Décomposition de Dunford et méthode de Newton

PIERRON Théo

5 janvier 2014

Soit K un corps de caractéristique 0.

Lemme 1
Pour tout $B \in GL_n(K)$, $B^{-1} \in K[B]$.

Lemme 2
Pour tout $Q \in K[X]$, il existe $\widetilde{Q} \in K[X,Y]$ tel que

$$Q(X+Y) = Q(X) + YQ'(X) + Y^2\widetilde{Q}(X,Y)$$

Lemme 3
Si $U \in GL_n(K)$ et $N \in \mathfrak{M}_n(K)$ nilpotente commutent, alors $U - N$ est inversible.

<u>THÉORÈME 1</u> *Pour tout $A \in \mathfrak{M}_n(K)$, il existe un unique couple (D,N) avec $D \in D_n(\overline{K})$, N nilpotente, $A = D + N$ et $[D,N] = 0$.*

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(K)$ fixée. Soit L un corps de décomposition de χ_A sur K. Définissons le polynôme

$$P = \frac{\chi_A}{\chi_A \wedge \chi_A'} = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}_L(A)} (X - \lambda) \in K[X]$$

<u>THÉORÈME</u> *La suite de matrices définie par*

$$\begin{cases} A_{n+1} &= A_n - P(A_n)P'(A_n)^{-1} \\ A_0 &= A \end{cases}$$

est bien définie et stationne vers D, la partie semi-simple de A.

Démonstration. Par récurrence on montre que pour tout k, $P'(A_k) \in GL_n(K)$ et $P(A_n) = P(A)^{2^n} B_n$ où $B_n \in K[A]$.

- Si $k = 0$, $P(A_0) = P(A)$ donc $B_0 = I_n$ convient.
  Comme P est scindé à racines simples (SARS), $P \wedge P' = 1$ donc il existe $U, V \in K[X]$ tel que $UP + VP' = 1$. Alors

  $$V(A)P'(A) = I_n - U(A)P(A)$$

  Il existe $m > 0$ (le max des multiplicités des valeurs propres dans χ_A) tel que $\chi_A \mid P^m$. Donc $P(A)^m = P^m(A) = 0$ donc $P(A)$ est nilpotente.
  Comme $P(A)$ et $U(A)$ commutent, $U(A)P(A)$ est nilpotente donc $V(A)P'(A) \in GL_n(K)$ donc $P'(A) \in GL_n(K)$.
- Si l'hypothèse est vraie au rang k, posons $M = A_{k+1} - A_k = -P(A_k)P'(A_k)^{-1}$. Alors il existe $\widetilde{Q} \in K[X,Y]$ tel que

  $$P(A_{k+1}) = P(A_k + M) = \underbrace{P(A_k) + MP'(A_k)}_{=0} + M^2\widetilde{Q}(A_k, M)$$
  $$= P(A_k)^2 P'(A_k)^{-2}\widetilde{Q}(A_k, M) = P(A)^{2^{k+1}} B_{k+1}$$

avec $B_{k+1} = B_k P'(A_k)^{-2}\widetilde{Q}(A_k, M)$. De plus $P'(A_{k+1}) = P'(A_k) + MQ(A_k)$. Comme tout le monde est un polynôme en A et que $P(A_k)$ est nilpotente, M donc $MQ(A_k)$ le sont. Ainsi, comme $P'(A_k)$ est inversible, $P'(A_{k+1})$ aussi.

On a donc montré que la suite est bien définie. On sait de plus que $P(A)$ est nilpotente donc pour $n \geqslant n_0$, $P(A_n) = 0$ donc A_n stationne en $D \in \mathfrak{M}_n(K)$. On a $P(D) = 0$ et P est SARS donc $D \in D_n(\overline{K})$. De plus,

$$A - D = \sum_{k=0}^{n_0} A_k - A_{k+1} = -\sum_{k=0}^{n_0} P(A_k)P'(A_k)^{-1}$$

$P(A_k)$ est nilpotente et commute avec $P'(A_k)^{-1}$ donc $A - D$ est une somme de matrices nilpotentes qui commutent donc $A - D$ est nilpotente. Par unicité dans la décomposition de Dunford, on a bien trouvé la partie semi-simple de A dans cette décomposition. ■