Théorème de l'amitié

LACOSTE Cyril – PIERRON Théo

15 avril 2014

<u>THÉORÈME</u> *On considère un groupe de $n > 2$ personnes tel que pour tout couple d'individus (u, v), il existe un unique ami commun à u et v (la relation d'amitié est considérée symétrique et irréflexive).*

Alors il existe un politicien, i.e. une personne qui est l'amie de toutes les autres.

Démonstration. On note $G = (S, A)$ le graphe dont les sommets sont les personnes et dont les arêtes symbolisent l'amitié : il y a une arête entre u et v ssi les personnes u et v sont amies. Remarquons tout d'abord qu'il n'y a pas de cycle de longueur 4 dans G.

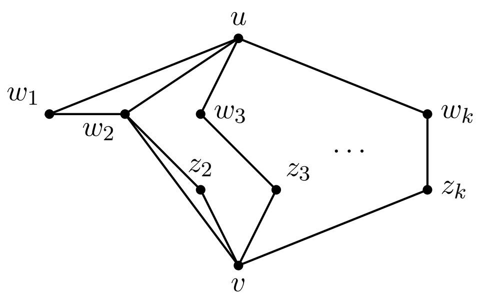
Supposons par l'absurde qu'aucun sommet du graphe ne soit relié à tous les autres. La démonstration se fait en 3 étapes :

1. On montre que tous les nœuds de G ont même degré k (i.e. que toutes les personnes ont le même nombre d'amis)
2. On montre que $n = k^2 - k + 1$
3. On montre que $k = 2$, puis une contradiction.

C'est parti :

1. Soient u et v deux sommets non reliés. On note $d(x)$ le degré du nœud x et $k = d(u)$.

   Notons $w_1, \ldots, w_k$ les voisins de u. u et v ont un ami commun, et quitte à renuméroter, on peut supposer que c'est w_2. De même u et w_2 ont un ami commun qu'on peut supposer être w_1.

   Alors, pour tout $i > 1$, v et w_i ont un ami commun qu'on note z_i. S'il existe $i \neq j$ tel que $z_i = z_j$, on a un 4-cycle $z_i - w_i - u - w_j - z_i$, ce qu'on a montré être impossible. Les z_i sont donc distincts. Finalement, on a trouvé k voisins à v donc $d(v) \geqslant k = d(u)$. Par symétrie, on a $d(u) = d(v)$.

   On remarque que tout nœud différent de w_2 n'est pas relié à u ou n'est pas relié à v. Donc tout nœud différent de w_2 a un degré k. Par hypothèse, w_2 n'est pas relié à tous les autres sommets, donc il existe x auquel w_2 n'est pas relié. On a alors $d(w_2) = d(x) = k$.

   Tous les nœuds ont donc même degré.

2. Soit u un nœud. Par hypothèse sur G, tout nœud est à distance au plus 2 de u.

   u a k voisins (qu'on note encore $w_1, \ldots, w_k$). Chaque w_i a un ami commun avec u qui est donc un w_j. Ainsi, chaque w_i a $k - 2$ voisins qui ne sont ni u ni un w_j. Notons S_i l'ensemble de ces voisins. Alors les S_i sont disjoints car si $z \in S_i \cap S_j$, on a un 4-cycle $z - w_i - u - w_j - z$, ce qui est absurde.

On a donc

$$S = \{u\} \sqcup \{w_i, i \in [\![1, k]\!]\} \sqcup \bigsqcup_{i=1}^{k} S_i$$

Donc $n = 1 + k + k(k-2) = k^2 - k + 1$.

3. Soit M la matrice d'adjacence de G (i.e. $m_{i,j} = 1$ si $i - j$ et 0 sinon). On remarque que M est symétrique réelle et de plus $\mathrm{tr}(M) = 0$ car $m_{i,i} = 0$ pour tout i.
   Considérons M^2. Les coefficients diagonaux valent

$$\sum_{j=1}^{n} m_{i,j} m_{j,i} = \sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = d(i) = k$$

   car $m_{i,j} \in \{0, 1\}$. Soient $i \neq j$. Le coefficient de M^2 à la position (i, j) vaut

$$\sum_{k=1}^{n} m_{i,k} m_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} m_{i,k} m_{j,k}$$

   c'est donc le nombre de 1 qui sont à la même position dans la ligne i et la ligne j de M. Par hypothèse, il n'y en a qu'un seul.
   (On peut remarquer que ce résultat pouvait s'obtenir plus facilement en utilisant que le coefficient (i, j) de M^2 est le nombre de chemins dans G de longueur 2 allant de i à j.)
   Finalement,

$$M^2 = (k-1)I_n + J_n$$

   où J_n est la matrice constituée que de 1. Les valeurs propres de J_n sont n (d'ordre 1) et 0 (d'ordre $n - 1$). Comme J_n et I_n commutent, les valeurs propres de M^2 sont donc $k - 1$ (d'ordre $n - 1$) et $n + k - 1 = k^2$ (d'ordre 1).
   M est symétrique réelle donc diagonalisable et ses valeurs propres sont donc $\pm k$ (d'ordre 1), $\sqrt{k-1}$ (d'ordre r) et $-\sqrt{k-1}$ (d'ordre $s = n - 1 - r$). En regardant la trace, on a

$$0 = \mathrm{tr}(M) = \pm k + (r - s)\sqrt{k-1}$$

   On remarque d'une part que $r \neq s$ (sinon $k = 0$ et $n = 1$, ce qui est exclu), et d'autre part que

$$\sqrt{k-1} = \frac{\pm k}{s - r} \in \mathbb{Q}$$

   Donc $k - 1$ est un carré : $k = 1 + h^2$. Alors

$$\pm(h^2 + 1) = (s - r)h$$

   donc h divise h^2 et $h^2 + 1$ donc $h = 1$. Alors $k = 2$ et $n = 3$. G est alors un 3-cycle, ce qui est absurde car il existe un sommet relié à tous les autres. D'où la contradiction. ∎