Un calcul de l'intégrale de Fresnel

Pierron Théo

27 décembre 2013

Lemme 1 Formule de la moyenne
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ positive décroissante C^1 et $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Alors il existe $c \in [a,b]$ tel que
$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(a)\int_a^c g(t)\,\mathrm{d}t$$

Lemme 2 Abel
Soit $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ C^1 et $g : [a,b[\to \mathbb{R}$ continue telles que

- f est décroissante et converge vers 0 en b
- Il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in [a,b[$, $|\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t| \leqslant M$.

Alors $\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Lemme 3
$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

<u>Théorème 1</u> $\int_0^\infty \mathrm{e}^{ix^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$.

Démonstration.

1. Soit $\alpha \in]0,1[$. On définit
$$I : \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{ixt}t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t \end{cases}$$
L'intégrande $f(x,t)$ est majoré en module par $\mathrm{e}^{-t}t^{\alpha-1}$ qui est intégrable en $+\infty$ car l'exponentielle l'emporte et en 0 car $\alpha > 0$. Ainsi, I est bien défini.
On a de plus $f \in C^1$ et
$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \mathrm{e}^{-t}t^{\alpha} \in L^1(\mathbb{R}^+)$$
Donc par le théorème de dérivation sous l'intégrale, I est C^1 et
$$I'(x) = i\int_0^\infty \mathrm{e}^{(ix-1)t}t^{\alpha}\,\mathrm{d}t$$
Par IPP, on a de plus
$$I(x) = \left[\mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{ixt}\frac{t^\alpha}{\alpha}\right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{t^\alpha}{\alpha}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{ixt}(ix-1)\,\mathrm{d}t = \frac{1-ix}{\alpha}\int_0^\infty t^\alpha \mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{ixt}\,\mathrm{d}t = -\frac{i+x}{\alpha}I'(x)$$
Donc, I est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1. Pour trouver l'expression de I, il suffit alors de calculer une primitive :
$$\int \frac{1}{x+i}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x-i}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{\ln(x^2+1)}{2} - i\arctan(x) + C$$
Donc $I(x) = C(x^2+1)^{-\frac{\alpha}{2}}\mathrm{e}^{i\alpha\arctan(x)}$ avec $C \in \mathbb{R}$. Or
$$C = I(0) = \int_0^\infty t^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \Gamma(\alpha)$$
Donc $I(x) = \Gamma(\alpha)(x^2+1)^{-\frac{\alpha}{2}}\mathrm{e}^{i\alpha\arctan(x)}$.

2. Soit $\widetilde{I} : y \mapsto \int_0^\infty \mathrm{e}^{-uy}\mathrm{e}^{iu}u^{\alpha-1}\,\mathrm{d}u$. On a pour $x \neq 0$, $x^\alpha I(x) = \widetilde{I}(\frac{1}{x})$.
   Pour $y \neq 0$, $\widetilde{I}(y)$ est bien défini en $+\infty$ car l'exponentielle l'emporte et en 0 car $\alpha > 0$. $\widetilde{I}(0)$ est aussi bien défini par le lemme d'Abel. Par la formule de la moyenne, pour tout n, y et $X > n$, il existe a, b tel que

$$\int_n^X \mathrm{e}^{-uy}\mathrm{e}^{iu}u^{\alpha-1}\,\mathrm{d}u = \mathrm{e}^{-ny}\left(\int_n^a \cos(u)u^{\alpha-1}\,\mathrm{d}u + \int_n^b \sin(u)u^{\alpha-1}\,\mathrm{d}u\right)$$

   Posons alors $\widetilde{I}_n : y \mapsto \int_{\frac{1}{n}}^n \mathrm{e}^{-uy}\mathrm{e}^{iu}u^{\alpha-1}\,\mathrm{d}u$. On a

$$\begin{aligned}|\widetilde{I}_n(y) - \widetilde{I}(y)| &= \left|\int_0^{\frac{1}{n}} \mathrm{e}^{-uy}\mathrm{e}^{iu}u^{\alpha-1}\,\mathrm{d}u + \int_n^\infty \mathrm{e}^{-uy}\mathrm{e}^{iu}u^{\alpha-1}\,\mathrm{d}u\right| \\ &\leqslant \int_0^{\frac{1}{n}} u^{\alpha-1}\,\mathrm{d}u + \sup_{t\geqslant n}\left|\int_n^t \cos(u)u^{\alpha-1}\,\mathrm{d}u\right| + \sup_{t\leqslant n}\left|\int_n^b \sin(u)u^{\alpha-1}\,\mathrm{d}u\right|\end{aligned}$$

   Les sups sont bien définis car par IPP :

$$\int_n^t u^{\alpha-1}\sin(u)\,\mathrm{d}u = [-u^{\alpha-1}\cos(u)]_n^t + \int_n^t (\alpha-1)u^{\alpha-2}\cos(u)\,\mathrm{d}u$$

   Donc

$$\begin{aligned}\left|\int_n^t u^{\alpha-1}\sin(u)\,\mathrm{d}u\right| &\leqslant t^{\alpha-1} + n^{\alpha-1} + \int_n^t |(\alpha-1)u^{\alpha-2}\cos(u)|\,\mathrm{d}u \\ &\leqslant 2n^{\alpha-1} + \int_n^\infty |(\alpha-1)u^{\alpha-2}\cos(u)|\,\mathrm{d}u < \infty\end{aligned}$$

   Donc le sup est bien défini et on a de plus

$$\lim_{n\to+\infty} |\widetilde{I}_n(y) - \widetilde{I}(y)| = 0$$

   Donc $\widetilde{I}_n$ converge uniformément vers $\widetilde{I}$. Les $\widetilde{I}_n$ étant des intégrales de fonctions continues sur des domaines compacts, ce sont des fonctions continues, donc $\widetilde{I}$ est finalement continue.
3. En particulier, elle est continue en 0 et on a :

$$\int_0^\infty t^{\alpha-1}\mathrm{e}^{it}\,\mathrm{d}t = \widetilde{I}(0) = \lim_{x\to 0} \widetilde{I}(x) = \lim_{x\to\infty} x^\alpha I(x) = \Gamma(\alpha)\mathrm{e}^{i\alpha\frac{\pi}{2}}$$

   Pour $\alpha = \frac{1}{2}$, avec le changement de variables $t = u^2$, on a

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{iu^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{it}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{i\alpha\frac{\pi}{2}}$$

   par le dernier lemme. ■