Surjectivité de l'exponentielle

Pierron Théo

31 mai 2014

<u>Théorème 1</u> *Pour tout $A \in GL_n(\mathbb{C})$, il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $A = \mathrm{e}^{P(A)}$.*

Démonstration. Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$. $\mathbb{C}[A]$ est une sous-algèbre isomorphe à $\mathbb{C}[X]/\mu_A$, elle est donc de dimension finie, donc fermée.

Pour tout $M \in \mathbb{C}[A]$, e^M est la limite d'éléments de $\mathbb{C}[M] \subset \mathbb{C}[A]$ donc $\mathrm{e}^M \in \mathbb{C}[A]$. De plus, $\mathrm{e}^M \mathrm{e}^{-M} = I_n$ donc $\mathrm{e}^{\mathbb{C}[A]} \subset \mathbb{C}[A]^\times$.

On va maintenant prouver l'inclusion réciproque par connexité. On montre que $\mathrm{e}^{\mathbb{C}[A]}$ est ouvert et fermé et que $\mathbb{C}[A]^\times$ est connexe.

- $\mathrm{e}^H = I_n + H + o(\|H\|)$ donc exp est C^1 en Id et $D_0 \exp = I_n$ est inversible. Par TIL, il existe V_0 voisinage de 0 dans $\mathbb{C}[A]$ et V voisinage de I_n dans $\mathbb{C}[A]^\times$ tel que $\exp : V_0 \to V$ soit un difféomorphisme.
- Soit $M \in \exp(\mathbb{C}[A])$. Alors $M = \mathrm{e}^N$ et $M \in MV = \mathrm{e}^{N+V_0} \subset \exp(\mathbb{C}[A])$. De plus, comme $M' \mapsto M^{-1}M'$ est une application continue, MV est ouvert. $\exp(\mathbb{C}[A])$ contient un voisinage de chacun de ses points il est donc ouvert.
- Montrons que $\exp(\mathbb{C}[A])^c = \displaystyle\bigcup_{M \in \exp(\mathbb{C}[A])^c} MV$ (les complémentaires sont pris dans $\mathbb{C}[A]^\times$).
  Si $N \notin \exp(\mathbb{C}[A])$, $N \in NV$ donc N appartient à l'union. Réciproquement, si $N = MN'$ avec $M \notin \exp(\mathbb{C}[A])$ et $N_1 \in V$, alors $M = NN_1^{-1}$. Par définition de V, et comme exp est un morphisme de groupes, $M \in \exp(\mathbb{C}[A])$ ssi $N \in \exp(\mathbb{C}[A])$. Finalement, $N \notin \exp(\mathbb{C}[A])$.
  $\exp(\mathbb{C}[A])^c$ est une union d'ouverts, c'est donc un ouvert. Ainsi, $\exp(\mathbb{C}[A])$ est fermé.
- Soit $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(A), Q(A) \in \mathbb{C}[A]^\times$. Posons $R = \det(XQ(A) + (1-X)P(A)) \in \mathbb{C}[X]$.
  $R(0) \neq 0$ donc R est un polynôme non nul, qui admet un nombre fini de racines. $\mathbb{C} \setminus \{x, R(x) = 0\}$ est connexe par arcs (faire un dessin !) donc il existe un chemin continu γ de 0 à 1 ne passant pas par les racines de R.
  Alors $t \mapsto \gamma(t)Q(A) + (1-\gamma(t))P(A)$ est un chemin continu d'éléments de $\mathbb{C}[A]^\times$ reliant $P(A)$ à $Q(A)$.

$\exp(\mathbb{C}[A])$ est un ouvert fermé non vide dans un connexe, ce qui conclut la démonstration. ∎

<u>Théorème 2</u> *Dans le cas réel, l'image de* exp *ne risque pas d'être $GL_n(\mathbb{R})$ (connexité). On a en fait*

$$\mathrm{Im}(\exp) = \{B^2, B \in GL_n(\mathbb{R})\}$$

Démonstration. Si $M = \mathrm{e}^N$ alors $M = (\mathrm{e}^{\frac{N}{2}})^2$ et $\mathrm{e}^{\frac{N}{2}}$ est inversible, ce qui prouve un sens.

Si $M = N^2$, on utilise le résulat sur $\mathbb{C}$ pour avoir $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\mathrm{e}^{P(N)} = N$. Alors

$$M = N^2 = N\overline{N} = \mathrm{e}^{P(N)}\mathrm{e}^{\overline{P(N)}} = \mathrm{e}^{P(N)}\mathrm{e}^{\overline{P}(N)} = \mathrm{e}^{(P+\overline{P})(N)}$$

Or $P + \overline{P} \in \mathbb{R}[X]$ donc c'est gagné. ∎