# Méthode de Laplace

Pierron Théo

9 juin 2014

<u>Théorème</u> *Soit $a < b$ et $I = ]a, b[$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $\varphi \in C^2(I, \mathbb{R})$ tels que*
- $\int_a^b \mathrm{e}^{-t\varphi(x)}|f(x)|\,\mathrm{d}x < \infty$ *pour tout* $t \in I$
- $\varphi$ *a un unique minimum global strict* $x_0$ *sur* $I$ *i.e.* $\varphi'(x) = 0$ *ssi* $x = x_0$ *et, de plus,* $\varphi''(x_0) > 0$.
- $f(x_0) \neq 0$

*Alors, pour* $t \to \infty$

$$F(t) := \int_a^b \mathrm{e}^{-t\varphi(x)} f(x)\,\mathrm{d}x \sim \sqrt{\frac{2\pi}{t\varphi''(x_0)}} f(x_0)\mathrm{e}^{-t\varphi(x_0)}$$

*Démonstration.* On définit la fonction $\psi$ sur $I$ par

$$\psi(x) = \begin{cases} \sqrt{\varphi(x) - \varphi(x_0)} & \text{si } x \geqslant x_0 \\ -\sqrt{\varphi(x) - \varphi(x_0)} & \text{si } x < x_0 \end{cases}$$

$\psi$ est continue sur $I$ et $C^1$ sauf éventuellement en $x_0$. Si $x > x_0$, on a par Taylor

$$\psi'(x) = \frac{\varphi'(x)}{2\sqrt{\varphi(x) - \varphi(x_0)}} \underset{x \to x_0^+}{\sim} \frac{\varphi'(x_0) + (x - x_0)\varphi''(x_0)}{2\sqrt{\varphi'(x_0)(x - x_0) + \varphi''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2}}} = \frac{(x - x_0)\sqrt{\varphi''(x_0)}}{\sqrt{2}|x - x_0|}$$

Donc $\lim\limits_{x \to x_0^+} \psi'(x) = \sqrt{\frac{\varphi''(x_0)}{2}}$.

Le même calcul si $x < x_0$ montre que

$$\lim_{x \to x_0^-} \psi'(x) = \sqrt{\frac{\varphi''(x_0)}{2}}$$

donc $\psi$ est $C^1$ aussi en $x_0$. Par TIL, il existe $\delta > 0$ tel que $\psi$ soit un $C^1$-difféomorphisme de $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[ \to ]c, d[$.

Soit alors $\theta \in C_c^\infty$ telle que $\mathrm{supp}(\theta) \subset ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ et $\theta = 1$ sur $]x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0 + \frac{\delta}{2}[$. On décompose alors

$$F(t) = \underbrace{\int_a^b \mathrm{e}^{-t\varphi(x)} f(x)\theta(x)\,\mathrm{d}x}_{F_1(t)} + \underbrace{\int_a^b \mathrm{e}^{-t\varphi(x)} f(x)(1 - \theta(x))\,\mathrm{d}x}_{F_2(t)}$$

On effectue dans $F_1$ le changement de variables $u = \psi(x)$ :

$$F_1(t) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\varphi(\psi^{-1}(u))} \underbrace{\frac{f(\psi^{-1}(u))\theta(\psi^{-1}(u))}{\psi'(\psi^{-1}(u))}}_{h(u)}\,\mathrm{d}u$$

On a $\varphi(\psi^{-1}(u)) = \varphi(x_0) + u^2$ donc

$$F_1(t) = \mathrm{e}^{-t\varphi(x_0)} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-tu^2} h(u)\,\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{e}^{-t\varphi(x_0)}}{\sqrt{t}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-u^2} h\left(\frac{u}{\sqrt{t}}\right)\,\mathrm{d}u$$

$h$ est continue à support compact donc d'une part, on a cvs de l'intégrande vers $\mathrm{e}^{-u^2}h(0)$. De plus on a la domination

$$\left|\mathrm{e}^{-u^2} h\left(\frac{u}{\sqrt{t}}\right)\right| \leqslant \|h\|_\infty \mathrm{e}^{-u^2} \in L^1$$

Donc par convergence dominée,

$$\lim_{t\to\infty} \sqrt{t}\mathrm{e}^{t\varphi(x_0)} F_1(t) = h(0)\sqrt{\pi} = \frac{f(x_0)\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\varphi''(x_0)}}$$

Sur le support de $1-\theta$, on sait qu'il existe $\mu > 0$ tel que $\varphi(x) - \varphi(x_0) \geqslant \mu$. Alors

$$t\varphi(x) = \varphi(x) + (t-1)\varphi(x) \geqslant \varphi(x) + (t-1)\varphi(x_0) + (t-1)\mu$$

Donc

$$|F_2(t)| \leqslant \int_a^b \mathrm{e}^{-\varphi(x)-(t-1)\varphi(x_0)-(t-1)\mu} |f(x)|(1-\theta(x))\,\mathrm{d}x$$

Finalement

$$|\mathrm{e}^{t\varphi(x_0)} F_2(t)| \leqslant \mathrm{e}^{\varphi(x_0)-\mu(t-1)} \int_a^b \mathrm{e}^{-\varphi(x)} |f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \mathrm{e}^{-\mu t} M$$

avec

$$M = \mathrm{e}^{\varphi(x_0)+\mu} \int_a^b \mathrm{e}^{-\varphi(x)} |f(x)|\,\mathrm{d}x < \infty$$

par hypothèse. Donc $F_2(t)\mathrm{e}^{\varphi(x_0)t}$ décroît exponentiellement alors que $F_1(t)\mathrm{e}^{\varphi(x_0)t}$ décroît en $\frac{k}{\sqrt{t}}$. Donc $F_2 = o(F_1)$. Ainsi,

$$F(t) = F_1(t) + F_2(t) \sim F_1(t) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2t\varphi''(t_0)}} \mathrm{e}^{-t\varphi(x_0)} f(x_0) \qquad \blacksquare$$

Corollaire $\Gamma(t+1) \sim t^t \mathrm{e}^{-t} \sqrt{2\pi t}$ *quand* $t \to \infty$.

*Démonstration.* Avec le changement de variables $x = tu$, on a

$$\Gamma(t+1) = \int_0^\infty x^t \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = t^{t+1} \int_0^\infty u^t \mathrm{e}^{-tu}\,\mathrm{d}u$$

Posons $\varphi(u) = u - \ln(u)$. Alors $\varphi'(u) = 1 - \frac{1}{u}$ donc $\varphi$ a un unique point critique en 1.

On a de plus $\varphi''(1) = 1$, c'est donc un minimum. On est alors bien dans le cadre du théorème :

$$\Gamma(t+1) \sim t^{t+1} \sqrt{\frac{2\pi}{t}} \mathrm{e}^{-t} = t^t \mathrm{e}^{-t} \sqrt{2\pi t} \qquad \blacksquare$$