Fonctions dont la norme du gradient est constante

PIERRON Théo

5 janvier 2014

<u>THÉORÈME</u> *Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Si pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|\nabla f(x)\| = 1$, alors f est affine.*

Démonstration.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, définissons le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} \gamma'(t) & = \nabla f(\gamma(t)) \\ \gamma(0) & = x \end{cases}$$

  Comme $f \in C^1$, $\nabla f \in C^0$. Par le théorème d'Arzela-Peano, ce problème admet une solution notée γ_x.
- On a
$$\frac{\partial f(\gamma_x(t))}{\partial t} = \langle \nabla f(\gamma_x(t)), \gamma'(t) \rangle = \|\nabla f(\gamma_x(t))\|^2 = 1$$
  Donc en intégrant entre 0 et t, on obtient $f(\gamma_x(t)) - f(x) = t$.
- Étudions maintenant le comportement de f sur le segment $[x, \gamma_x(t)]$. Soit

$$g \colon s \mapsto f(s\gamma_x(t) + (1-s)x)$$

  g est dérivable et
$$g'(s) = \langle \nabla f(s\gamma_x(t) + (1-s)x), \gamma_x(t) - x \rangle$$
  On a alors par Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} t = f(\gamma_x(t)) - f(x) = g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(s)\,\mathrm{d}s \\ \leqslant \int_0^1 \underbrace{\|\nabla f(s\gamma_x(t) + (1-s)x)\|}_{=1} \|\gamma_x(t) - x\|\,\mathrm{d}s = \|\gamma_x(t) - x\| \end{aligned}$$

  Comme γ_x est paramétré par la longueur l'arc, la longueur de $\gamma_x([0,t])$ est t. Ainsi, $\|\gamma_x(t) - x\| = \|\gamma_x(t) - \gamma_x(0)\| \leqslant t$. Toutes les inégalités précédentes sont donc des égalités. Comme on a ponctuellement

$$g'(s) \leqslant \|\nabla f(s\gamma_x(t) + (1-s)x)\| \, \|\gamma_x(t) - x\|$$

  on a aussi l'égalité pour tout s. Comme $\|\nabla f(s\gamma_x(t) + (1-s)x)\| = 1$, on a finalement

$$\|\nabla f(s\gamma_x(t) + (1-s)x)\| = \frac{\gamma_x(t) - x}{\|\gamma_x(t) - x\|}$$

  En particulier pour $s = 0$, $\nabla f(x) = \frac{\gamma_x(t)-x}{\|\gamma_x(t)-x\|}$ i.e.

$$\gamma_x(t) = x + \underbrace{\|\gamma_x(t) - x\|}_{=t} \nabla f(x) = x + t\nabla f(x)$$

- Montrons que γ_x est une solution globale.
  Pour tout compact K de $\mathbb{R}$, il existe $a < b$ tel que $K \subset [a, b]$. Alors

$$|\gamma_x(t)| \leqslant x + \max(|a|, |b|)\nabla f(x) < \infty$$

  Par le principe de majoration a priori, γ_x est donc définie sur $\mathbb{R}$.
- Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $H_{x_0} = x_0 + (\mathbb{R}\nabla f(x_0))^\perp$ l'hyperplan passant par x_0 et orthogonal à $\nabla f(x_0)$. Montrons que f est constante sur H_{x_0}.
  Soit $t > 0$ et $z \in B(\gamma_{x_0}(t), t)$. Alors, comme précédemment,

$$|f(\gamma_{x_0}(t)) - f(z)| \leqslant \int_0^1 |\langle \nabla f(s\gamma_{x_0}(t) + (1-s)z, \gamma_{x_0}(t) - z\rangle| \,\mathrm{d}s \leqslant \|\gamma_{x_0}(t) - z\| \leqslant t$$

  Donc $f(z) \geqslant f(\gamma_{x_0}(t)) - t = f(x_0)$.
  Soit $x \in H_{x_0}$. En regardant la figure, on voit qu'il existe $z_n \in B(\gamma_{x_0}(n), n)$ qui converge vers x. Alors on a $f(z_n) \geqslant f(x_0)$ donc par continuité de f, $f(x) \geqslant f(x_0)$.
  Le même raisonnement avec $t < 0$ fournit $z_n \in B(\gamma_{x_0}(-n), n)$ qui converge vers x et $f(z_n) \leqslant f(x_0)$ donc $f(x) \leqslant f(x_0)$.
  Ainsi, f est constante sur H_{x_0}.
- Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Comme γ_{x_0} est une droite dirigée par $\nabla f(x_0)$, il existe x_0, t tel que $x \in H_{\gamma_{x_0}(t)}$.
  Alors f est constante sur cet hyperplan donc

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\gamma_{x_0}(t)) = f(x_0) + t = f(x_0) + \|\gamma_{x_0}(t) - x_0\| \\ &= f(x_0) + \langle \gamma_{x_0}(t) - x_0, \nabla f(x_0)\rangle = f(x_0) + \langle x - x_0, \nabla f(x_0)\rangle + \underbrace{\langle \gamma_{x_0}(t) - x, \nabla f(x_0)\rangle}_{=0} \\ &= f(x_0) + \langle x - x_0, \nabla f(x_0)\rangle \end{aligned}$$

  Donc f est affine. ■