Développement : Application dont la différentielle est une isométrie

PIERRON Théo-LACOSTE Cyril

10 janvier 2014

Référence : Gourdon, Analyse, p.329

<u>THÉORÈME</u> *Soit E un espace euclidien, on note $\langle , \rangle$ le produit scalaire et $\|.\|$ la norme euclidienne associée. Soit $f : E \to E$ C^1 telle que : $\forall x \in E$ df_x est une isométrie : $\|df_x(h)\| = \|h\|$ $\forall h \in E$. Alors f est une isométrie affine de E.*

Démonstration. On munit $L(E)$ de la norme d'opérateur $|||u||| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|u(x)\|$. On a : $\forall x \in E, |||df_x||| = 1$, donc par inégalité des accroissements finis :

$$\forall (x, y) \in E^2, \|f(x) - f(y)\| \leqslant \|x - y\|$$

– Soit $a \in E$, on va montrer que f est une isométrie sur un voisinage de a. Comme df_a est une isométrie, elle est injective, donc inversible car E est de dimension finie, donc par le théorème d'inversion locale il existe un voisinage U_a de a tel que $f|_{U_a}$ soit un C^1-difféomorphisme de U_a sur $W_a = f(U_a)$. Notons g son inverse. Pour $y = f(x) \in W_a$, $dg_y = (df_x)^{-1}$ est une isométrie donc $|||dg_y||| = 1$. Quitte à restreindre U_a en un ouvert plus petit, on peut supposer que W_a est convexe. On applique l'inégalité des accroissements finis à g sur W_a :

$$\forall (x, y) \in W_a^2, \|g(x) - g(y)\| \leqslant \|x - y\|$$

Donc :

$$\forall (x, y) \in U_a^2, \|x - y\| = \|g(f(x)) - g(f(y))\| \leqslant \|f(x) - f(y)\|$$

d'où :

$$\forall (x, y) \in U_a^2, \|x - y\| = \|f(x) - f(y)\|$$

– Montrons que $\forall (x, y) \in U_a^2, df_x = df_y$. On a, pour $(x, y) \in U_a^2$:

$$\langle x - y, x - y\rangle = \langle f(x) - f(y), f(x) - f(y)\rangle$$

On différentie par rapport à x selon $h \in E$:

$$\langle df_x(h), f(x) - f(y) \rangle = \langle h, x - y \rangle$$

On différentie par rapport à y selon $l \in E$:

$$\langle df_x(h), -df_y(l) \rangle = \langle h, -l \rangle$$

Donc, pour $(x, y) \in U_a^2$ et $h \in E$:

$$\begin{aligned} \|df_x(h) - df_y(h)\|^2 &= \|df_x(h)\|^2 - 2\langle df_x(h), df_y(h) \rangle + \|df_y(h)\|^2 \\ &= \|h\|^2 - 2\langle h, h \rangle + \|h\|^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc $df_x = df_y$.

– Posons $\Gamma = \{x \in E, df_x = df_0\}$. Ce qui précède montre que Γ est ouvert, et comme f est C^1, c'est aussi un fermé de E. Or E est convexe donc connexe, et Γ est non vide (0 est dedans) donc $\Gamma = E$. Donc si $u = df_0$, on a :

$$\forall x \in E, df_x = u$$

Donc l'application $x \to f(x) - u(x)$ est de différentielle nulle sur E, donc elle est constante (à nouveau par connexité de E), notons $\alpha \in E$ sa valeur. Donc :

$$\forall x \in E, f(x) = u(x) + \alpha$$

et $u = df_0$ est une isométrie vectorielle, donc f est une isométrie affine.

$\square$