Nombres de Bell

Pierron Théo

10 avril 2014

Définition On appelle B_n le nombre de partitions de $[\![1,n]\!]$ avec pour convention $B_0=1$.

Proposition 1 $B_1=1$, $B_2=2$, $B_3=5$.

Proposition 2 $B_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_{n-k}$.

Démonstration. Soit P une partition de $[\![1,n+1]\!]$ et $E\in P$ l'ensemble contenant $n+1$.

La donnée de P correspond à celle de $|E|$ éléments de $[\![1,n]\!]$ et d'une partition des $n-|E|$ éléments de $[\![1,n]\!]$ restants.

Ainsi, en sommant selon la taille de E, on a

$$B_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_{n-k}$$

■

Proposition 3 La série entière $f(z)=\sum_{n\geqslant 0}\frac{B_n}{n!}z^n$ a un rayon de convergence $R\geqslant 1$.

Démonstration. On montre par récurrence que pour tout $n\geqslant 1$, $B_n\leqslant n!$.

On a $B_1\leqslant 1$ et si $B_n\leqslant n!$, on a

$$B_{n+1}=n!\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\leqslant n!\times(n+1)=(n+1)!$$

Donc $B_n\leqslant n!$ pour tout n donc $R\geqslant 1$. ■

Proposition 4 Pour tout $z\in D(0,R)$, $f(z)=\mathrm{e}^{\mathrm{e}^z-1}$.

Démonstration. Sur $D(0,R)$, f est dérivable et

$$f'(z)=\sum_{n\geqslant 1}\frac{B_n}{(n-1)!}z^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_{n+1}}{n!}z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\frac{1}{(n-k)!}B_{n-k}z^n=\sum_{n=0}^{\infty}B_nz^n\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=\mathrm{e}^zf(z)$$

Donc $f(z)=C\mathrm{e}^{\mathrm{e}^z}$. Comme $f(0)=B_0=1$, on a $f(z)=\mathrm{e}^{\mathrm{e}^z-1}$. ■

Proposition 5 $B_k=\frac{1}{\mathrm{e}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^k}{n!}$.

Démonstration. Soit $u_{n,z}$ la famille $(\frac{n^kz^k}{n!k!})_k$. Cette famille est absolument sommable :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}|u_{n,z}|=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n|z|)^k}{k!n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{n|z|}}{n!}=\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{|z|}}$$

Donc par Fubini,

$$\mathrm{e}f(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{nz}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nz)^k}{k!n!} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(nz)^k}{k!n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^k}{n!} \right) \frac{z^k}{k!}$$

Par unicité du développement en série entière, on a $B_k = \dfrac{1}{\mathrm{e}} \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{n^k}{n!}$. ■