Développement : Tri topologique

PIERRON Théo – LACOSTE Cyril

1er novembre 2013

On rappelle l'algorithme de parcours en profondeur d'un graphe $G = (S, A)$.

Algorithme 1: parcours(G)

Entrées : Un graphe G
Sorties : Un parcours de G représenté par la donnée de $u.d$ et $u.f$ pour chaque $u \in S$

```
date := 0
Marquer tous les sommets en blanc.
pour u ∈ S faire
    si u est blanc alors
        visiter(G, u)
```

Algorithme 2: visiter(G, u)

Entrées : Un graphe G et un sommet u
Sorties : $v.d$ et $v.f$ pour tout successeur v de u

```
date := date + 1
u.d := date
Marquer u en gris.
pour v ∈ S tel que (u, v) ∈ A faire
    si v est blanc alors
        visiter(G, v)
Marquer u en noir.
date := date + 1
u.f := date
```

Proposition 1 Soit G un graphe, $u, v \in S$. Alors $[u.d, u.f]$ et $[v.d, v.f]$ sont disjoints ou inclus l'un dans l'autre.

Démonstration. Par symétrie, on peut supposer $u.d < v.d$.

- Si $v.d < u.f$, v a été découvert quand u était gris donc v est un descendant de u. Or on termine l'appel à visiter(G, v) avant de terminer l'appel de visiter(G, u), c'est à dire que $v.f < u.f$. Alors $[v.d, v.f] \subset [u.d, u.f]$.
- Sinon, on a $u.d < u.f < v.d < v.f$, ie $[u.d, u.f]$ et $[v.d, v.f]$ sont disjoints. ∎

Soit G un graphe orienté acyclique. L'ordre partiel sur S associé à G est donné par $u <_G v$ ssi $(u, v) \in S$. On veut trier les sommets selon l'ordre $<_G$. Comme l'ordre est partiel, plusieurs résultats sont possibles.

Pour ce faire, on va trouver un ordre total $<$ sur S qui prolonge $<_G$. Pour le trouver, on effectue un parcours en profondeur et on dira que $u < v$ ssi $u.f > v.f$. On va donc trier selon les dates de post-visite.

Algorithme 3: Tri_topologique(G)

Entrées : Un graphe orienté acyclique G

Sorties : La liste des sommets telle que pour tout $u, v \in S$ comparables pour $<_G$, u apparaît avant v ssi $u <_G v$

Appeler parcourir(G) pour obtenir les $u.f$, $u \in S$.

Quand on marque un sommet en noir, on l'ajoute en tête d'une liste l.

retourner l

Proposition 2 L'algorithme est correct.

Démonstration. On doit montrer que s'il existe un arc de u à v alors $u.f > v.f$. Soit $(u, v) \in A$. Quand l'arête (u, v) est parcourue, on a trois cas :

- v est gris : dans ce cas, v est un ancêtre de u donc G aurait un cycle. Contradiction
- v est blanc : dans ce cas, v est un descendant de u donc $[v.d, v.f] \subset [u.d, u.f]$ et $v.f < u.f$
- v est noir : $v.f$ est déjà déterminé, mais pas $u.f$. Comme *date* est croissante, $u.f > v.f$ ∎

Un exemple : la recette du tiramisù.

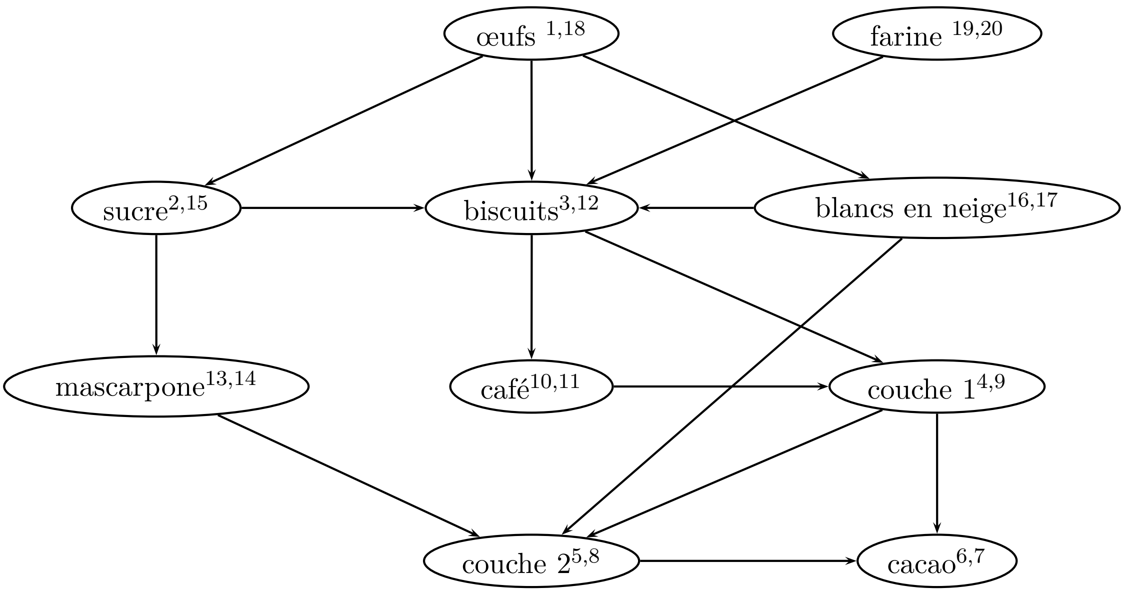

Figure 1 – Les dépendances de la recette

Ce parcours nous donne l'ordre : farine $<$ œufs $<$ blancs $<$ sucre $<$ mascarpone $<$ biscuits $<$ café $<$ couche 1 $<$ couche 2 $<$ cacao.