Développement : Méthodes de Newton

Pierron Théo – Lacoste Cyril

4 novembre 2013

Références :
- Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel*
- Chambert-Loir, Fermigier, *Exercices de mathématiques pour l'agrégation*

<u>Théorème 1</u> *Soit $f \in C^2([c,d],\mathbb{R})$ telle que $f(c) < 0 < f(d)$ et $f'|_{[c,d]} > 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires assure qu'il existe un unique $a \in [c,d]$ tel que $f(a) = 0$.*

Alors il existe $\alpha > 0$ tel que la suite définie par $u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)} =: F(u_n)$ soit bien définie et converge de manière quadratique vers a dès que $u_0 \in J := [a-\alpha, a+\alpha]$.

Démonstration. Il existe $\alpha > 0$ tel que $[a-\alpha, a+\alpha] \subset [c,d]$. On doit montrer que pour α suffisement petit, $F(J) \subset J$. Alors on aura pour tout n, $u_n \in J$ donc $f'(u_n) \neq 0$ donc u_n sera bien définie.

Soit $x \in J$. Par Taylor-Lagrange à l'ordre 2, il existe $\xi \in [a,x] \subset J$ tel que

$$0 = f(a) = f(x) + (a-x)f'(x) + \frac{(a-x)^2}{2} f''(\xi)$$

Alors on a

$$|F(x) - a| = \left| x - a - \frac{f(x)}{f'(x)} \right| = \left| \frac{(x-a)f'(x) + f(x)}{f'(x)} \right| = |a-x|^2 \left| \frac{f''(\xi)}{2f'(x)} \right|$$

f' et f'' sont continues sur J qui est compact donc $|f'|$ est minorée par m et $|f''|$ est majorée par M. On a alors

$$|F(x) - a| \leqslant \frac{M}{2m}|x-a|^2$$

Si on prend $\alpha < \frac{2m}{M}$, on a $|F(x) - a| < \alpha$ donc $F(x) \in J$. Ainsi J est stable par F donc u est bien définie.

On a de plus

$$\frac{M}{2m}|u_n - a| \leqslant \left(\frac{M}{2m}|u_{n-1} - a| \right)^2 \leqslant \cdots \leqslant \left(\frac{M}{2m}|u_0 - a| \right)^{2^n}$$

Comme $\frac{M}{2m}|u_0 - a| \leqslant \frac{M}{2m}\alpha < 1$, u_n converge vers a et la convergence est quadratique. ■

<u>Théorème 2</u> *Soit $\xi_1 < \ldots < \xi_r$ des réels, $m_1, \ldots, m_r$ des entiers et $P = \prod_{i=1}^{r} (X - \xi_i)^{m_i}$.*

Si $u_0 > \xi_r$ alors la suite $u_{n+1} = u_n - \frac{P(u_n)}{P'(u_n)} =: F(u_n)$ est strictement décroissante et converge vers ξ_r.

Démonstration. Sur $]\xi_r, +\infty[$, F est dérivable et on a pour tout $x > \xi_r$,

$$F'(x) = 1 - \frac{P'(x)^2 - P''(x)P(x)}{P'(x)^2} = \frac{P(x)P''(x)}{P'(x)^2}$$

D'après le théorème de Gauss-Lucas, les racines de P' et P'' appartiennent à $[\xi_1, \xi_r]$. De plus, les coefficients dominants de P, P' et P'' sont positifs donc pour $x > \xi_r$, $P(x) > 0$, $P'(x) > 0$ et $P''(x) > 0$.

Ainsi, $F' > 0$ sur $]\xi_r, +\infty[$ donc f est strictement croissante sur cet intervalle.

De plus, l'ordre de ξ_r dans P est supérieur à son ordre dans P' donc

$$\lim_{x \to \xi_r^+} F(x) = \xi_r$$

Par continuité de F en ξ_r, F est strictement croissante sur $[\xi_r, +\infty[$. Donc, si $u_n > \xi_r$, $F(u_n) > F(\xi_r)$ et $u_{n+1} > \xi_r$. La suite u est donc minorée par ξ_r. Montrons maintenant qu'elle décroît.

Par dérivation logarithmique, $\dfrac{P'}{P} = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} \frac{m_i}{X - \xi_i}$, donc

$$u_{n+1} - u_n = -\left(\sum_{i=1}^{r} \frac{m_i}{u_n - \xi_i}\right)^{-1}$$

Alors, comme $u_n > \xi_r > \ldots > \xi_1$, on a pour tout i, $u_n - \xi_i > 0$ donc en sommant, $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} \frac{m_i}{u_n - \xi_i} > 0$. Finalement $u_{n+1} - u_n < 0$.

Ainsi, u est décroissante minorée. Elle converge donc vers un réel $l \geqslant \xi_r$. De plus, on a par continuité de F, $F(l) = l$ donc $P(l) = 0$. Comme $l \geqslant \xi_r$, $l = \xi_r$. ■

Application : Si $c > 0$, en considérant $P = X^2 - c$, la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 & = c + 1 \\ u_{n+1} & = u_n - \frac{u_n^2 - c}{2u_n} = \frac{u_n}{2} - \frac{2c}{u_n} \end{cases}$$

converger de manière quadratique vers $\sqrt{c}$.