# Développement : Unification

Pierron Théo

13 avril 2014

On montre la correction et la terminaison de l'algorithme d'unification suivant :

---

**Algorithme 1:** Unification

---

**Entrées** : $E$ un ensemble d'équations
**Sorties** : $\sigma$ un unificateur principal de $E$ s'il existe ou un échec

$\sigma \leftarrow \mathrm{Id}$
**tant que** $E \neq \varnothing$ **faire**
  **si** $E = E' \cup \{f(u_1, \dots, u_p) \simeq g(v_1, \dots, v_q)\}$ **alors**
    **si** $f = g$ *(donc $p = q$)* **alors**
      $E \leftarrow E' \cup \{u_1 \simeq v_1, \dots, u_p \simeq v_p\}$
    **sinon**
      **retourner** *Échec 1*
  **si** $E = E' \cup \{x \simeq x\}$ **alors**
    $E \leftarrow E'$
  **si** $E = E' \cup \{x \simeq u\}$ *ou $u \simeq x$ avec $x \neq u$ et $x$ variable* **alors**
    **si** $x \notin u$ **alors**
      $\sigma \leftarrow [x := u] \circ \sigma$;
      $E \leftarrow E'[x := u]$
    **sinon**
      **retourner** *Échec 2*
**retourner** $\sigma$

---

**Lemme**
Si $x[\sigma] = u[\sigma]$, alors $\sigma = \sigma \circ [x := u]$.

*Démonstration.* Soit $\sigma' = \sigma \circ [x := u]$. Alors

$$x[\sigma'] = x[x := u][\sigma] = u[\sigma] = x[\sigma]$$

et pour tout variable $y \neq x$,

$$y[\sigma'] = y[x := u][\sigma] = y[\sigma]$$

Donc $\sigma = \sigma'$. ∎

À partir de maintenant, on note (lorsque que c'est bien défini) $E_n$ et $\sigma_n$ les valeurs de $E$ et $\sigma$ au $n$-ème tour de boucle.

**Proposition 1** L'algorithme termine.

*Démonstration.* On définit $a_n$ (resp. $b_n$) le nombre de variables (resp. de symboles de fonctions) apparaissant dans $E_n$ et $c_n = |E_n|$.

On suppose qu'il n'y a pas d'échec (sinon ça termine évidemment) Dans le premier cas, $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} < b_n$.

Dans le deuxième cas, $a_{n+1} \leqslant a_n$, $b_{n+1} = b_n$ et $c_{n+1} < c_n$.

Dans le troisième cas, $a_{n+1} < a_n$.

Comme l'ordre lexicographique sur $\mathbb{N}^3$ est bien fondé, et que la suite $(a_n, b_n, c_n)_n$ est décroissante strictement pour cet ordre, l'algorithme termine. ∎

**Proposition 2** L'algorithme est correct, il renvoie un échec si et seulement si $E$ n'est pas unifiable. Si $E$ est unifiable, la sortie est un unificateur principal.

*Démonstration.* On définit $H_n$ : Si $E_n$ et $\sigma_n$ sont bien définis, $\sigma$ unifie $E$ ssi il existe $\sigma'$ qui unifie $E_n$ tel que $\sigma = \sigma' \circ \sigma_n$.

- Initialisation : $\sigma_0 = \mathrm{Id}$, $E_0 = E$ donc $H_0$ est claire.
- Supposons $H_n$ vraie et $E_{n+1}$, $\sigma_{n+1}$ bien définis. Soit $\sigma$ une substitution.
  Premier cas : $\sigma_{n+1} = \sigma_n$ donc $\sigma$ unifie $E$ ssi il existe $\sigma'$ unifiant $E_n$ tel que $\sigma = \sigma'\sigma_n$. Ce $\sigma'$ doit nécessairement unifier $E_{n+1}$ et on a $\sigma = \sigma'\sigma_{n+1}$. D'où $H_{n+1}$.
  Deuxième cas : Immédiat.
  Troisième cas : Si $\sigma''$ unifie $E_{n+1}$ alors $\sigma' := \sigma'' \circ [x := u]$ unifie $E_n$ et $\sigma = \sigma' \circ \sigma_n = \sigma'' \circ \sigma_{n+1}$.
  Réciproquement, si $\sigma'$ unifie $E_n$, $\sigma'(u) = \sigma'(x)$ donc $\sigma' = \sigma' \circ [x := u]$. Alors
  $$\sigma = \sigma' \circ \sigma_n = \sigma' \circ [x := u] \circ \sigma_n = \sigma' \circ \sigma_{n+1}$$
  Donc $\sigma$ unifie $E$ ssi il existe $\sigma'$ unifiant $E_n$ tel que $\sigma = \sigma' \circ \sigma_n$ ssi il existe $\sigma''$ unifiant $E_{n+1}$ tel que $\sigma = \sigma'' \circ \sigma_{n+1}$.
  D'où $H_{n+1}$.

Soit $n$ la dernière étape. Si $E_n = \varnothing$, alors Id unifie $E_n$ donc $\sigma_n$ unifie $E$.

De plus, si $\sigma$ unifie $E$, il existe $\sigma'$ tel que $\sigma = \sigma' \circ \sigma_n$ donc $\sigma$ est un unificateur principal.

Si on a un échec de type 1, $E_n$ contient $f(u_1, \ldots, u_p) \simeq g(v_1, \ldots, v_q)$ avec $f \neq g$ donc $E_n$ n'est pas unifiable donc $(H_n)$ $E$ non plus.

De même si on a un échec de type 2, $E_n$ contient un $x \simeq u$ avec $u \neq x$ et $x \in u$. Alors pour tout $\sigma$, $|x[\sigma]| < |u[\sigma]|$ donc $x[\sigma] \neq u[\sigma]$. Donc $E_n$ et $E$ ne sont pas unifiables. ∎