Lowenheim-Skolem

Pierron Théo

12 avril 2014

<u>Théorème</u> *Soit L un langage du premier ordre, T une théorie sur L ayant un modèle infini. Alors T a un modèle dénombrable.*

Démonstration. Soit $\mathfrak{M}$ un modèle infini de L tel que $\mathfrak{M} \vDash T$ et $P \subset M$.

- On construit un modèle $\mathfrak{N}$.
  Pour toute formule à n variables libres de la forme $\exists xF$ et tout n-uplet $(a_1, \dots, a_n) \in P^n$ tels que $\mathfrak{M}[x_i := a_i] \vDash \exists xF$, on sait qu'il existe $e_{a_1,\dots,a_n,F} \in M$ tel que
  $$\mathfrak{M}[x_i := a_i, x := e_{a_1,\dots,a_n,F}] \vDash F$$
  On note $E(P) = \{e_{a_1,\dots,a_n,F} \text{ pour } a_1, \dots, a_n \text{ et } F \text{ comme précédemment}\}$.
  Soit $a \in M$. On pose $X_0 = \{a\} \cup \{f_{\mathfrak{M}}, f \in \mathcal{F}_0\}$ et $X_n = X_{n-1} \cup E(X_{n-1})$. On définit aussi $N = \bigcup\limits_{n \geqslant 0} X_n$.
  On munit N d'une structure de modèle $\mathfrak{N}$ en posant $R_{\mathfrak{N}} = R_{\mathfrak{M}} \cap N^m$ pour tout symbole de relation d'arité m dans L et $f_{\mathfrak{N}} = f_{\mathfrak{M}}|_{N^m}$ pour tout symbole de fonction d'arité m dans L.
- On montre que $\mathfrak{N}$ est un modèle, c'est-à-dire qu'on vérifie que $f_{\mathfrak{N}}$ (d'arité n) est à valeurs dans N. Soit $a_1, \dots, a_n \in N^n$ et F la formule $x \simeq fx_1 \dots x_n$. Alors
  $$\mathfrak{M}[x_i := a_i, x := f_{\mathfrak{M}}(a_1, \dots, a_n)] \vDash F \text{ donc } \mathfrak{M}[x_i := a_i] \vDash \exists xF$$
  Par définition de N, il existe p tel que tous les a_i soient dans X_p. Alors $f_{\mathfrak{N}}(a_1, \dots, a_n) = f_{\mathfrak{M}}(a_1, \dots, a_n) \in E(X_p) \subset N$.
  Donc $f_{\mathfrak{N}}$ est à valeurs dans N est $\mathfrak{N}$ est un modèle.
- Montrons que N est dénombrable.
  X_0 est dénombrable car X_0 l'est. De plus, si X_n est dénombrable, $E(X_n)$ l'est car il contient au plus un élément par formule et par k-uplet de X_n (où k est le nombre de symboles $\forall$ avant le premier $\exists$ de F. X_{n+1} est donc dénombrable.
  N est une union dénombrable d'ensembles dénombrables donc N est dénombrable.
- On montre que $\mathfrak{N} \vDash T$. En va en fait montrer par induction la proposition suivante : Pour tout $a_1, \dots, a_n \in N^n$ et F à n variables libres, $\mathfrak{M}[x_i := a_i] \vDash F$ ssi $\mathfrak{N}[x_i := a_i] \vDash F$.
  Si $F = Rt_1 \dots t_s$ avec t_i des termes clos, comme $a_i \in N$ et $R_{\mathfrak{N}} = R_{\mathfrak{M}} \cap N^s$, on a bien le résultat.
  Si $F = \neg G$ ou $F = (G\alpha H)$, c'est bon.
  Si $F = \forall xG$, on se ramène au cas $\neg\exists x \neg F$.
  Si $F = \exists xG$, alors on prouve une double implication : Si $\mathfrak{N}[x_i := a_i] \vDash F$, alors il existe $a \in N$ tel que $\mathfrak{N}[x_i := a_i, x := a] \vDash G$ donc $\mathfrak{M}[x_i := a_i, x := a] \vDash G$ donc $\mathfrak{M}[x_i := a_i] \vDash F$.
  Si $\mathfrak{M}[x_i := a_i] \vDash \exists xG$, alors $\mathfrak{M}[x_i := a_i, x := e_{a_1,\dots,a_n,G}] \vDash G$ donc $\mathfrak{N}[x_i := a_i, x := e_{a_1,\dots,a_n,G}] \vDash G$ donc $\mathfrak{N}[x_i := a_i] \vDash F$ (car $e_{a_1,\dots,a_n,G} \in N$).
- Si N est fini, on considère la suite de formule $(F_n)_n$ telle que F_n exprime que le domaine du modèle a au moins n éléments. $\mathfrak{M}$ est un modèle infini donc $\mathfrak{M} \vDash T \cup \{F_n, n \in \mathbb{N}\}$. Alors la construction précédente fournit $\mathfrak{N}$ au plus dénombrable tel que $\mathfrak{N} \vDash T \cup \{F_n, n \in \mathbb{N}\}$.

Alors pour tout n, $\mathfrak{N} \vDash F_n$ donc N est infini et de plus $\mathfrak{N} \vDash T$. On a donc construit un modèle de T exactement dénombrable. $\blacksquare$