Caractérisation des langages RE

Pierron Théo

1er juillet 2014

Théorème *Soit $A \subset \mathbb{N}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $A \in RE$ *(il existe une MT qui accepte A)*

(ii) $A = \varnothing$ *ou A est l'image d'une fonction primitive récursive*

(iii) *A est l'image d'une fonction μ-récursive*

(iv) $A = \pi_2^2(B)$ *avec $B \subset \mathbb{N}^2$ primitif récursif*

Démonstration.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Si $A \neq \varnothing$, il existe $n \in A$. Soit M une machine de Turing qui accepte les éléments de A. On définit le prédicat

$$B(t, x) = \text{« } M \text{ s'arrête en } t \text{ étapes sur } x \text{ »}$$

qui est primitif récursif : $1_F(\text{config}(t, \text{init}(x)))$.
Soit $k \mapsto (t_k, x_k)$ une bijection primitive récursive de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}^2$. Alors $\{k \in \mathbb{N}, B(t_k, x_k)\}$ est un ensemble primitif récursif. On définit alors la fonction

$$f(k) = \begin{cases} x_k & \text{si } B(t_k, x_k) \\ n & \text{sinon} \end{cases}$$

On a

$$x \in A \quad \text{ssi} \quad \exists t, B(t, x) \quad \text{ssi} \quad \exists k, x = x_k \text{ et } B(t_k, x_k) \quad \text{ssi} \quad \exists k, x = f(k) \quad \text{ssi} \quad x \in \text{Im}(f)$$

Donc A est l'image d'une fonction primitive récursive.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Si $A = \text{Im}(f)$ avec f primitive récursive, f est μ-récursive.
Sinon, $A = \varnothing$ est l'image de $x \mapsto \mu y(y + 1 = 0)$ qui est μ-récursive.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Si $A = \text{Im}(f)$ avec f μ-récursive, il existe M machine de Turing qui calcule f. On définit alors le prédicat :

$$C(t, x, a) = \text{« } M \text{ s'arrête en } t \text{ étapes sur } a \text{ à partir de } x \text{ »}$$

qui est primitif récursif par minimisation bornée :

$$a = \text{sortie}(\text{config}(\text{init}(x), \mu(i \leqslant t)(1_F(\text{config}(\text{init}(x), i)))))$$

Alors, si $G = \{(k, a), C(t_k, x_k, a)\}$ (primitif récursif), on a

$$a \in A \quad \text{ssi} \quad \exists (t, x), C(t, x, a) \quad \text{ssi} \quad \exists k, C(t_k, x_k, a) \quad \text{ssi} \quad \exists k, (k, a) \in G$$

Donc $A = \pi_2^2(G)$.

(iv) $\Rightarrow$ (i) Si $A = \pi_2^2(B)$ avec $B \subset \mathbb{N}^2$ primitif récursif, alors on doit définir une machine de Turing qui accepte les éléments de A.
La machine qui, sur une entrée x :

- énumère les (t_k, x_k)
- accepte si $x = x_k$ et si $(t_k, x_k) \in B$

accepte uniquement les éléments de A. (On peut aussi prendre une machine qui calcule la fonction récursive : $x \mapsto \mu y((x,y) \in B)$.) ■

Remarque *On peut définir une bijection primitive récursive de* $\mathbb{N}$ *sur* $\mathbb{N}^2$ *à partir des fonctions PR suivantes :*

$$\mathrm{diag}(n) = \mu(i \leqslant n)\left(\frac{i(i+1)}{2} > n\right) - 1$$

$$\mathrm{ecart}(n) = n - \frac{\mathrm{diag}(n)(\mathrm{diag}(n)+1)}{2}$$

Alors $n \mapsto (\mathrm{diag}(n), \mathrm{ecart}(n))$ *est primitive récursive et bien bijective car sa réciproque est* $(t,x) \mapsto \frac{t(t+1)}{2} + x$*.*