Commentaires. — *Dans la preuve on montre sans le dire que* $\inf_{x\in H} J(x)$ *est fini.*

- *En dimension finie l'application est immédiate par compacité des fermées bornés, pas besoin de la convexité de* J.
- *Un contre-exemple est obtenu en prenant* $H = l^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ *et* $J : H \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (\|x\|^2 - 1)^2 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x_i}{i}$. *L'infinimum de* J *est* 0 *qui n'est pas atteint, car* J *est continue, coercive mais pas convexe.*
- *Dans l'application on peut enlever l'hypothèse* H *séparable, on prendrait alors* $\overline{Vect\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}}$ *comme espace séparable sur lequel s'applique la preuve. On prolonge alors l'opérateur souhaité par* 0 *sur l'orthogonal de* $\overline{Vect\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}}$.
- *De manière plus générale, on peut montrer que sans l'hypothèse de séparabilité dans le théorème, la boule unité de* E' *est faiblement compacte (pour la topologie faible*). Attention, dans ce cadre de généralité, elle n'est pas nécessairement faiblement séquentiellement compacte.*
- *La preuve montre en fait que tout convexe fermé de* H *est faiblement séquentiellement fermé.*
- *De manière encore plus générale, on peut minimiser des fonctionnelles sur un espace de Banach réfléxif et on a un résultat similaire à l'application.*
- *Ce théorème sert à résoudre des équations différentielles, il vient en quelques sortes après le théorème de Lax-Milgram. Regardons par exemple l'équation*

  $$-u'' + |u|^{p-1}u = f \text{ dans } L^2(0,1).$$

  où l'on cherche une solution $u \in H_0^1(0,1)$.
  Le théorème de Lax-Milgram ne s'applique pas (difficile d'exhiber une forme bilinéaire). Par contre on peut montrer que ce problème équivaut à minimiser la fonctionnelle suivante $J(u) = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}|u'|^2 + \frac{|u|^{p+1}}{p+1} - fu\right) dt$. *En appliquant le théorème, on a alors existence et unicité d'une solution, et on peut montrer qu'elle appartient à* $H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)$. *De plus, si* $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$ *alors* $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$

3.4 Caractérisation par les moments et fonction caractéristique

Leçons : 207, 218, 243, 260, 261.

Théorème. *Soit $(\mu_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels positifs. Si $(\mu_k)_k$ vérifie $\limsup_{k\to+\infty} \frac{\mu_{2k}^{\frac{1}{2k}}}{2k} < +\infty$ alors il existe au plus une loi de probabilité sur $\mathbb{R}$ dont les moments d'ordre k soient les μ_k.*

Preuve.
- Soit X une loi admettant pour moments les μ_k. Pour $k \in \mathbb{N}$ on a pas Cauchy-Schwarz :

$$\mu_{2k+1}^2 \leq \mu_{2k}\mu_{2k+2},$$

de sorte que $\limsup_{k\to+\infty} \frac{\mu_k^{\frac{1}{k}}}{k} < +\infty$.

- On va montrer que φ_X, la fonction caractéristique de X, est développable en série entière. Soit $n \in \mathbb{N}$, d'après Taylor-Lagrange on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left| e^{ix} - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(ix)^m}{m!} \right| \leq \frac{1}{n!}|x|^{n+1}.$$

D'où

$$\left| \varphi_X(t) - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\mathbb{E}[(itX)^m]}{m!} \right| \leq \mathbb{E}\left| e^{itX} - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(itX)^m}{m!} \right| \leq \frac{|t|^n \mathbb{E}|X|^n}{n!}.$$

En multipliant par $e^{i\theta X}$, pour $\theta \in \mathbb{R}$, à l'intérieur de l'espérance, et puisque $\varphi_X^{(n)}(\theta) = i^n \mathbb{E}[X^n e^{i\theta X}]$ on obtient finalement :

$$\left| \varphi_X(t+\theta) - \varphi_X(\theta) - t\varphi_X'(\theta) - \cdots - \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\varphi_X^{(n-1)}(\theta) \right| \leq \frac{|t|^n}{n!}\mu_n.$$

Notons $r = \limsup_{k\to+\infty} \frac{\mu_k^{\frac{1}{k}}}{k}$ qui est fini. Prenons $\epsilon > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$ on a $\mu_k \leq k^k(r+\epsilon)^k$. Alors, pour $|t| < \frac{1}{2er}$ on a alors :

$$\forall n \geq n_0, \quad \frac{|t|^2}{n!} n^n (r+\epsilon)^n \leq e^n |t|^n (r+\epsilon)^n \text{ car } \frac{n^n}{n!} \leq e^n \tag{9}$$

$$\leq \left(\frac{r+\epsilon}{2r} \right)^n. \tag{10}$$

Si de plus $\epsilon < r$ on a alors montrer que quelque soit $t \in]-\frac{1}{2er}, \frac{1}{2er}[$ on a le développement : $\varphi_X(t+\theta) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\varphi_X^{(m)}(\theta)}{m!} t^m$.

- Ainsi, si Y est est une variable aléatoire ayant aussi pour moments les μ_k, les fonctions caractéristiques φ_X et φ_Y sont développables en série entière au voisinage de tout point. Comme en 0 on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\varphi_X^{(n)}(0) = \varphi_Y^{(n)}(0)$ on obtient par un argument de connexité que $\varphi_X = \varphi_Y$ et Y a même loi que X.

□

En particulier, si deux variables aléatoires X et Y sont bornées et ont mêmes moments alors elles ont même loi. En effet, on a $\limsup_{k\to+\infty} \frac{\mu_k^{\frac{1}{k}}}{k} \leq \limsup_{k\to+\infty} \frac{\|X\|_\infty^{\frac{1}{2k}}}{2k} = 0$.

Soit X une variable aléatoire réelle telle que $|X|$ admet une densité de la forme $Cx^\alpha e^{-x^\lambda}\mathbb{1}_{]0,+\infty[(x)}\mathrm{d}x$. Dans ce cas on a pour tout $n \geq 0$:

$$\mu_n := \mathbb{E}|X|^n = C\int_0^{+\infty} x^{n+\alpha}e^{-x^\lambda}\mathrm{d}x = C\lambda\int_0^{+\infty} y^{\frac{n+\alpha+1}{\lambda}-1}e^{-y}\mathrm{d}y = \Gamma(\frac{n+\alpha+1}{\lambda}).$$

Posons $u_n = \frac{n+\alpha+1-\lambda}{\lambda}$, par la formule de Stierling, $\Gamma(x+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x}{e}^x\sqrt(2\pi x)$, on a :

$$\frac{\mu_n^{\frac{1}{n}}}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{u_n}{n}\right)^{\frac{u_n}{n}} \frac{1}{2n}(2\pi n)^{\frac{1}{2n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-1}e^{\left(\frac{u_n}{n}-1\right)\ln(n)}.$$

Or on a le DL $\frac{u_n}{n} = \frac{1}{\lambda} + O(\frac{1}{n})$ donc on a $\limsup\limits_{n\to+\infty} \frac{\mu_n^{\frac{1}{n}}}{n} < +\infty$ si et seulement si $\lambda \geq 1$.

Par exemple, si $\lambda = 2$, la loi normale $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$, $\alpha = 0$, $\lambda = 2$ est caractérisée par ses moments (et donc toute loi normale générale).
Si $\lambda = 1$, la loi gamma, $\alpha = k-1$, $\lambda = 1$ est caractérisée par ses moments.

Commentaires.

- *Pour le faire rentrer dans certaines leçons, il faut bien souligner que tout provient de la développabilité en série entière de la fonction caractéristique.*
- *La condition sur la limite sup est en fait équivalente à la condition* $\mathbb{E}[e^{\eta X}] < +\infty$ *pour un certain* $\eta > 0$. *Cela passe par la formule du rayon de convergence* R *de la série entière* $\sum_{n\geq 0}\frac{\mu_n}{n!}t^n$: $R^{-1} = \limsup\limits_{k\to+\infty} \frac{\mu_n^{\frac{1}{n}}}{n}$.
- *Développons l'argument du premier point. On a en fait*

$$\frac{\mu_{2k+1}^{\frac{1}{2k+1}}}{2k+1} \leq \frac{\sqrt{\mu_{2k}\mu_{2k+2}}^{\frac{1}{2k+1}}}{2k+1} \leq \frac{\mu_{2k}^{\frac{1}{2k+1}}}{2k+1} + \frac{\mu_{2k+2}^{\frac{1}{2k+1}}}{2k+1},$$

  où la première inégalité est Cauchy-Scwharz et la deuxième est l'inégalité classique $ab \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2)$.
- *Ce théorème n'est pas juste un développement d'agrég. Il conduit notamment au théorème utile suivant : soit* $(X_n)_n$ *une suite de variables aléatoires réelles admettant des moments à tout ordre. Soit* X *une variable aléatoire réelle admettant des moments à tout ordre. Si on a*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}[X_n^k] \lim_{n\to+\infty} \longrightarrow \mathbb{E}[X^k]$$

  alors $(X_n)_n$ *converge en loi vers* X.
  Grâce à ce dernier théorème on montre le théorème de Wigner sur les matrices aléatoires qui prédit la loi des valeurs propres de matrices aléatoires de grande dimension.

3.5 Construction du pré-mouvement brownien

Leçons : 201, 213, 234, 241, 262, 263.

On se place sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Définition. *Un pré-mouvement brownien est une famille $(B_t)_{t\geq 0}$ de variables aléatoires (c'est-à-dire un processus) vérifiant :*

- $B_0 = 0$ *p.s.*
- $\forall t \geq 0,\ B_t \sim \mathcal{N}(0,t)$
- $\forall 0 \leq s_1 \leq t_1 \leq s_2 \cdots \leq s_n \leq t_n,\ (B_{t_i} - B_{s_i})_{1\leq i\leq n}$ *est un vecteur indépendant.*

Définition. *Un espace gaussien est un sous-espace vectoriel fermé de $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ constitué uniquement de variables aléatoires gaussiennes centrées. En particulier, c'est un espace de Hilbert.*

Propriété. *Des éléments d'un espace gaussien $\mathcal{G}$ sont deux à deux orthogonaux si et seulement si ils forment une famille indépendante.*

Preuve. Si deux tels éléments sont indépendants alors ils sont orthogonaux car d'espérance nulle.
Réciproquement, supposons $Z = (Z_1, \cdots, Z_n)$ deux à deux orthogonaux. Soit $t \in \mathbb{R}^n$, la va $\langle t, Z\rangle = \sum_{k=1}^n t_i Z_i$ appartient à l'espace gaussien $\mathcal{G}$ donc est une va gaussienne. De plus, on a $\mathbb{E}\langle t, Z\rangle = 0$ et $\mathbb{V}\langle t, Z\rangle = \sum_{k=1}^n t_i^2 \mathbb{V} Z_i$. Donc, comme $\langle t, Z\rangle$ est gaussienne on sait alors que :

$$\forall t \in \mathbb{R}^n, \quad \varphi_Z(t) = \mathbb{E}[e^{i\langle t,Z\rangle}] = e^{-\frac{\mathbb{V}\langle t,Z\rangle}{2}} = \prod_{k=1}^n e^{-\frac{t_i^2 \mathbb{V} Z_i}{2}} = \prod_{k=1}^n \varphi_{Z_i}(t_i).$$

Cela montre l'indépendance des Z_k. □

Propriété. *Soit $(Z_n)_{n\geq 0}$ une suite de va gaussiennes. Si elle converge dans L^2 alors la limite est une va gaussienne.*

Preuve. Supposons $(Z_n)_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} Z$ dans L^2. En particulier, $\mathbb{V} Z_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{V} Z$ et comme L^2 s'injecte dans L^1 continument, on a aussi $\mathbb{E} Z_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E} Z$. Notons $\sigma_n^2 = \mathbb{V} Z_n$, $\sigma^2 = \mathbb{V} Z$, $m_n = \mathbb{E} Z_n$ et $m = \mathbb{E} Z$. Comme la convergence L^2 implique la convergence en loi on a au niveau des fonctions caractéristiques :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi_Z(t) = \lim_{n\to+\infty} \varphi_{Z_n}(t) = \lim_{n\to+\infty} e^{itm_n - \frac{\sigma_n^2 t^2}{2}} = e^{itm - \frac{\sigma^2}{2}}.$$

Comme φ_Z caractérise la loi, on en déduit que Z est gaussienne. □

Le résultat suivant est une conséquence directe de la propriété précédente et de la définition d'espace gaussien.

Corollaire. *Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de va iid de loi gaussienne centrée réduite. L'adhérence dans L^2 de $\overline{\mathrm{Vect}\{X_n \mid n \in \mathbb{N}\}}$ est un espace gaussien. De plus, (X_n) est une base hilbertienne de $\overline{\mathrm{Vect}\{X_n \mid n \in \mathbb{N}\}}$.*

Donnons-nous alors une suite $(X_n)_{n\geq 0}$ de va iid gaussiennes centrées réduites et notons $\mathcal{G} = \overline{\mathrm{Vect}\{X_n \mid n \in \mathbb{N}\}}$. Par ailleurs, donnons-nous $(h_n)_{n\geq 0}$ une base hilbertienne de $H := L^2(\mathbb{R}_+, \mathrm{d}x)$.
Considérons $W : H \to \mathcal{G},\ h \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \langle h, h_n\rangle X_n$.

Propriété. *L'application W est une isométrie linéaire. En particulier, pour tout $h \in H$, $W(h) \sim \mathcal{N}(0, \|h\|^2_{L^2})$. De plus, les $W(h_i)$ sont des va gaussiennes indépendantes.*

Preuve. L'application W est une isométrie car c'est en fait l'unique isométrie linéaire de $\mathcal{G}$ dans H qui fait correspondre terme à terme les bases hilbertiennes $(X_n)_n$ et $(h_n)_n$. □

Enfin, posons pour $t \geq 0,\ B_t = W(\mathbb{1}_{[0,t]})$.

Théorème. *Le processus $(B_t)_{t\geq 0}$ est un pré-mouvement brownien.*

Preuve. Il est clair que $B_0 = 0$ car W est linaire.
Ensuite, pour $t \geq 0$, on a $\|\mathbb{1}_{[0,t]}\|^2_{L^2} = t$, de sorte que B_t est de norme t, c'est-à-dire de variance t. Comme son espérance est nulle, on a $B_t \sim \mathcal{N}(0, t)$.
Enfin, si $s_1 \leq t_1 \leq s_2 \cdots \leq s_n \leq t_n$, les fonctions $\mathbb{1}_{]s_i,t_i]}$ étant deux à deux orthogonales dans $L^2(\mathbb{R}_+)$, les variables $B_{t_i} - B_{s_i}$ sont deux à deux orthogonales dans H car W est une isométrie donc, d'après une proposition précédente, elles sont indépendantes. □

Commentaires.

- *Dans la définition du pré-mouvement brownien, on peut remplacer la deuxième hypothèse par : $\forall t \geq s,\ B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$.*
- *Le mouvement brownien (ou pré-mouvement brownien pour simplifier) est le seul processus à accroissements indépendants stationnaires, c'est-à-dire que pour tout $t \geq s$, la loi de $B_t - B_s$ ne dépend que de $t - s$. C'est une belle application du TCL.*
- *Dans la proposition sur la convergence de va gaussienne, on peut remplacer la convergence L^2 par la convergence en loi.*
- *Il est bon de savoir pourquoi étant donné une loi μ , on peut trouver une suite de va iid de loi μ.*
- *De même, il est bon de connaître quelques bases hilbertiennes de $L^2(\mathbb{R}_+, dx)$.*
- *Le « vrai »mouvement brownien une propriété supplémentaire qui est que les trajectoire doivent être continues presque sûrement. Á partir d'un pré-mouvement brownien $(B_t)_{t\geq 0}$, on peut construire un mouvement brownien $(\tilde{B}_t)_{t\geq 0}$ vérifiant $\forall t \geq 0,\ B_t = \tilde{B}_t$ p.s. (régularisation, Kolmogorov).*
- *Le mouvement brownien n'est pas dérivable (au sens où les trajectoires ne sont pas presque sûrement dérivables). En effet, s'il l'était, il serait à variations bornées. Or , pour une subdivision $0 = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n = t$ on a $\mathbb{E}|B_{t_{i+1}} - B_{t_i}| = \sqrt{t_{i+1} - t_i}$. En prenant $t_{i+1} - t_i = \frac{t}{n}$ on a heuristiquement $\sum_{i=0}^{n-1} |B_{t_{i+1}} - B_{t_i}| \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{nt} \int_0^1 \sqrt{x}dx$.*
- *Le mouvement brownien n'est pas simplement la modélisation historique (observée par Brown) du mouvement erratique d'une particule dans un fluide mais il a de nombreuses applications. La plus fameuse et la plus exploitée est l'intégrale d'Ito (et la formule qui va avec) abondamment utilisée en finance.*