Théorème de Banach-Steinhaus et application

Pierron Théo

8 juin 2014

<u>Théorème 1</u> Baire *Soit* (E,d) *un espace métrique complet et* (Ω_n) *une suite d'ouverts denses de* E*. Alors* $\displaystyle\bigcap_{n=0}^{\infty}\Omega_n$ *est un ouvert dense.*

<u>Théorème 2</u> Banach-Steinhaus *Soit* E *un Banach,* F *un evn. Soit* $H \subset L_c(E,F)$*. Alors soit* $(\|f\|)_{f\in H}$ *est bornée, soit il existe* $x \in E$ *tel que* $\sup_{f\in H}\|f(x)\| = \infty$*.*

Démonstration. Soit $\Omega_k = \{x \in E, \forall f \in H, \|f(x)\| > k\}$. Alors

$$\Omega_k = \bigcup_{f\in H}\{x \in E, \|f(x)\| > k\}$$

Ω_k est donc ouvert en tant qu'union d'images réciproques des ouverts $]k,\infty[$ par $x \mapsto \|f(x)\|$.

Si pour tout k, Ω_k est dense, l'intersection des Ω_k est dense donc non vide. Il existe donc $x \in E$ tel que $\sup\limits_{f\in H}\|f(x)\| = \infty$.

Sinon, il existe k tel que Ω_k ne soit pas dense. Il existe donc $x_0 \in E$ et $r > 0$ tel que $B(x_0,r)\cap\Omega_k = \varnothing$.

Donc pour tout x vérifiant $\|x\| < r$, on a pour $f \in H$, $\|f(x)\| \leqslant \|f(x+x_0)\| + \|f(x_0)\| \leqslant 2k$.

Par continuité de f, cette égalité reste vraie si $\|x\| \leqslant r$. Donc pour tout $x \in \overline{B}(0,1)$ et $f \in H$, on a

$$\|f(x)\| = \frac{1}{r}\|f(rx)\| \leqslant \frac{2k}{r}$$

Ainsi, $\|f\| \leqslant \frac{2k}{r}$. ∎

<u>Théorème 3</u> *Soit* $C_{2\pi}$ *l'ensemble des fonctions* $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *continues* 2π*-périodiques, muni de la norme* $\sup_{[-\pi,\pi]}|f|$*.*

Il existe $f \in C_{2\pi}$ *différente de sa série de Fourier.*

Démonstration. Pour tout $p \in \mathbb{Z}$, on définit $c_p(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{e}^{-ipt}\,\mathrm{d}t$.

$$l_n : \begin{cases} C_{2\pi} & \to & \mathbb{C} \\ f & \mapsto & \displaystyle\sum_{p=-n}^{n} c_p(f) \end{cases}$$

l_n est linéaire et on a

$$l_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sum_{p=-n}^{n}\mathrm{e}^{-ipt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\underbrace{\frac{\sin(\frac{2n+1}{2}t)}{\sin(\frac{t}{2})}}_{D_n(t)}\,\mathrm{d}t$$

On a $|l_n(f)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\|f\|_\infty\int_{-\pi}^{\pi}|D_n(t)|\,\mathrm{d}t$. Soit $\varepsilon > 0$ et

$$f_\varepsilon : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \frac{D_n(t)}{|D_n(t)|+\varepsilon} \end{cases}$$

Alors $\|f_\varepsilon\| \leqslant 1$, $D_n f_\varepsilon$ converge simplement vers $|D_n(t)|$ quand $\varepsilon \to 0$ et

$$|D_n(t) f_\varepsilon(t)| \leqslant |D_n(t)|$$

qui est intégrable sur $[-\pi, \pi]$ (continue en 0). Ainsi,

$$|l_n(f_\varepsilon)| \to \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| \,\mathrm{d}t$$

Donc

$$\|l_n\| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| \,\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left| \frac{\sin(\frac{2n+1}{2}t)}{\frac{t}{2}} \right| \mathrm{d}t = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{2n+1}{2}\pi} \left| \frac{\sin u}{u} \right| \mathrm{d}u \to \infty$$

$C_{2\pi}$ est fermé dans $B(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ qui est complet donc par Banach-Steinhaus, il existe $f \in C_{2\pi}$ tel que $\sup_n |l_n(f)| = \infty$.

Donc $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) \mathrm{e}^{inx}$ diverge en $x = 0$ donc f est différente de sa série de Fourier. ■

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} \sin\left(\frac{2^{p^3}+1}{2} x \right)$$