# Étude du groupe des quaternions

Pierron Théo

23 décembre 2013

On appelle $\mathbb{H}$ l'espace $\mathbb{R}^4$ muni de la loi de multiplication bien connue.

Soit $N : q \mapsto q\overline{q}$ la norme (multiplicative), $G$ le groupe des quaternions de norme 1 et $P = \mathbb{R}^\perp$.

**Lemme**
$G$ est homéomorphe à la sphère $\mathbb{S}^3$. En particulier il est connexe.

<u>Théorème 1</u> *$G/\{\pm 1\} \simeq SO_3(\mathbb{R})$.*

*Démonstration.* Pour tout $q \in G$, posons $S_q : q' \mapsto qq'\overline{q}$.

- $S_q \in GL_4(\mathbb{R})$ : soit $\lambda, q_1, q_2 \in \mathbb{R} \times G^2$.
$$S_q(\lambda q_1 + q_2) = q\lambda q_1 \overline{q} + qq_2\overline{q} = \lambda S_q(q_1) + S_q(q_2)$$
Donc $S_q$ est linéaire.
$$S_q(S_{\overline{q}}(q_1)) = q\overline{q}q_1q\overline{q} = N(q)^2 q_1 = q_1$$
De même $S_{\overline{q}} \circ S_q = \mathrm{Id}$ donc $S_q$ est inversible d'inverse $S_{\overline{q}}$.
- $N(S_q(q')) = N(q)N(q')N(\overline{q}) = N(q')$ donc $S_q \in O(N) \simeq O_4(\mathbb{R})$.
- $S_q|_{\mathbb{R}} = \mathrm{Id}$ donc $S_q^{-1}|_{\mathbb{R}} = \mathrm{Id}$ donc $P$ est stable par $(S_q^{-1})^* = S_q$. Posons alors $s_q = S_q|_P$.
- $S_q \in O_4(\mathbb{R})$ donc $s_q \in O(N|_P) = O_3(\mathbb{R})$, d'où une application
$$s : \begin{cases} G & \to & O_3(\mathbb{R}) \\ q & \mapsto & s_q \end{cases}$$
qui est un morphisme car $s_{qq'} = s_q \circ s_{q'}$.
- $\mathrm{Ker}(s) = Z(H) \cap G = \{\pm 1\}$
- Pour tout $q = a + bi + cj + dk \in G$, la matrice de $s_q$ dans la base $(i, j, k)$ a des coefficients polynomiaux en $a, b, c, d$ donc $s$ est continu. Alors $\det \circ s : G \to \{\pm 1\}$ est continu.
Comme $G$ est connexe, $\det(s(G))$ est connexe. Comme il est fini c'est un singleton, donc c'est $\{1\}$. Donc $s(G) \subset SO_3(\mathbb{R})$.
- Soit $p \in P \cap G$. Alors $s_p(\overline{p}) = p\overline{p}p = p$ donc $s_p$ fixe $\langle p\rangle$ donc c'est une rotation d'axe $\langle p\rangle$.
De plus
$$s_p^2 = s_{p^2} = s_{p\overline{p}} = s_{-1} = \mathrm{Id}$$
Donc $s_p$ est un renversement. Comme les renversements engendrent $SO_3(\mathbb{R})$, $s(G) = SO_3(\mathbb{R})$.
- Finalement $G/\mathrm{Ker}(s) \simeq s(G)$ c'est-à-dire $G/\{\pm 1\} \simeq SO_3(\mathbb{R})$. ∎

*Remarque 1* *On a donc un homéomorphisme entre $SO_3(\mathbb{R})$ et $\mathbb{S}^3/\{\pm 1\}$.*

*Remarque 2* *En considérant le morphisme*
$$\begin{cases} G \times G & \to & GL_4(\mathbb{R}) \\ (q_1, q_2) & \mapsto & q \mapsto q_1 q\overline{q_2} \end{cases}$$
*on peut montrer que $G \times G/\{\pm(1,1)\} \simeq SO_4(\mathbb{R})$.*

Théorème 2 *$SU_2(\mathbb{C}) \simeq G$.*

*Démonstration.* $\mathbb{C}$ est un sous-corps de $\mathbb{H}$ donc $\mathbb{H}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel pour la multiplication externe

$$\begin{cases} \mathbb{C} \times \mathbb{H} & \to & \mathbb{H} \\ (\lambda, q) & \mapsto & q\lambda \end{cases}$$

$(1, j)$ est une base de $\mathbb{H}$ sur $\mathbb{C}$.

Pour $q \in G$, soit $T_q : q' \mapsto qq'$. $T_q$ est $\mathbb{C}$-linéaire et $T_q^{-1} = T_{\overline{q}}$ donc $T_q \in GL_2(\mathbb{C})$.

On a de plus $T_{qq'} = T_q \circ T_{q'}$ donc on a un morphisme

$$T : \begin{cases} G & \to & GL_2(\mathbb{C}) \\ q & \mapsto & T_q \end{cases}$$

De plus pour tout $q = \lambda + \mu j \in G$, la matrice de $(1, j)$ est

$$\begin{pmatrix} \lambda & -\overline{\mu} \\ \mu & \overline{\lambda} \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$\{T_q, q \in G\} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & -\overline{\mu} \\ \mu & \overline{\lambda} \end{pmatrix}, \lambda\overline{\lambda} + \mu\overline{\mu} = 1 \right\} = SU_2(\mathbb{C})$$

Donc $T(G) = SU_2(\mathbb{C})$.

De plus, si $T_q = \mathrm{Id}$, $1 = T_q(1) = q$ donc $\mathrm{Ker}(T) = \{1\}$. Par le premier théorème d'isomorphisme, on a donc $G \simeq SU_2(\mathbb{C})$. ∎

Corollaire *Finalement $SO_3(\mathbb{R}) \simeq SU_2(\mathbb{C})/\{\pm 1\}$.*