Méta-plans de leçons de mathématiques pour la préparation à l'agrégation de mathématiques - option informatiques

Lauriane Huguet — Cyril Lacoste — Théo Pierron

19 mai 2014

Table des matières

1 Groupes finis. Exemples et applications. (104)

Remarques du jury : *Les exemples doivent figurer en bonne place dans cette leçon. On peut par exemple étudier les groupes de symétries* $\mathfrak{A}_4, \mathfrak{S}_4, \mathfrak{A}_5$ *et relier sur ces exemples géométrie et algèbre, les représentations ayant ici toute leur place. Le théorème de structure des groupes abéliens finis doit être connu. On attend des candidats de savoir manipuler correctement les éléments de quelques structures usuelles (Z/nZ, Sn, etc.). Par exemple, proposer un générateur simple de* $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ *voire tous les générateurs, calculer aisément un produit de deux permutations, savoir décomposer une permutation en produit de cycles à support disjoint. Il est important que la notion d'ordre d'un élément soit mentionnée et comprise dans des cas simples.*

Développements

- Burnside

2 Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications. (105)

Dev : Brauer ?

3 Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de GL(E). Applications. (106)

Soit k un corps commutatif et E un k-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.

I Le groupe linéaire

A Généralités [PER]

$\mathrm{Hom}_k(E)$, l'ensemble des endomorphismes de E est muni naturellement d'une structure d'algèbre.

Définition $\mathrm{GL}(E)$ est le groupe des automorphismes de E, c'est-à-dire l'ensemble des inversibles de $\mathrm{Hom}_k(E)$.

Si on se donne une base $\mathcal{B}$ de E, on dispose d'un isomorphisme entre $\mathrm{GL}(E)$ et $\mathrm{GL}_n(k)$, l'ensemble des matrices $n \times n$ inversibles à coefficients dans k. /!\ Cet isomorphisme n'est pas canonique, il dépend de la base $\mathcal{B}$ choisie.

Remarques du jury : Ceci permet d'utiliser le calcul matriciel pour l'étude de $\mathrm{GL}(E)$.

<u>Proposition I.1</u>
$f \in \mathrm{GL}(E) \Leftrightarrow f$ envoie une base de E sur une base de E.

Définition Le déterminant est une forme n-linéaire alternée. Pour tout $M = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(k)$, $\det(M) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$.

<u>Proposition I.2</u>
Le déterminant est l'unique forme n-linéaire alternée de $\mathcal{M}_n(E)$ dans k telle que $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$ et $\det(\alpha \cdot \mathrm{Id}) = \alpha^n$.

L'application $\det : \mathcal{M}_n(E) \to k$ induit un homomorphisme multiplicatif de $\mathrm{GL}(E)$ dans k^*.

<u>Proposition I.3</u>
$\mathrm{Ker}(\det) =: \mathrm{SL}(E)$ est appelé *groupe spécial linéaire de E*.

Remarques du jury : $1 \to \mathrm{SL}(E) \to \mathrm{GL}(E) \to k^* \to 1$ est une suite exacte et $\mathrm{GL} = \mathrm{SL} \rtimes k^*$.

<u>Proposition I.4</u>
$f \in \mathrm{GL}(E) \Leftrightarrow$ f bijective, f injective, f surjective, $\mathrm{rg}\, f = n$.

<u>Proposition I.5</u>
$\mathfrak{S}_n$ s'injecte dans $\mathrm{GL}_n(k)$ par l'application :

$$\begin{cases} \mathfrak{S}_n & \to \mathrm{GL}_n(k) \\ \sigma & \mapsto M_\sigma = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \end{cases}$$

avec $a_{ij} = \delta_j^{\sigma(i)}$.

<u>Théorème 3.1</u> Brauer
Avec les notations précédentes, deux permutations σ,τ sont conjuguées dans $\mathfrak{S}_n$ si, et seulement si, M_σ et M_τ le sont dans $\mathrm{GL}(n, k)$.

<u>Théorème 3.2</u> Cayley
Tout groupe fini G est isomorphe à un sous groupe du groupe symétrique $\mathfrak{S}(G)$ des permutations de G.

<u>Corollaire I.1</u>
En particulier, tout groupe fini de cardinal n s'injecte dans le groupe linéaire.

Théorème 3.3 Burnside
Un sous-groupe G de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est d'exposant fini si, et seulement si, c'est un groupe fini.

B Générateurs [ULM]

Soient H un hyperplan de E d'équation $f \in E^*$ et $u \in \mathrm{GL}(E)$ tel que $u_{|_H} = \mathrm{Id}_H$.

Proposition I.6
Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\det u = \alpha \neq 1$ (*i.e.*, $u \notin \mathrm{SL}(E)$)
2. u admet une valeur propre $\alpha \neq 1$ et est diagonalisable
3. $D = \mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}) \not\subseteq H$
4. $\exists \mathcal{B}$ base de E telle que la matrice de u dans cette base soit $Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \alpha \end{pmatrix}$.

Définition Une telle application est appelée *dilatation* d'hyperplan H, de droite D, de rapport α.

Corollaire I.2
Deux dilatations sont conjuguées dans $\mathrm{GL}(E)$ si, et seulement si, elles ont le même rapport.

Proposition I.7
Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\det u = 1$ (*i.e.*, $u \in \mathrm{SL}(E)$) et $u \neq \mathrm{Id}$,
2. u n'est pas diagonalisable,
3. $D = \mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}) \subset H$,
4. l'homomorphisme induit $\overline{u}\colon E/H \to E/H$ est l'identité,
5. $\exists a \in H$ tel que $\forall x \in E\ u(x) = x + f(x)a$,
6. $\exists \mathcal{B}$ base de E telle que la matrice de u dans cette base soit $Mat_{\mathcal{B}}(u) = \mathrm{Id} + E_{n,n-1}$.

Définition Une telle application est appelée *transvection* de droite $D = (a)$, $D \subset H$.

Théorème 3.4 ! DEV !
Les transvections engendrent $\mathrm{SL}(E)$.

Corollaire I.3
$\mathrm{GL}(E)$ est engendré par les transvections et dilatations.

II Exemples de sous-groupes [PER/ULM]

A Centre, groupe dérivé

Proposition II.1
Le centre de GL et le centre de SL sont les matrices scalaires de ces groupes. $Z(\mathrm{GL}) = \lambda\,\mathrm{Id}, \lambda$ non nul. $Z(\mathrm{SL}) = \lambda\,\mathrm{Id}$, avec $\lambda^n = 1$.

Définition Le quotient de $\mathrm{GL}(n,k)$ par son centre est appelé le *groupe projectif linéaire* et est noté $\mathrm{PGL}(n,k)$.

Définition Le quotient de $\mathrm{SL}(n,k)$ par son centre est appelé le *groupe projectif linéaire* et est noté $\mathrm{PSL}(n,k)$.

<u>THÉORÈME 3.5</u>
$\mathrm{PSL}(n,k)$ est simple, sauf dans les cas $(n=2, k=\mathbb{F}_2)$ et $(n=2, k=\mathbb{F}_3)$.

<u>PROPOSITION II.2</u>
Si $n \geq 3$ $D(\mathrm{GL}(n,k)) = D(\mathrm{SL}(n,k)) = \mathrm{SL}(n,k)$.

B Sous-groupes définis par un invariant

Définition Soient $u \in \mathrm{GL}(E)$ et $f\colon E^2 \to k$, une forme sesquilinéaire non dégénérée. Si

$$\forall x, y \in E,\ f(u(x), u(y)) = f(x,y)$$

on dit que u est une isométrie de E.

<u>THÉORÈME 3.6</u>
L'ensemble G des isométries est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$.

Définition Si f est symétrique sur E, $G = \mathrm{O}(f)$. C'est le groupe orthogonal.

Définition Si f est symétrique $G = \mathrm{U}(f)$. C'est le groupe unitaire.

Définition Si f est alternée $G = \mathrm{Sp}(f)$. C'est le groupe symplectique.

REMARQUES DU JURY : Comme l'intersection de deux sous-groupes est un sous-groupe, on obtient alors les sous-groupes $\mathrm{SO}(n)$ et $\mathrm{SU}(n)$.

III Etude topologique, $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ [MNEI]

A Densité

<u>PROPOSITION III.1</u>
$\mathrm{GL}(n,k)$ est un ouvert dense de $\mathcal{M}_n(k)$.

Application : Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(k)$, $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ (polynômes caractéristiques).
Application : Il existe une base de $\mathcal{M}_n(k)$ formée de matrices inversibles.

B Connexité

<u>PROPOSITION III.2</u>
$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ sont connexes par arcs.

<u>PROPOSITION III.3</u>
$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes homéomorphes : $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R})$.

<u>PROPOSITION III.4</u>
$\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}_+^* \times \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$; $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^* \times \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ (deux homéomorphismes).

C Compacité

<u>Théorème 3.7</u>
$O(n)$ est compact.

<u>Corollaire III.1</u>
$SO(n)$ est compact.

Application : *Décomposition polaire* Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ alors il existe une unique $O \in \mathrm{O}(n)$ et une unique $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ (matrices symétriques réelles définies positives) telles que $M = OS$. De plus,

$$\begin{cases} \mathrm{O}(n) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) & \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \\ (O, S) & \mapsto OS \end{cases}$$

est un homéomorphisme.

Remarques du jury : Ceci reste vrai pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ mais on perd l'unicité de la décomposition.

<u>Théorème 3.8</u>
Tout sous-groupe G compact de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est conjugué à un sous-groupe d'isométries euclidiennes de $\mathbb{R}^n$.

IV Actions de groupe de $\mathrm{GL}(E)$ ou de ses sous-groupes

A Actions de $\mathrm{GL}(E)$

<u>Proposition IV.1</u>
$\mathrm{GL}(E)$ agit transitivement sur E par translation à gauche : $\forall g \in \mathrm{GL}(E)$, $\forall x \in E$ $g.x = g(x)$.

<u>Proposition IV.2</u>
$\mathrm{GL}(E)$ agit par translation à gauche sur $\mathbb{P}(E)$.

Remarques du jury : Cette action induit une action fidèle de $\mathrm{PGL}(E)$ sur $\mathbb{P}(E)$.

<u>Proposition IV.3</u>

1. $|\,\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)| = (q^n - 1)(q^n - q)\dots(q^n - q^{n-1})$.
2. $|\,\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_q)| = (q^n - 1)(q^n - q)\dots(q^n - q^{n-2}) = |\,\mathrm{PGL}(\mathbb{F}_q)|$.
3. $|\,\mathrm{PSL}_n(\mathbb{F}_q)| = \frac{|\,\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_q)|}{d}$, avec $d = \mathrm{pgcd}(n, q-1)$.

<u>Proposition IV.4</u>
On a les isomorphismes exceptionnels suivants :

1. $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_2) = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_2) \simeq \mathfrak{S}_3$.
2. $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_3) \simeq \mathfrak{S}_4$ et $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_3) \simeq \mathfrak{A}_4$.
3. $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_4) = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_4) \simeq \mathfrak{A}_5$.
4. $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5) \simeq \mathfrak{S}_5$ et $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_5) \simeq \mathfrak{A}_5$.

B Action de $\mathrm{GL}_p(k) \times \mathrm{GL}_n(k)$ sur $\mathcal{M}_{p,n}(k)$

<u>Proposition IV.5</u> Cognet
$\mathrm{GL}_p(k) \times \mathrm{GL}_n(k)$ agit par conjugaison sur $\mathcal{M}_{p,n}(k)$ par $(P, Q).M = PMQ^{-1}$. Le nombre de classes d'équivalence est $1+\inf(p, n)$ et les éléments $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{p-r,r} & 0_{p-r,n-r} \end{pmatrix}$ forment un système de représentants.

Application : $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. $A_r = \{M \in \mathcal{M}_n(k) \mid \mathrm{rg}\, M = r\}$ est une partie connexe de $\mathcal{M}_n(k)$.

C Action de $\mathrm{SO}(n)$ sur S^{n-1}

<u>PROPOSITION IV.6</u> FARRAUT
(! DEV !) $\mathrm{SO}(n)$ agit transitivement sur $S^{n-1}(\mathbb{R})$.

<u>PROPOSITION IV.7</u>
$\mathrm{SO}(n)/\mathrm{SO}(n-1)$ est homéomorphe à S^{n-1}.

Application : $\mathrm{SO}(n)$ est connexe.

Développements

- $\mathrm{SO}(n)/\mathrm{SO}(n-1) \simeq S^{n-1}$
- Transvection engendrent SL
- Frobenius Zolotarev
- Cayley
- Burnside
- Brauer
- Endo de M_n qui préservent GL_n

4 Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications. (108)

Dev : Transvection engendrent SL

5 Anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Applications. (120)

REMARQUES DU JURY : *Cette leçon classique demande toutefois une préparation minutieuse. Tout d'abord n n'est pas forcément un nombre premier. Il serait bon de connaître les sous-groupes de Z/nZ et les morphismes de groupes de Z/nZ dans Z/mZ Bien maîtriser le lemme chinois et sa réciproque. Savoir appliquer le lemme chinois à l'étude du groupe des inversibles. Distinguer clairement propriétés de groupes additifs et d'anneaux. Connaître les automorphismes, les nilpotents, les idempotents. Enfin, les candidats sont invités à rendre hommage à Gauss en présentant quelques applications arithmétiques des anneaux Z/nZ, telles l'étude de quelques équations diophantiennes bien choisies.*

I Le groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

- groupe additif cyclique
- représentation $[\![0; n-1]\!]$
- Théorème de structure des groupes abéliens finis
- Automorphismes
- Sous-groupes
- Si $\mathrm{Aut}(G)$ agit transitivement sur $G \setminus \{1\}$ alors $G = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^n$
- Si tout élément est d'ordre 2, alors $\simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$
- morphisme de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$

II L'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

- Théorème chinois
- Elements inversibles
- n premier $\Leftrightarrow$ corps

- Wilson
- idempotent/nilpotents

III Applications

A Crypto

- RSA
- Test de primalité
- Fermat, Carmichael

B Résolutions d'équations

- Polynômes : Eisenstein
- Chevalley Warning + Erdos Ginzburg Ziv
- systèmes de congruence
- Equations diophantiennes / algo de Berlecampf (?)
- Théorème de Sophie Germain
- triplet Pythagoricien
- Théorèmes de 2 carrés + Carrés dans $\mathbb{F}_p$ + Entiers de Gauss

Développements
- Frobenius zolotarev
- Sophie Germain ?
- th de gauss pour polynomes constructibles
- Fermat n=2

6 Nombres premiers. Applications. (121)

Dev : RSA / test de primalité ? Sophie Germain ?

7 Corps finis. Applications. (123)

Développements Frobenius Zolotarev

8 Polynômes irreductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications. (141)

9 Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices. (150)

10 Dimension d'un espace vectoriel (dim finie). Rang. Exemples et applications. (151)

REMARQUES DU JURY : *C'est une leçon qui, contrairement aux apparences, est devenue difficile pour les candidats. Nombre d'entre eux n'ont pas été capables de donner des réponses satisfaisantes à des questions élémentaires comme : un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie, est-il aussi de dimension finie ? Il faut bien connaître les théorèmes fondateurs de la théorie des espaces vectoriels de dimension finie en ayant une idée de leurs preuves.*

On se place dans le cadre de E un k-espace vectoriel où k est un corps commutatif, $\dim E = n$.

I Généralités

A Définitions

- famille libres, génératrices, bases
- base incomplète, base extraite
- dimension = cardinal des bases
- def de base orthonormée dans un espace euclidien
- application : Si F sev de E alors $\dim F \leq \dim E$ + cas d'égalité
- Isomorphisme entre $L(E,F)$ et $M_{p,n}(k)$ / Cas où $E = F$
- rang=dimension de l'image=rang de la famille des vecteurs colonnes de la matrice associée
- Existence du supplémentaire par base incomplète

B Propriété

- Formules de Grassmann + $\dim L(E,F), EF, E/F$. Cor : deux droites projectives se coupent. Si $\dim E = \dim F + \dim G$, $E = F + G \Leftrightarrow F \cap G = \{0\} \Leftrightarrow E = F \oplus G$
- Exemples de dimension $\mathbb{R}^n$
- isomorphisme entre E et F implique $\dim E = \dim F$. Ex : via Cauchy Lipschitz, l'ensemble des solutions d'un système différentiel linéaire $Y'(t) = A(t)Y(t)$ où $A(t) \in M_n$ est un ev de dim n (obj agreg p.152)
- Théorème du rang, $injectif \Leftrightarrow surj \Leftrightarrow bij$ ex : interpolation, toute algèbre de dimension finie intègre est un corps ($x \to ax$ est injective donc surjective pour tout $a \neq 0$)
- Restriction de $L(E,G) \to L(F,G)$ surjectif si F sev de E
- Forme linéaire surjective ou nulle
- existence de BON via gram schmidt
- $E = E^{**}$

C Propriétés des evs de dimension finie

- boule unité compact ssi dim finie (Riesz)
- équivalence des normes en dimension finie
- continuité des formes/applications linéaires
- un espace de dim finie est fermé (donc complet)
- carathéodory

II Matrices et applications linéaires

A Topologie

- (euh... pas dans la leçon) GL_n ouvert dense (connexe si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$)
- l'ensemble des matrices de rang r est d'intérieur vide (pour $r < n$) d'adhérence l'ensemble des matrices de rang $\leqslant r$
- de toute famille dense de M_n on peut extraire une base. Corollaire : il existe une base de matrices inversibles (ou diagonalisables dans le cas complexe)

B Considérations algébriques

- l'action de $\mathrm{GL}(E)$ sur E a deux orbites

- caractérisation par le rang des orbites sous l'action de steinitz
- dimension max d'un sous-espace de matrices de rang $\leq p$
- cartan-dieudonné
- réduction des endos symétriques
- endos préservant $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$
- Molien
- Ex d'application : l'espace vectoriel engendré par les nilpotents est le noyau de la trace

III Théorie des corps

- extensions de corps, degré, sous corps premier, cardinal des corps finis
- base télescopique
- éléments algébriques, caractérisation, ils forment un anneau
- rang invariant par extension de corps
- élément primitif
- frobénius
- gauss pour les polygones réguliers constructibles

IV Calcul diff

- extrema liés
- rg constant

Développements

- Extrêmas liés (Gourdon, Alessandri)
- Element primitif (Chambert Loir)
- Théorème de Molien (Leichtman, Peyré alg discrete de la transfo de fourier)
- Endo de $M_n(\mathbb{C})$ préservant $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ (Oraux X-ens alg1)
- Réduction des endomorphisme symétriques
- Etude de l'action de Steinitz, Mneimné-Testard, Cognet et Gourdon
- Dimension maximale de sous-espace de matrices de rang $\leq p$ (algebre1)
- Carathéodory
- Commutant d'un endomorphisme (gourdon, alg2)
- Sous espace de $C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ de dimension finie stable par translation
- Cartan-Dieudonné (Cognet)
- Théorème de l'élément primitif (Escoffier, théorie de galois)
- Structure des espace vectoriel de dim fini (Goblot)
- Caractérisation des élément aglébrique (Gozard)
- Théorème du rang constant (Rouvière)

11 Déterminant. Exemples et applications. (152)

Remarques du jury : *Il faut que le plan soit cohérent ; si le déterminant n'est défini que sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, il est délicat de définir* $\det(A - XI_n)$ *avec* A *une matrice carrée. L'interprétation du déterminant comme volume est essentielle. Beaucoup de candidats commencent la leçon en disant que le sous-espace des formes n-linéaires alternées sur un espace de dimension n est de dimension 1, ce qui est fort à propos. Toutefois, il est essentiel de savoir le montrer. Le jury ne peut se contenter d'un Vandermonde ou d'un déterminant circulant ! Le résultant et les applications simples à l'intersection ensembliste de deux courbes algébriques planes peuvent trouver leur place dans cette leçon. D'une manière générale on attend pendant le développement* *l'illustration d'un calcul ou la manipulation de déterminants non triviaux. Il serait bien que la continuité du déterminant trouve une application, ainsi que son caractère polynomiale.*

I Généralité

A Définitions

- Unique forme multi-linéaire alternée qui vaut 1 sur l'identité
- Formule dégueu
- Déterminant d'une famille, caractérisation des familles libres
- Déterminant d'une matrice
- Formule de changement de base
- Cofacteurs, commatrice

B Premières propriétés

- orientation
- determinant du produit = produit des det
- lien avec le volume
- mesure de l'image d'une partie mesurable par un endo/John-Loewner
- Hadamard
- caractérisation des familles de rang $\leq r$ (+ouvert)
- Formule de la commatrice
- caractérisation de GL_n, SL_n

II Calcul effectif

- Développement par rapport à une ligne/colonne, opérations élémentaires
- Exemples classiques
- Déterminant par blocs
- Pivot de Gauss

III Applications

A Résultant

- Résultant / Borne de Bezout

B Analyse

- Müntz
- wronskien
- Formule de changement de variable (jacobien)
- Inégalités de convexité, John Loewner

C Résolution de systèmes linéaires

- LU
- Cramer

D Réduction

- Application à la réduction, polynôme caractéristique

E Frobenius Zolotarev et/ou Gram / Divers ...

Développements

- Frobenius-Zolotarev (obj agreg, perrin)
- Suite de polygones
- Borne de bezout (resultant)
- determinant de $M = (m_{i,j})$ avec $m_{i,j} = \text{pgcd}(i, j)$
- Formule d'Hadamard
- Résultant et application (Saux-Picart Cours de calcul formel)
- John-Loewner (alessandri, x-ens alg3)
- Théorème de Müntz
- Dimension d'espaces de matrices de rang $\geq p$
- Calcul de det classiques (Vandermonde, circulant, Hürwitz, Smith) (gourdon)
- Critère de parité de Gale (ziegler, lecture on polytope)
- Irréductibilité du déterminant (Briançon, elt d'alg comm)
- Théorème de Pascal (Ladegaillerie)
- Théorème de Molien (Peyré, alg discrete de la transfo de fourrier)

12 Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Application. (153)

Remarques du jury : *Les polynômes d'un endomorphisme ne sont pas tous nuls ! Il faut consacrer une courte partie de la leçon à l'algèbre K[u], connaître sa dimension sans hésiter. Les propriétés globales pourront être étudiées par les meilleurs. Le jury souhaiterait voir certains liens entre réduction et structure de l'algèbre K[u]. Le candidat peut s'interroger sur les idempotents et le lien avec la décomposition en somme de sous-espaces caractéristiques. Le jury ne souhaite que le candidat présente un catalogue de résultats autour de la réduction, mais seulement ce qui a trait aux polynômes d'endomorphismes. Il faut bien préciser que dans la réduction de Dunford, les composantes sont des polynômes en l'endomorphisme. L'aspect applications est trop souvent négligé. On attend d'un candidat qu'il soit en mesure, pour une matrice simple de justifier la diagonalisabilité et de déterminer un polynôme annulateur (voire minimal). Il est souhaitable que les candidats ne fassent pas la confusion entre diverses notions de multiplicité pour une valeur propre λ donnée (algébrique ou géométrique). Enfin rappelons que pour calculer Ak, il n'est pas nécessaire en général de faire la réduction de A (la donnée d'un polynôme annulateur de A suffit bien souvent).*

I A FINIR

Développements

- Dunford (Gourdon)
- Dunford effective avec Newton (Risler Boyer)
- Lie Kolchin (Chambert-Loir, Algebre Corporelle)
- Caractérisation des semi-simples(Obj agreg)
- Frobenius (Gourdon)
- Codiagonalisation et conséquences
- Burnside (X-ens alg 2)
- Réduction des endomorphismes normaux (Gourdon)
- Surjectivité de l'exponentielle (Nurdin, agreg de math / Coste)
- Sous-algèbres réduites de $M_n(k)$ (Mneimné)

- Commutant d'un endomorphisme
- Algorithme de Fadeev (X-ens)
- Décomposition polaire (Mneimné / Serre)
- Endo cyclique, Frobenius (Gourdon)
- Réduction des autoadjoints (Gourdon)
- Sous-espace de $C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ stable par translation (Leichtnam, Obj agreg)
- Burnside (Alessandri, X-ens alg 2)

13 Endomorphismes trigonalisables. Endomorphisme nilpotents. (157)

Remarques du jury : *Il est possible de mener une leçon de bon niveau, même sans la décomposition de Jordan à l'aide des noyaux itérés. On doit savoir déterminer si deux matrices nilpotentes sont semblables grâce aux noyaux itérés (ou grâce à la décomposition de Jordan si celle-ci est maîtrisée). Notons que l'étude des nilpotents en dimension 2 débouche naturellement sur des problèmes de quadriques et l'étude sur un corps fini donne lieu à de jolis problèmes de dénombrement.*

I Endomorphismes trigonalisables

- Définitions
- Propriétés topologique de l'ensemble des trigo
- Equivalence avec les polynômes minimaux / caractéristique
- Calcul de trace et déterminant facilités
- Cas particulier des diago
- Lemme des noyaux, sous espaces stables, trigonalisation simultanée

II Endomorphismes nilpotents

- Définitions
- Caractérisations avec valeurs propres et polynome caractéristique
- nilpotent toujours trigo qq soit le corps de base
- Adhérence de la classe de similitude contient 0
- Indice de nilpotence ; existence d'un élément tel que $(x, u(x), u^2(x), \ldots, u^p(x))$ soit libre
- Les nilpotents forment un cône
- Engendre Ker(tr)

III Application à la réduction

A Dunford

Application à l'exponentielle de matrice, résolution d'équation différentielle...

B Jordan

Noyaux itérés, classes de similitudes caractérisées par réduites de Jordan

C Autres décompositions classiques

LU, QR, application à la résolution de systèmes d'équations, (stockage d'images ?)...

Développements

- Décomposition de Bruhat (Alg 1)
- Décomposition de Dunford
- Décomposition de Dunford effective via Newton (Risler Boyer)
- Endormorphisme de $M_n(\mathbb{C})$ préservant $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ (Alg1)
- Théorème de Burnside
- Théorème de Lie-Kolchin
- Surjectivité de l'expo de matrice ? (cf Hélène : surement hors sujet)
- $0 \in$ Adhérence de la classe de similitude de N ssi N nilpotent (Objectif agreg) (trop court, a priori)

14 Formes linéaires et hyperplans en dimension finie. Exemples et applications. (159)

Remarques du jury : *Il est important de replacer la thématique de la dualité dans cette leçon. Les liens entre base duale et fonctions de coordonnées doivent être parfaitement connus. Savoir calculer la dimension d'une intersection d'hyperplans est au cœur de la leçon. L'utilisation des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes permet facilement d'obtenir les équations d'un sous-espace vectoriel ou d'exhiber une base d'une intersection d'hyperplans. Cette leçon peut être traitée sous différents aspects : géométrique, algèbrique, topologique, analytique, etc. Il faut que les développements proposés soient en lien direct, comme toujours, avec la leçon ; proposer la trigonalisation simultanée est un peu osé ! Enfin rappeler que la différentielle d'une fonction réelle est une forme linéaire semble incontournable.*

I Définitions

- Forme linéaire, Hyperplan = noyau d'une forme linéaire non nulle de zèleuh
- Duale, base duale, base antéduale
- Bidual
- Orthogonalité, adjoint
- Hahn-Banach
- Intersection de famille d'hyperplan
- raisonnement par dualité (base orthogonale ?)
- Différentielle, forme différentielle, green riemann
- générateurs de $\mathrm{SL}(E)$ homologie linéaire
- Théorème de Riesz dans le cas euclidien
- Frobenius
- f est combinaison linéaire des (f_i) ssi le noyau de f contient l'intersection de ceux des f_i

II A fINIR, trier la partie précédente

Développements

- Générateurs de $\mathcal{O}(E)$ (Audin, Perrin)
- Hahn-Banach (X-ens analyse 3 /Gantmacher)
- Théoreme de Hahn Banach géométrique (Tauvel)
- Généraeur de $\mathrm{GL}(E)$ et $\mathrm{SL}(E)$ (Perrin / Ulmer)
- Isomorphisme entre $M_n(k)$ et son dual des applications
- Preuve du théorème des invariants de similitudes (Gourdon)
- Endomorphismes cycliques, invariants de similitudes (Gourdon)

- Enveloppe convexe du groupe orthogonal (Tauvel, Alessandri, Oraux, X-ens alg1)
- Simplicité de PSL(E) pour $\dim E \geq 3$ (Goblot)
- Théoreme de Burnside ? (Alessandri, X-ens alg2)
- Théorème de Cartan Dieudonné (Cognet)
- théorème min-max de Courant-Fisher (X-ens alg 3)
- Extrêmas liés

15 Systèmes d'équation linéaires ; opérations, aspects algorithmiques et conséquences théoriques. (162)

16 Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications. (170)

Remarques du jury : *Le candidat ne doit pas se contenter de travailler sur $\mathbb{R}$. Il faut savoir que les formes quadratiques existent sur le corps des complexes et sur les corps finis et savoir les classifier. On ne doit pas négliger l'interprétation géométrique des notions introduites (lien entre coniques, formes quadratiques, cônes isotropes) ou les aspects élémentaires (par exemple le discriminant de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ et la signature de la forme quadratique $ax^2 + bxy + cy^2$). On ne peut se limiter à des considérations élémentaires d'algèbre linéaire. Les formes quadratiques ne sont pas toutes non dégénérées (la notion de quotient est utile pour s'y ramener). L'algorithme de Gauss doit être énoncé et pouvoir être pratiqué sur une forme quadratique de $\mathbb{R}^3$. Le lien avec la signature doit être clairement énoncé. Malheureusement la notion d'isotropie est mal maîtrisée par les candidats, y compris les meilleurs d'entre eux. Le cône isotrope est un aspect important de cette leçon, qu'il faut rattacher à la géométrie différentielle. Il est important d'illustrer cette leçon d'exemples naturels.*

I Généralités

- Formes sesquilinéaire / alternée / quadratiques / symétrique / bilinéaires
- Cône isotropes / formes dégénérée / Noyau / Rang
- discriminant / quotient par les carrés
- Orthogonalité / Formes réflexives / symétriques / hermitienne
- Forme matricielle
- Isotropie / Indice d'une forme bilinéaire (seti)
- radical / supplémentaire orhogonaux
- Plan hyperboliques
- Groupe unitaire / orthogonal / sympléctique

II Théorème

- existence des bases orthonormales
- Signature + théorème de Sylvester
- Gauss
- Théoreme de Witt + application ?
- Classification des formes quadratiques (cf Perrin)
- caractérisation de non dégénéré /

Développements
- Lemme de Morse

- John-Loewner
- Théorème de comptage des racines d'un polynôme à l'aide des formes quadratiques (Gantmacher)
- Méthode de Gauss (+ exemple ?) (Grifone)
- Classification des quadriques (Audin)
- Diagonalisation des endomorphismes symétriques, normaux.
- Section planaire d'un cône (Ladegaillerie)
- Tout sous-groupe compacte de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est conjugué à $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$
- Cartan-Dieudonné (Cognet)
- Théorème de witt ?

17 Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications. (181)

Remarques du jury : *On attend des candidats qu'ils parlent de coordonnées barycentriques et les utilisent par exemple dans le triangle (coordonnées barycentriques de certains points remarquables). Il est judicieux de parler d'enveloppe convexe, de points extrémaux, ainsi que des applications qui en résultent.*

I Barycentres

- Définition, associativité, homogénéité, isobarycentre
- sous-espace affine engendré = ensemble des barycentres
- application affine ssi préservation des barycentres
- coordonnées barycentriques (à multiplication près), points remarquables du triangle
- systèmes affinement libres
- Menelaüs, Pascal
- suite de polygones

II Convexité

A Définitions et premières propriétés

- définitions, convexes de $\mathbb{R}$
- images directes et réciproques de convexes par une application affine
- intersection, produit, somme de convexes (Minkowski ?)
- Si $\dim E \geqslant 2$, f affine ssi l'image d'un convexe par f est convexe

B Enveloppe convexe

- Définition, caractérisation avec les barycentres
- Points extrémaux
- Gauss-Lucas, Krein-Milmann, Carathéodory
- Enveloppe convexe de O_n

C Convexes et topologique

- l'adhérence et l'intérieur d'un convexe sont convexes
- enveloppe convexe d'un compact
- projection sur un convexe fermé

- jauge d'un convexe
- tout convexe compact symétrique par rapport à 0 et voisinage de 0 est une boule unité pour une certaine norme
- Hahn-Banach géométrique

Développements
- Convergence d'une suite de polygones
- John-Loewner
- Enveloppe convexe de O_n
- Théorème de Birkoff
- Théorème de Desargues par le calcul barycentrique
- Hahn-Banach géométrique (Tauvel)
- Théorème de Pascal
- Théorème de Carathéodory (Tauvel)
- Inégalité de Kantorovitch
- Sous-groupes compacts de $GL(E)$

18 Application des nombres complexes à la géométrie. (182)

REMARQUES DU JURY : *Cette leçon ne saurait rester au niveau de la Terminale. Une étude de l'exponentielle complexe et des homographies de la sphère de Riemann est tout à fait appropriée. La réalisation du groupe* SU_2 *dans le corps des quaternions et ses applications peuvent trouver sa place dans la leçon.*

I Géométrie euclidienne

A Généralités

- affixe, représentation polaire, module argument, liens avec la géométrie (module = distance, argument = angle)
- convergence d'une suite de polygones
- transformations, similitudes directes et indirectes
- orthogonalité expression du produit scalaire avec la partie réelle

B Quaternions et groupes d'isométries

- représentations des rotations par les complexes de module 1 via l'exponentielle complexe $\mathrm{SO}_2 \simeq \mathbb{S}^1$
- blabla quaternions, SU_2, $\mathbb{S}^3$, actions sur $\mathrm{SO}_3, \mathrm{SO}_4$, isomorphismes (cf. Perrin)

C Polynômes et géométrie

- Gauss Lucas
- Ellipse de Steiner
- théorème de gauss pour les polygones constructibles (?)

II Géométrie projective

- droite projective complexe
- Action de $PSL_2(\mathbb{Z})$
- homographies, birapport, caractérisations, division harmonique

– 4 points sont cocycliques ou alignés ssi leur birapport est réel
– les homographies préservent les cercles-droites
– alternative de Steiner
– le groupe circulaire, préservation des cercles-droites

Développements
– Action de $PSL_2(\mathbb{Z})$ sur le demi-plan de Poincaré (Alessandri, oraux X-ENS algèbre 1)
– Alternative de Steiner (Eiden)
– Convergence d'une suite de polygones
– Ellipse de Steiner (Marden)
– Le groupe circulaire (Audin, Vidonne)
– Théorème de Gauss pour les polygones constructibles (Chambert-Loir, Carrega)
– Théorème de Jordan (Gonnord-Tosel)
– Automorphismes du disque unité (Rudin)

19 Utilisation des groupes en géométrie. (183)

Remarques du jury : *C'est une leçon transversale et difficile, qui peut aborder des aspects variés selon les structures algébriques présentes. D'une part un groupe de transformations permet de ramener un problème de géométrie à un problème plus simple. D'autre part, les actions de groupes sur la géométrie permettent de dégager des invariants (angle, birapport) essentiels. On retrouvera encore avec bonheur les groupes d'isométries d'un solide.*

I Fourre-tout

– Groupe de transformations
– Groupes Diédraux
– Coloriages/isométries du [cube ou autre]
– Sous-groupes finis de SO_3 / Solides de Platon
– Géométrie projective / homographies / PGL, PSL
– Action de PSL sur le demi plan de Poincaré
– Isomorphismes exceptionnels (Perrin/Ulmer)
– Groupe symplectique / orthogonal ...
– Géométrie affine (action de groupe sous-jacente) / ($\mathrm{Aut}(E) = E \rtimes \mathrm{GL}(E)$?)
– Groupe des déplacements ?
– Action de [insert groupe here] sur les réseaux
– action de SO_n sur S^{n-1} (Farraut)
– Banach-Tarski
– Groupe circulaire
– Classification des groupes de pavages (Goblot)
– Action des quaternions sur $\mathbb{R}^3$ (Perrin)

Développements
– Coloriages/isométries du [cube ou autre]
– Sous-groupes finis de SO_3 / Solides de Platons
– Action de PSL sur le demi plan de Poincarré
– Isomorphismes exceptionnels (Perrin/Ulmer)
– action de SO_n sur S^{n-1} (Farraut)
– Classification des groupes de pavages (Goblot)
– Action des quaternions sur $\mathbb{R}^3$ (Perrin)

20 Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement. (190)

21 Utilisation de la notion de compacité. (203)

22 Théorèmes de point fixe. Exemples et applications. (206)

23 Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples. (208)

Remarques du jury : *La justification de la compacité de la boule unité en dimension finie doit être donnée. Le théorème d'équivalence des normes en dimension finie, ou le caractère fermé de tout sous-espace de dimension finie d'un espace normé, sont des résultats fondamentaux à propos desquels les candidats doivent se garder des cercles vicieux.*

- Brezis
- ZQ
- Gourdon Analyse
- Rudin

Soit E un espace de Banach sur un corps k.

I Généralités [Gourdon]

- définitions de normes, espace normé est métriques
- Espace de Banach
- normes équivalentes (def), exemples de normes
- application linéaire continue + caractérisation(equivalences)
- normes subordonnées (exemples)

II Cas particuliers

A Cas des Hilbert [ZQ]

- Produit scalaire, norme qui en découle
- Identité du parallèlogramme
- Projection sur un convexe
- base hilbertienne, Bessel, Parseval
- L^2
- Représentation de Riesz (Frechet)
- Lax-Milgram

B Cas de la dimension finie

- Théorème Riesz / Equivalence des normes
- Toute appli d'un evn normé de dim fini dans un evn qcq est continue
- evn dim fini implique complet
- sev de dim fini d'un evn est fermé
- compact $\Leftrightarrow$ fermé borné
- compact d'intérieur vide en dim infini (corollaire de Riesz)
- séries exponentielle

III Théorèmes généraux

A théorème généraux

- Hahn-Banach géométrique et autres
- Banach-Steinhaus
- Application ouverte / Graphe fermé
- Baire
- Prolongement des applications uniformément continues + existence d'un complété
- Théorème de Groethendieck

B Opérateurs compacts

- définition
- Fredholm
- Réduction (dans un Hilbert) (adjoint = $T^*l(x) = l(T(x))$)
- limite d'opérateurs de rang fini
- l'ensemble des opérateurs compacte idéal bilataire des appli linéaire continues, stable par adjoints

Développements

- Hahn-Banach
- Riesz
- Critère de Kitaï
- Densité des polynômes orthogonaux
- Banach Steinhaus + application : Il existe des fonctions différentes de leurs séries de fourier. Gourdon
- L^p est un Banach (Brezis)
- Théorème d'echantillonnage de Shannon (Willem)
- Théorème de Grothendieck

Ref : Zuily, Brezis, Gourdon

24 Théorèmes d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications. (214)

25 Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications. (215)

Remarques du jury : *Il faudrait que les candidats à l'Agrégation sachent que les différentielles d'ordre supérieur dk f (a) définissent des applications k-linéaires (sur quel espace ?). Il faut savoir calculer sur des exemples simples, la différentielle d'une fonction, ou effectuer un développement limité à l'ordre 1 d'une fonction.*

I Généralités

A ordre 1

- Définitions dans Gourdon et Cartan
- Différentiable implique continue

- différentielle d'une somme, d'un produit, d'une composée
- dérivée selon un vecteur
- différentiable implique existence de dérivées dans toutes les directions (+contre exemple dans Hauchecorne)
- Si toutes les dérivées partielles et son continue alors f est différentiable (Contre-exemple de la réciproque dans Hauchecorne)
- Matrice Jacobienne, changement de variable
- Accroissement finis

B Ordre supérieur

- dérivée d'ordre supérieur + théorème de Schwartz
- Matrice Hessienne, caractérisation des extrema locaux
- Formule de Taylor + lemme d'Hadamard(exo dans Gourdon)
- Différentielle du déterminant, d'un application linéaire, de l'inverse

II TFI/TIL

A Inversion locale

- Difféomorphisme
- TIL / TIG
- $D(f^{-1})(f(x)) = (Df)^{-1}(x)$
- Cauchy-Riemann
- Hadamard-Lévy
- Différentielle de rang constant
- Machin différentielles isométries (Gourdon)

B Fonctions implicites

- TFI + Formule moche de la différentielle de la fonction implicite
- équivalence avec le théorème d'inversion locale
- extrema liés / multiplicateurs de Lagrange
- application Morse

III Au choix

- Sous-variétés
- Taylor et accroissements finis si pas dans les généralités

Développements
- Point fixe de Brouwer (Gonnort Dozel ?, Testard maths en devenir : en exo)
- Lemme de Morse
- Lemme de Borel
- Différentiel de rang constant
- Différentielle isométrie (?)
- Extrêmas liés
- Surjectivité de l'exponentielle de matrice
- Hadamard-Lévy
- Billard elliptique (rouvière)
- théorème des sous-variétés (équivalences entre les définitions)
- Théorème des fonctions implicites

26 Application des formules de Taylor.

27 Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications. (219)

28 Équations différentielles $X' = f(t, X)$. Exemples d'étude des solutions en dimension 1 et 2. (220)

Développements – Hadamard (ZQ)
- Lyapounov (Rouviere)
- Lokta Volterra
- Hill-Mathieu (Gourdon)

29 Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications. (221)

Remarques du jury : *Le cas des systèmes à cœfficients constants fait appel à la réduction des matrices qui doit être connue et pratiquée. L'utilisation des exponentielles de matrices doit pouvoir s'expliquer. Dans le cas général, certains candidats évoquent les généralisations de l'exponentielle (résolvante) via les intégrales itérées.*

I Généralités

- Cauchy Lipschitz, existence et unicité d'une solution maximal, globale par théorème de sortie de tout compacts
- Structure de l'espace des solutions
- définitions des solutions stables, asymptotiquement stables.

II Cas des coefficients constants

- Cas de l'ordre 1, réduction par matrice dans le cas de l'ordre supérieur
- exponentielle de matrice
- Comportement des solutions
- Comportement asymptotique en fonction des valeurs propres de la matrice

III Cas des coefficients non constants

A La dimension 1

Tout va bien :
- Wronskien
- Résolvante
- Lyapunov
- linéarisation, méthode d'abaissement de l'ordre ?

B La dimension supérieure

Les résultats sont uniquement qualitatifs.

Développements – Ricatti ? (Pommelet / X-ens)

- Cauchy-Lipschitz (Demailly)
- Lyapounov (Rouviere)
- Etude de $y'' + q(t)y = 0$ (Gonnord Tosel / Chambert-Loir analyse3)

30 Suites numériques. Convergence, valeur d'adhérence. Exemples et applications.(223)

31 Exemples de développements asymptotiques de suites de fonctions. (224)

32 Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$? Exemples et applications. (226)

Remarques du jury : $u_{n+1} = f(u_n)$. *Le jury attend d'autres exemples que la traditionnelle suite récurrente* $u_{n+1} = \sin(u_n)$. *Les suites homographiques réelles ou complexes fournissent des exemples intéressants, rarement évoqués. La méthode du gradient ou les méthodes de Jacobi ou de Gauss-Siedel fournissent des exemples naturels et utiles de suites vectorielles. Le théorème de Sharkovski sur l'itération des fonctions continues sur un intervalle est un résultat récent qui peut se traiter entièrement au niveau de l'agrégation, et il trouve sa place dans cette leçon. Les notions de point attractif ou répulsif sont essentielles et doivent être connues. Enfin les itérations matricielles ont leur place dans cette leçon.*

I Généralités

A Premières propriétés

- f croissante
- f décroissante
- f contractante

B Exemples classiques

- arithmétique
- géométrique
- arithmético-géométrique
- homographique
- simultanément récurrentes

II [Insert title here]

A Méthode de point fixe

- caractérisation
- Picard
- Cauchy-Lipshitz
- TIL/TFI
- Sarkovsky / Sharkovski ? (? ?) + Si pas de cycles d'ordre 2 alors la suite est convergente quelque soit le terme initial
- exemple $1 - \lambda x_n^2$

B Vitesse de convergence

- Développement asymptotique
- Autre chose ?

III Méthodes numériques

A Newton et sécante

B Gradients divers et variés

C Jacobi et Gauss-Siedel

Développements

- suites de polygones
- méthode de Newton
- $u_{n+1} = 1 - \lambda u_n^2$
- $f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + o(x^3)$
- Sharkovski
- Gradient
- classification des homographies
- invertion locale

33 Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications. (229)

34 Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples (230)

35 Méthodes d'approximation des solutions d'une équation $F(X) = 0$. Exemples.

36 Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables réelles. (236)

Remarques du jury : $\emptyset$

I Méthodes simples

A Primitives

$\int_0^p x^n dx$; $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2}$ + décompositions en éléments simples

B Intégration par partie

Wallis

C Changement de variables

- Intégrale de Dirichlet $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)dx = -\frac{\pi \log 2}{2}$
- Règles de Bioche
- Fonction rationnelle en e^x

II Calcul d'intégrales multiples

- Lemniscate de Bernouilli en polaire
- Intégrale double $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$
- "Couper en tranches" $\rightarrow$ paramétrisation de la surface ?
- Fubini

III Méthodes variationnelles

$f\colon x \in [0;\infty[\mapsto \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1} dt$ pour calculer l'intégrale de Gauss
+ autres exemples gourdon et Pommelet

IV Avec des séries

- Théorème de Hardy $\sum c_n$ série numérique convergente, alors $g\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, t \mapsto \sum \frac{c_n}{n!} t^n$ est bien définie, g continue sur $\mathbb{R}^+$ et $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\, g(t)dt = \sum c_n$ (Arnaudies et Fraysse 2)
- Utilisation du prolongement analytique (Obj agreg)
- intégrale de Dirichlet

V Formule des résidus

- indice d'un point par rapport à une courbe fermée
- def des résidus
- théoreme des résidus
- Formules de Compléments

VI Autres calculs

- Fresnel
- Transformée de fourier de $\Phi : x \mapsto \mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2}}$
- Intégrales à paramètres (ZQ)
- Inversion de Fourier

VII Méthodes approchées

- Méthodes composées (Crouzeix-Mignot)
- formules des trapezes (Demailly), formules des rectangles
- Méthode de Gauss (Crouzeix-Mignot)

Développements

- Rothstein Trager (Saux-Picart)
- Fresnel (Gourdon)
- fonction gamma
- Intégrale de Dirichlet (analyse 3)
- Formule des complément (Amar - Matheron) (fonction gamma)
- Lois Gamma, lois Beta (Cotterel - Duhamel)

- Phase stationnaire (rafinement de Lapalce, cas particulier de la méthode du col)
- Méthode de Laplace (Rouvière, ZQ)
- Inversion de Fourier (ZQ)
- Quadrature de Gauss (Demailly)
- Polya (Bénaim, El Karoui : Promenades aléatoires)
- Critère de Weyl (méthode de monté-Carlo) (x-ens an2)

37 Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications. (239)

Remarques du jury : *Cette leçon doit être enrichie par des études et méthodes asymptotiques et les transformations classiques (Fourier, Laplace, etc...)*

I Généralités

- Continuité, dérivabilité, dérivabilité n-ième, holomorphie + contre-exemple de Hauchecorne
- Cas semi-convergent
- Equivalent d'intégral
- Méthode du col / Laplace
- théorème de convergence dominée d'H.Lebesgue (Avez, analyse pour l'agreg interne)

II Applications

A Convolution

- Définitions
- Domaine de définition
- Dérivation
- Construction des fonctions plateaux

B Proba

- Fonction caractéristique
- Application au calcul des moments
- Application à la convergence

C Équations différentielles linéaire

- Intégrale de la résolvante etc..

D Opérateurs à noyaux

III Transformations classiques

A Laplace

- Définition
- Conséquence : Stirling
- Phase stationnaire

B Fourier

- Définition
- $L^1 \to$ fonction continues qui tendent vers 0 en l'∞
- Bijection de S sur S
- Inversion de fourier
- Application : Fonction d'Airy

Développements

- Calcul de l'intégrale de Dirichlet (Rudin)
- Densité des polynômes orthogonaux (Obj agreg)
- Espace de Bergman (Chambert loir, analyse 3)
- Exemple de Stoyanov (Ouvrard)
- Formule des compléments (Amar-Matheron)
- Formule d'inversion de Fourier (ZQ)
- Formule sommatoire de Poisson (ZQ et Gourdon)
- Intégrales de Fresnel (Oraux X-ENS, analyse 3)
- Méthode de la phase stationnaire (ZQ)
- Méthode de Laplace (ZQ)
- Prolongement de *zeta* Riemann (ZQ)
- Théorème de Newmann (ZQ)
- $f(x+1) = xf(x)$ $f(1) = 1$ et f convexe (Chambert-Loir, analyse 2)
- Prolongement de Γ (ZQ)
- Loi Γ (proba / Cotterel)

38 Produit de convolution, transformation de Fourier. Applications. (240)

39 Convergence des séries entières, propriété de la somme. Exemples et applications. (243)

40 Séries de Fourier. Exemples et applications. (246)

41 Espérance, variance et moments d'une variable aléatoire. (260)

I Généralités

A Définitions

- Espace de proba, variables aléatoires, intégrabilité
- Espérance, variance, moment
- Fonction caractéristique et lien avec les moments

B Cas des variables aléatoires à densités

- Gaussienne
- Cauchy
- Gamma

(exemple et adaptation des formules)

C Cas des variables aléatoires discrètes

- Bernouilli
- Poisson
- Binomiale
- Géométrique

II Convergence de variables aléatoire

A Définition

- Loi
- Proba
- L^p
- presque sûre

B Liens entre les différentes convergences

Implications et réciproques sous conditions particulières

C Inégalités et théorèmes classiques

- LGN
- TCL
- Jensen
- Minkowski / Young / Markov / Tchebitchev

III Applications

A A finir

BERNSTEIN (cf. OUVRARD / Pagès et Bouzitat)

Développements
- ?

42 Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications. (264)

43 Structures de données : exemples et applications. (901)

44 Diviser pour régner : exemples et applications. (902)

I Théorie

- principe : diviser, résoudre récursivement et recombiner
- théorème magique pour les complexités
- remarque : si les sous-problèmes se recoupent, il vaut mieux utiliser la programmation dynamique
- application à la théorie : théorème de Savitch

II Recherche et tris

- recherche dichotomique
- tri fusion
- tri rapide
- recherche du k-ème médian

III Multiplications

- d'entiers
- de matrices avec strassen
- remarque : des algos plus efficaces asymptotiquement que Strassen existent mais ils ont une constante prohibitive
- de polynômes avec FFT

IV Algorithmes géométriques

- points les plus rapprochés (attention aux pré-tris)
- enveloppe convexe (attention à pouvoir parler de Jarvis/Graham)
- diagrammes de voronoï
- approximation du voyageur de commerce euclidien via diviser pour régner [Moret-Shapiro]

45 Exemples d'algorithmes de tri. Complexité. (903)

I Théorie

- borne inférieure en $\Omega(n \ln(n))$
- réduction pour donner des bornes inférieures de complexités (ex : enveloppe convexe)

II Exemples

- tri cératops
- tri par insertion
- tri bulle
- tri fusion
- tri rapide
- tri par tas
- tri shell
- ...

III Tris linéaires

- tri par dénombrement
- tri par paquets
- pourquoi ça ne contredit pas la borne inf

IV Tri selon un ordre partiel

tri topologique

46 Programmation dynamique : exemples et applications. (906)

I Présentation du paradigme

Papadimitriou représentation des calculs par un graphe de dépendance

- condition nécessaire : une sous-solution d'une solution optimale est optimale pour le sous-problème
- mémoïzation VS programmation dynamique
- exemple : longueur dans un DAG

II Algorithmique du texte

- distance d'édition
- plus longue sous-séquence commune (application au problème de la plus courte sur-séquence commune)
- mise en page (justification) d'un paragraphe de texte
- arbres binaires de recherche optimaux pour la construction de dictionnaires
- algorithme de Cocke-Younger-Kasami pour l'analyse syntaxique naïve

III Autres exemples

- algorithme de Floyd-Warshall : applications en changeant de dioïde
- multiplications de matrices en chaîne

IV Résolution de problèmes NP-complets

- problème du sac à dos (algorithme pseudopolynomial)
- couverture de sommets d'arbres

47 Algorithmique du texte : exemples et applications. (907)

I Recherche de motifs

- recherche naïve
- automate des occurrences
- (Knuth-)Morris-Pratt
- recherche d'expression régulière

II Distances

- distance d'édition/Levenstein
- plus longue sous-séquence commune (lien avec les distances), application à la plus courte sur-séquence commune
- distance de Hamming (et codes correcteurs)

III Autres algos

- Construction de dictionnaires (arbres binaires de recherche optimaux)
- algo de prog dyn pour la mise en page/justification de texte

IV Analyse lexicale et syntaxique

- blabla compilation
- analyse lexicale : principe, utilisation d'automates. Ex : expression régulière pour les flottants
- analyse syntaxique : algo naïf CYK, ensembles Premier et Suivant, table d'analyse, grammaires LL(k)

48 Langages rationnels. Exemples et applications. (909)

I Expressions régulières

- définition inductive, langage associé à une expression régulière.
- résiduel d'un langage par rapport à un mot, caractérisation des langages rationnels avec les résiduels

II Automates finis

- définition (idée : première modélisation de machines)
- déterminisme, complétude, langage reconnu
- algos de déterminisation/complétion
- ε-transitions et éliminations
- congruences, Nérode, minimisation (Hopcroft)
- lemme d'Arden
- équivalence entre langage rationnel et langage reconnu par automate (Kleene et algorithme de McNaughton-Yamada)
- app : Lemmes de l'étoile, exemples de langages non rationnels, décidabilité du problème du mot, de l'équivalence d'expressions régulières. Attention : complexité de l'équivalence de regexp sous certaines restrictions syntaxiques (cf Papadimitriou)
- problème de séparation par automate

III Applications

- stabilité par intersection/complémentaire
- recherche de motifs : automate des occurrences et algo de Morris Pratt
- analyse lexicale
- décidabilité de l'arithmétique de Presburger

49 Langages algébriques. Exemples et applications. (910)

I Grammaires et langages algébriques

- définitions : grammaires, arbres de dérivation, langages algébriques. Rationnel $\Rightarrow$ algébrique. Exemple de langage algébrique non rationnel.
- formes normales de Greibach, Chomsky.
- ambiguité, propreté, exemples ($S \to a|\neg S|(S\alpha S)$ non ambiguë, thm de lecture unique)
- lemmes d'Ogden, non stabilité par intersection.
- problèmes décidables et indécidables : problème du mot et CYK, réduction de PCP

II Automates à pile

- automates à piles, définitions, reconnaissance par pile vide ou par état final. Équivalence entre les modes d'acceptation. Pourquoi une pile ? Que se passe-t-il si on rajoute d'autres piles ?
- équivalence entre langage algébrique et reconnaissance par automate à pile
- automates déterministes. On ne peut pas toujours s'y ramener.

III Analyse syntaxique

- idée, CYK en tant qu'algo naïf
- ensembles Premiers et Suivants, table d'analyse, grammaires $LL(k)$
- analyse descendante et automates à pile

50 Fonctions récursives primitives et non primitives. Exemples (912)

I Fonctions récursives primitives

- justifier qu'on étudie des fonctions $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$
- fonctions PR de base : successeur, 0 et projections
- schémas de composition et de récursion primitives
- prédicats PR
- exemples : $+, -, , \uparrow$ puissances, conditions, minimisation bornée

II Fonctions récursives

- existence de fonctions calculables non PR : diagonalisation et Ackermann
- ajout de la minimisation non bornée, prédicats sûrs, fonctions récursives totales et partielles
- rediagonaliser ? oui on obtient une fonction non récursive, mais elle n'est pas calculable par procédure effective, donc on n'a pas de contradiction avec la thèse de Turing Church (castor affairé)

III Équivalence avec d'autres modèles de calcul

- équivalence avec MT
- définition R et RE, caractérisations des langages RE

51 Machines de Turing. Applications. (913)

I Machines de Turing

- définition avec l'heptuplet, déteminisme, configuration, calcul, langages accepté et décidé
- exemple de vraie machine, $\{a^n b^n c^n, n \geqslant 0\}$ n'est pas algébrique mais reconnu par MT
- modèles équivalents : ruban bi infini, plusieurs rubans, déterminisation, machines à RAM (faire le lien avec les ordis), machines universelles (lien avec les machines virtuelles, bytecode, java)
- thèse de Church Turing, fonctions calculables par MT, équivalence avec les fonctions récursives

II Décidabilité et indécidabilité

- ensembles R, $(co-)RE$, stabilité par $\cap, \cup$
- langages $L_\in$, LU
- réduction, utilisation pour prouver la décidabilité/indécidabilité
- app : problème de l'arrêt, théorème de Rice
- ex : pavages, PCP, Presburger
- énumérateurs (hiérarchiques ou non), équivalences avec RE et R
- caractérisations des RE avec des fonctions (P)R

III Complexité

- définitions des complexités spatiale et temporelle, inégalités entre les deux, thm d'accélération (qui justifie les $O(f(n))$)
- changement de modèles : évolution des complexités quand on passe à k bandes, à un ruban bi-infini, à une machine déterministe (Savitch)
- classes de complexités, inclusions habituelles
- caractérisation de NP avec un vérificateur en temps polynomial, réductions, NP-complétude, théorème de Cook, ex de pbs NP(-complets)
- classes duales, PSPACE=NPSPACE par Savitch
- classe L et NL, besoin de faire des hypothèses sur les MT (ruban d'entrée et de sortie)

52 Décidabilité et indécidabilité. Exemples. (914)

I Définitions et premiers exemples

- R, RE, propriétés de base
- $L_\in$, LU premiers langages indécidables
- principe de réduction
- ex : problèmes de l'arrêt (universel, existentiel, sur mot vide)

II (In)décidabilité de théories logiques

- décidabilité d'une théorie, propriétés de base (complet et récursif implique décidable)
- Presburger est décidable (attention quand même à la complexité)
- théorie de l'égalité et théorème de Church (toute théorie contenant l'égalité et au moins un autre prédicat binaire est indécidable)
- arithmétique de Péano, théorème de Gödel

III Problèmes (in)décidables sur les langages

- PCP, problèmes indécidables sur les grammaires
- CYK : décidabilité du problème du mot sur les grammaires algébriques
- sur les automates quasi tout est décidable
- équivalences d'expressions régulières (?)

IV Autres

- terminaison d'un système de réécriture
- problèmes de pavage

53 Classes de complexité : exemples. (915)

I Généralités

- définition des complexités spatiale et temporelle, inégalités habituelles
- théorème d'accélération
- évolution de la complexité quand on change de modèle (ruban bi-infini, k bandes, déterminisation, Savitch)
- définition des classes, conséquences de Savitch
- Si P=NP, EXPTIME=NEXPTIME
- classes duales, inclusions entre les classes
- gap theorem pour les inclusions strictes
- problèmes C-difficiles et C-complets, réductions

II P et NP

- caractérisation de NP avec les vérificateurs, L est NP-complet ssi $\overline{L}$ est co-NP-complet
- savoir si un entier est premier est P, le problème du mot pour les grammaires algébrique est P
- déterminer la valeur de sortie d'un circuit logique est P-complet
- théorème de cook, 2-SAT est P, autres problèmes logiques NP-complets
- l'équivalence d'espressions régulières sans est co-NP-complet
- problèmes NP sur les graphes : clique, couverture de sommets, chemin hamiltonien, voyageur de commerce, nombre chromatique
- programmation linéaire est P, en nombres entiers ça devient NP-complet
- la somme de sous-ensemble est NP-complet

III L, NL et co-NL

- adaptation des machines avec bande d'entrée, de travail et de sortie, définitions des classes
- NL-complétude, NL=co-NL

IV Au delà de NP

- problèmes PSPACE-complets : QBF-SAT, universalité d'un automate fini, acceptation en place, équivalence d'expression régulières
- le jeu de Go est PSPACE-dur et PSPACE-complet si on borne le nombre d'états
- caractérisation de NEXPTIME avec un vérificateur en temps exponentiel
- la satisfiabilité de formules du premier ordre prénexe de la forme $\exists^*\forall\exists^*$ (resp. $\exists^*\forall\forall\exists^*$ ou $\exists^*\forall^*$) est EXPTIME-complet (resp. NEXPTIME-complet).
- savoir si le carré nn est pavable avec les tuiles d'un ensemble T est NEXPTIME-complet
- l'équivalence d'expressions régulières avec ^{2} et sans * est co-NEXPTIME-complet
- les problèmes NP-complets donnent des problèmes NEXPTIME-complets quand on compresse l'entrée
- un problème EXPSPACE-complet : l'équivalence d'expressions régulières avec ^{2} et *.

54 Formules du calcul propositionnel : représentation, formes normales, satisfiabilité. Applications. (916)

I Syntaxe

- définition inductive, vision top down ou bottom up
- hauteur d'un terme
- théorème de lecture unique
- substitutions

II Sémantique

- valuation $V \to \{0,1\}$, extension d'une valuation aux formules
- satisfiabilité, tautologie, contradiction, équivalence sémantique
- théorème de compacité et applications
- équisatisfiabilité
- mise sous FNC, FND
- expansion de Shannon, forme if-then-else, diagrammes de décision binaires (ordonnés, réduits)
- le problème SAT, théorème de Cook, exemples d'algorithmes de résolutions de SAT
- 2-SAT, HORNSAT sont résolubles en temps polynomial
- encodage de problèmes dans SAT (ex : problèmes des n-dames)

III Systèmes de déduction

- clauses, règle de coupure, preuve par coupure, correction et complétude
- déduction naturelle : règles des logiques NM, NJ et NK
- NK est complète, les trois sont correctes
- NK est strictement plus forte que NJ (loi de Pierce)

55 Logique du premier ordre : syntaxe et sémantique. (917)

56 Systèmes formels de preuves en logique du premier ordre : exemples. (918)

57 Unification : algorithmes et applications. (919)

58 Réécriture et formes normales. Exemples. (920)

59 Algorithmes de recherche et structures de données associées. (921)

60 Ensembles récursifs, récursivement énumérables. Exemples. (922)

61 Analyses lexicale et syntaxique : applications. (923)

62 Théories et modèles en logique du premier ordre. Exemples. (924)

63 Graphes : représentations et algorithmes. (925)

64 Analyse des algorithmes : complexité. Exemples. (926)

65 Exemples de preuve d'algorithme : correction, terminaison. (927)

66 Problèmes NP-complets : exemples de réductions. (928)

67 Couplage

104 Groupes finis. Exemples et applications.

Théorème de Burnside /

105 Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.

Théorème de Brauer / Frobenius Zolotarev (?)

106 Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E , sous-groupes de GL(E). Applications.

$\mathrm{SO}(n)/\,\mathrm{SO}(n-1) \simeq S^{n-1}$ / Transvection / Burnside / Frobenius Zolotarev

108 Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

Transvection /

120 Anneaux Z/nZ. Applications.

Théoreme de Gauss polynômes constructibles / Frob Zolotarev

121 Nombres premiers. Applications.

123 Corps finis. Applications.

Frobenius Zolotarev /

141 Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.

150 Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.

151 Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

Extremas liés / Endomorphisme de Mn préservant GLn /Commutant d'un endomorphisme

152 Déterminant. Exemples et applications.

Frobenius Zolotarev / Muntz / Loewner / Résultant/ Suite de polygone (?)

153 Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

Burnside / Sous espace de C(R,C) stables par translation / Dunford effective / Commutant d'un endomorphisme

157 Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

Burnside / Dunford effective / Endo de Mn préservant GL

159 Formes linéaires et hyperplans en dimension finie. Exemples et applications.

Transvections / Enveloppe convexe de O(n) / Courant Fisher ? / Extremas liés / Hahn Banach géométrique

162 Systèmes d'équations linéaires ; opérations, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.

170 Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.

John Loewner / Lemme de Morse / Comptage de racine (?)

181 Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications.

Thorème de Gauss pour les polynômes constructibles / suite de polygones / Enveloppe convexe de O(n) / Hahn Banach géométrique

182 Applications des nombres complexes à la géométrie.

Théorème de Gauss pour les polynômes constructibles / suite de polygones / Automorphisme du disque unité / Théorème de Jordan

183 Utilisation des groupes en géométrie.

Quaternions sur R3 / Coloriages / SO(n)/SO(n-1)

190 Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

Nombre de Bell ou de Catalan /

203 Utilisation de la notion de compacité.

Théorème de Jordan

206 Théorèmes de point fixe. Exemples et applications.

208 Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

Hahn Banach / Densité des polynômes orthogonaux /

214 Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications.

Différentielle isométrie (Gourdon ?) /

215 Applications différentiables définies sur un ouvert de Rn . Exemples et applications.

Extrema liés / Différentielle isométrie / Morse / rang constant

218 Applications des formules de TAYLOR.

219 Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications

220 Équations différentielles X = f (t , X). Exemples d'étude des solutions en dimension 1 et 2.

221 Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

Sous espace de C(R,C) stables par translation / Cauchy Lipschitz / y"+q(t)y=0

223 Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.

Newton / Fraction continues / Sarkowskii ?

224 Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.

226 Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence u n+1 = f (u n). Exemples et appli- cations.

Sarkovskii / Fractions continues / Newton

229 Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

230 Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

232 Méthodes d'approximation des solutions d'une équation F (X) = 0. Exemples.

236 Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables réelles.

Rothstein Trager / Loi Gamma ? / Formule des compléments

239 Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

Formunes des compléments / Densité des polynômes orthogonaux /

240 Produit de convolution, transformation de FOURIER. Applications.

243 Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

Nombre de Bell ou Catalan / Théorème de Bernstein + exemple ?

246 Séries de FOURIER. Exemples et applications.

260 Espérance, variance et moments d'une variable aléatoire.

Loi Gamma ? / Bernstein ?

264 Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.