Sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$

PIERRON Théo

9 juin 2014

Lemme
Soit G un sous-groupe compact de $GL(V)$ et K un convexe compact non vide tel que pour tout $g \in G$, $g(K) \subset K$.

Alors il existe $x \in K$ tel que pour tout $g \in G$, $g(x) = x$.

Démonstration. On fixe une norme euclidienne sur V et on définit

$$N(x) = \sup_{u \in G} \|u(x)\|$$

le sup étant un max par compacité de G. Il est clair que N est une norme sur V.

Soient x, y tels que $N(x+y) = N(x) + N(y)$ et $u \in G$ tel que $N(x+y) = \|u(x+y)\|$.

$$N(x+y) = \|u(x+y)\| \leqslant \|u(x)\| + \|u(y)\| \leqslant N(x) + N(y) = N(x+y)$$

Donc on a égalité dans l'inégalité triangulaire donc $u(x)$ et $u(y)$ sont positivement liés, donc x et y aussi.

K est compact donc il existe $a \in K$ tel que $N(a) = \min_{x \in K} N(x) = \alpha$. a est unique, en effet, si b vérifie $N(b) = \alpha$, on a

$$N\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{N(a) + N(b)}{2} \leqslant \alpha$$

Il y a donc égalité donc a et b sont positivement liés. Si $a = 0$, c'est bien l'unique minimiseur. Sinon il existe $\lambda > 0$ tel que $b = \lambda a$. Alors

$$\alpha = N(b) = N(\lambda a) = \lambda N(a) = \lambda \alpha$$

Donc $a = b$.

De plus, si $g \in G$, $N(g(a)) = N(a) = \alpha$ donc par unicité du point fixe, $g(a) = a$. ∎

<u>THÉORÈME</u> *Soit G un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$. Alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $PGP^{-1} \subset O_n(\mathbb{R})$.*

Démonstration. On pose

$$\rho : \begin{cases} G & \to & GL(S_n(\mathbb{R})) \\ A & \mapsto & S \mapsto ASA^T \end{cases}$$

ρ est continue et $\rho(AB) = \rho(A) \circ \rho(B)$.

Posons $C = \{MM^T, M \in G\} \subset S_n^{++}$. C est compact (image de G par une application continue) et non vide. Soit K l'enveloppe convexe de C. K est un compact convexe non vide de S_n^{++} (car S_n^{++} est convexe).

De plus, si $A \in G$ et $MM^T \in C$, on a $\rho(A)(MM^T) = AMM^TA^T = (AM)(AM)^T \in C$. C est donc stable par $\rho(G)$. Par linéarité de $\rho(\cdot)$, K est aussi stable par $\rho(G)$.

Ainsi, $\rho(G)$ est un groupe compact et K est un compact convexe non vide stable par $\rho(G)$ donc il existe un point fixe commun $S \in K \subset S_n^{++}$ à tous les éléments de $\rho(G)$.

Pour tout $A \in G$, on a $\rho(A)(S) = S$ donc $ASA^T = S$. Autrement dit, G est inclus dans le groupe orthogonal de la forme quadratique associée à S.

On utilise alors la décomposition de Choleski de S : $S = RR^T$. Pour tout $A \in G$, on a alors

$$ARR^TA^T = RR^T \text{ donc } R^{-1}ARR^TA^T(R^T)^{-1} = I_n \text{ donc } (R^{-1}AR)(R^{-1}AR)^T = I_n$$

Donc $R^{-1}AR \in O_n(\mathbb{R})$ et $G \subset RO_n(\mathbb{R})R^{-1}$. ■