Développement : théorème de lecture unique

Pierron Théo

10 avril 2014

Définition On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des formules, V l'ensemble des variables et C celui des connecteurs.

On note $x \leqslant y$ ssi x est un préfixe de y et $x < y$ si $x \leqslant y$, $x \neq \varepsilon$ et $x \neq y$.

On note $o(M)$ le nombre de parenthèses ouvrantes de M (ie $|M|_($). De même $f(M) := |M|_)$.

Théorème *Soit F une formule propositionnelle. Alors un et un seul des cas suivants se produit :*
- *$F \in V$*
- *il existe une unique formule G telle que $F = \neg G$*
- *il existe un unique couple de formules (G, H) et un unique opérateur α tel que $F = (G\alpha H)$.*

Lemme 1
Si $F \in \mathcal{F}$, $o(F) = f(F)$.

Démonstration. Par induction sur F :
- si $F \in V$, $o(F) = 0 = f(F)$
- si $F = \neg G$, $o(F) = o(G) = f(G) = f(F)$
- si $F = (G\alpha H)$, $o(F) = 1 + o(G) + o(H) = 1 + f(G) + f(H) = f(F)$ ∎

Lemme 2
Soit $F \in \mathcal{F}$, M un mot sur $(V \cup C \cup \{(,)\})^*$. Si $M \leqslant F$, $o(M) \geqslant f(M)$.

Démonstration. Par induction sur F :
- Si $F \in V$ et $M \leqslant F$, $M = \varepsilon$ ou $M = F$ donc $o(M) \geqslant f(M)$.
- Si $F = \neg G$ et $M \leqslant F$, $M = \varepsilon$ ou $M = \neg N$ où $N \leqslant G$. Donc $o(M) = o(N) \geqslant f(N) = f(M)$.
- Si $F = (G\alpha H)$ et $M \leqslant F$, on a 4 cas.
  Si $M = \varepsilon$ ou $M = F$, c'est bon. Si $M = (N$ avec $N \leqslant G$, on a $o(M) = 1 + o(N) \geqslant 1 + f(N) \geqslant f(M)$.
  Si $M = (G\alpha N$ avec $N \leqslant H$, on a $o(M) = 1 + o(G) + o(N) = 1 + f(G) + o(N) \geqslant 1 + f(G) + f(N) \geqslant f(M)$. ∎

Lemme 3
Pour tout $F \in \mathcal{F}$ dont le premier symbole est (, et pour tout $M < F$, $o(M) > f(M)$.

Démonstration. Soit $F = (G\alpha H)$ et $M < F$.
- Si $M = (N$ avec $N \leqslant G$, $o(M) = 1 + o(N) \geqslant 1 + f(N) > f(M)$.
- Si $M = (G\alpha N$ avec $N \leqslant G$, $o(M) = 1+o(G)+o(N) = 1+f(G)+o(N) \geqslant 1+f(G)+f(N) > f(M)$. ∎

Lemme 4
Soit $F \in \mathcal{F}$, $M < F$. Alors M n'est pas une formule.

Démonstration. Par induction sur F,
- Si $F \in V$, il n'y a pas de préfixe propre de F.

- Si $F = \neg G$ et $M < F$, alors $M = \neg$ (et M n'est pas une formule) ou $M = \neg N$ avec $N < G$. N n'est donc pas une formule et M non plus.
- Si $F = (G \alpha H)$, $M < F$, alors $o(M) > f(M)$ donc M n'est pas une formule. ■

Démonstration du théorème. Il est clair que les trois cas s'excluent (regarder la première lettre). Soit F une formule.

Si $F \in V$, $|F| = 1$ donc il y a unicité.

Si $F = \neg G = \neg H$ alors $G = H$.

Si $F = (G \alpha H) = (G' \beta H')$. Par symétrie, on a $G' \leqslant G$. Ce ne peut être un préfixe propre donc $G' = G$. D'où $\alpha = \beta$ et $H = H'$. D'où l'unicité. ■