Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

Pierron Théo

9 juin 2014

Soit $p \in [0,1]$ et X_n une suite de variables iid de loi $B(\{\pm 1\}, p)$. On définit la marche aléatoire

$$S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i$$

On veut savoir si on revient ou non en 0.

<u>Théorème 1</u> *Si $p = \frac{1}{2}$, alors on revient infiniment souvent en 0.*

Démonstration. Notons $T = \inf\{n \geqslant 1, S_n = 0\}$. On cherche à calculer $\mathbb{P}(T < \infty)$. Notons

$$p_n = \mathbb{P}(S_n = 0) \text{ et } q_n = \mathbb{P}(T = n)$$

On a $p_0 = 1$ et $q_0 = 0$. On définit alors les séries génératrices

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \text{ et } Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$$

Alors $\mathbb{P}(T < \infty) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} q_n = Q(1)$.

- Calcul de p_n.
  Si n est impair, S_n aussi donc $p_n = 0$. Dans le cas contraire, on cherche le nombre de chemins de 0 à 0 en $2n$ pas. Il suffit de choisir les n étapes où on monte. Ainsi,

$$p_{2n} = \binom{2n}{n} \times \frac{1}{4^n}$$

- Si $|x| < 1$, on a $|p_n x^n| < |x|^n$ donc P a un rayon de convergence au moins 1. Par le même argument, Q a un rayon au moins 1. On reconnait en P le DSE de $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Donc pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

- On cherche une relation de récurrence sur p et q :

$$p_n = \mathbb{P}(S_n = 0) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(S_n = 0, T = k) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(T = k, X_{k+1} + \ldots + X_n = 0) = \sum_{k=1}^{n} q_k p_{n-k}$$

  par indépendance de S_k et X_i pour $i > k$ et comme $X_{k+1} + \ldots + X_n$ a même loi que S_{n-k}.
- Cette relation nous invite à calculer le produit de Cauchy des deux séries entières P et Q. Pour $|x| < 1$, on a

$$P(x)Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} q_k p_{n-k} x^n = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} q_k p_{n-k} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} p_n x^n = P(x) - 1$$

  Donc $Q(x) = 1 - \frac{1}{P(x)} = 1 - \sqrt{1-x^2}$. En particulier,

$$\lim_{x \to 1^-} Q(x) = 1$$

- Pour tout n, $\lim_{x \to 1^-} q_n x^n = q_n$. De plus, pour tout x, n, on a $|q_n x^n| \leqslant q_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} q_n < \infty$. Par convergence dominée (pour la mesure de comptage !), on a

$$\mathbb{P}(T < \infty) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n = \lim_{x \to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n = \lim_{x \to 1^-} Q(x) = 1$$

Ainsi, p.s. on revient en 0 en temps fini. En particulier, p.s. on revient infiniment souvent en 0, vu que si $S_k = 0$, $X_{k+1} + \ldots + X_n$ a même loi que S_{n-k}. ■

Remarque 1 $1 - \sqrt{1 - x^2}$ *est DSE sur* $]-1, 1[$. *En identifiant les coefficients, on trouve* $q_{2n+1} = 0$ *et si* $n > 0$,

$$q_{2n} = \frac{1}{4^n(2n+1)} \binom{2n}{n}$$

<u>THÉORÈME 2</u> *Si* $p \neq \frac{1}{2}$ *alors p.s. on ne revient pas infiniment souvent en* 0.

Démonstration. On s'intéresse aux évènements $\{S_n = 0\}$. On a, comme précédemment :

$$\mathbb{P}(S_{2n+1} = 0) = 0 \text{ et } \mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n$$

En particulier

$$\mathbb{P}(S_{2n} = 0) \sim \frac{(2n)^{2n} \mathrm{e}^{-2n} \sqrt{4\pi n} p^n (1-p)^n}{2\pi n \times n^{2n} \mathrm{e}^{-2n}} \sim \frac{(4p(1-p))^n}{\sqrt{\pi n}}$$

Comme $p \neq \frac{1}{2}$, $4p(1-p) < 1$ donc la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_n = 0)$$

converge. Par Borel-Cantelli, on a

$$\mathbb{P}(\limsup \{S_n = 0\}) = 0$$

Or $x \in \limsup \{S_n = 0\}$ ssi pour tout n, il existe $k \geqslant n$ tel que $x \in \{S_k = 0\}$. Ainsi, on p.s. on revient qu'un nombre fini de fois en 0. ■