Le groupe circulaire

Pierron Théo

8 juin 2014

Définition Soit G le groupe engendré par les homographies de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ et la conjugaison.

Théorème *G est l'ensemble des transformations préservant les cercles de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$.*

Démonstration. Les éléments de G préservent les cercles-droites d'après les théorèmes du plan.

Réciproquement, si f est une bijection de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ préservant les cercles-droites, montrons que $f \in G$. Quitte à composer par une homographie, on peut supposer que $f(\infty) = \infty$, $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Autrement dit, on peut voir f comme une bijection de $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ préservant les cercles et les droites.

Soient a, b, c, d des points en division harmonique, i.e. $[a, b, c, d] = -1$. Leur birapport étant réel, ils sont cocycliques. En envoyant un autre point du cercle à l'infini, on peut les supposer alignés. Montrons que la figure suivante permet, à partir de a, b, c, de définir d tel que $[a, b, c, d] = -1$.

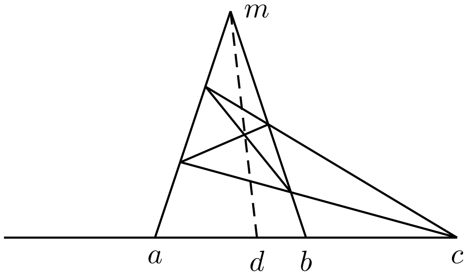

Figure 1 – Construction de d

En regardant cette figure dans $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, on peut envoyer la droite (mc) l'infini en préservant le birapport et on obtient le dessin Alors on a $[a, b, c, d] = [a', b', \infty, \frac{a'+b'}{2}] = \frac{a'-b'}{b'-a'} = -1$ donc le

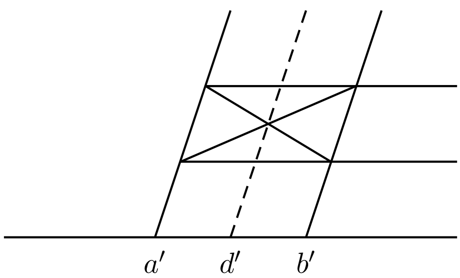

Figure 2 – Magie magie

point d obtenur est bien l'unique point tel que (a, b, c, d) soient en division harmonique.

Comme les dessins ci-dessus n'utilisent que des droites, ils sont stables par f. Autrement dit, si $[a, b, c, d] = -1$, $[f(a), f(b), f(c), f(d)] = -1$. Pour $c = \infty$ et $d = \frac{a+b}{2}$, on obtient

$$\left[f(a), f(b), \infty, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] = -1$$

Comme $(f(a), f(b), \infty, \frac{f(a)+f(b)}{2})$ sont aussi en division harmonique, on a

$$\left[f(a), f(b), \infty, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] = -1 = \left[f(a), f(b), \infty, \frac{f(a)+f(b)}{2}\right]$$

Donc $f(\frac{a+b}{2}) = \frac{f(a)+f(b)}{2}$. En particulier pour $b = 0$, on a $f(\frac{a}{2}) = \frac{f(a)}{2}$ donc f est additive.

Montrons que f est multiplicative. On sait que pour tout a, $[a, -a, a^2, 1] = -1$ donc

$$[f(a), -f(a), f(a^2), 1] = -1 = [f(a), -f(a), f(a)^2, 1]$$

Donc $f(a^2) = f(a)^2$. De plus

$$ab = \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{4}$$

donc $f(ab) = \frac{(f(a)+f(b))^2 - (f(a)-f(b))^2}{4} = f(a)f(b)$. Alors pour tout $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$,

$$qf(1)f\left(\frac{p}{q}\right) = f(q)f\left(\frac{p}{q}\right) = f(p) = pf(1)$$

Donc $f(\frac{p}{q}) = \frac{p}{q}$ donc $f|_{\mathbb{Q}} = \mathrm{Id}$. Montrons que f est croissante, ce qui, par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ assurera que $f|_{\mathbb{R}} = \mathrm{Id}$. Si $x > y \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x) - f(y) = f(x-y) = f(\sqrt{x-y}^2) = f(\sqrt{x-y})^2 > 0$$

Donc f est croissante donc $f|_{\mathbb{R}} = \mathrm{Id}$. De plus, $f(i)^2 = f(i^2) = f(-1) = -1$ donc $f(i) = \pm i$. Donc, à homographie près, f est l'identité ou la conjugaison, i.e. $f \in G$. ∎